



中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

数 学

下 册

许萍萍 ○ 主编

MATHEMATICS



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

数 学

(下册)

主 编 许萍萍

副主编 陈淑婷

参 编 王 俊 贺秋艳 郑秀秀

主 审 高收茂



机械工业出版社

本套书是中等职业学校基础数学教学改革规划教材。全书分上、下册,共14章,本书为下册。上册的主要内容有初中基础知识回顾、集合与逻辑初步、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量和复数等。下册的主要内容有立体几何、平面解析几何、矩阵与行列式、导数与微分、积分、计算器的应用等。本套书配有助教用CD-R(内有习题答案和电子教案,免费赠送给采用此书作为教材的教师)和配套习题册等教学辅助资料。

本书针对性强,充分突出数学的工具性;采用分专业的模式编排内容,数学知识介绍深入浅出、逐级递进,更易被学生掌握,也易于教师根据各专业的特点组织教学(参见上册附录)。

本书可作为中等职业学校电子类、机电类、数控类专业三年制学生的数学教材,也可供其他专业及技工学校作为数学教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学·下册/许萍萍主编. —北京:机械工业出版社,2009.1

中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

ISBN 978-7-111-25640-3

I. 数… II. 许… III. 数学课—专业学校—教材 IV.

G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第185200号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:高倩 宋学敏 责任编辑:宋学敏 责任校对:纪敬

封面设计:王伟光

责任印制:洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2009年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·9.75印张·146千字

0001—3000册

标准书号:ISBN 978-7-111-25640-3

定价:15.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010)68326294

购书热线电话:(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010)88379199

封面无防伪标均为盗版

前 言

中等职业学校是培养高级技工人才的摇篮，其教学质量水平直接决定了学生的素质和发展后劲，从而影响企业乃至国家的发展水平。数学作为一门培养学生逻辑思维能力和推理方法的重要基础学科，在教学活动中起着相当重要的作用。但我国中等职业学校的学生普遍学习基础较差，学习兴趣不大，特别是对数学等难度较大的课程更是缺乏学习的信心和动力，再加上数学课程的学时数有限，这些都给数学课程的教学增加了一定的难度。在长期的数学教学过程中，我们发现现在的数学教材内容多，并且有些内容过于抽象，对知识点的介绍枯燥乏味，不易激发学生对数学学习的积极性，也不利于教师根据不同专业的需要来安排教学。为了满足中等职业学校人才培养的需要，根据教育部职成[2007]7号《关于颁发中等职业学校语文等课程大纲的通知》精神，以及目前中等职业学校学生的文化知识现状，本着让学生“就业有技能、创业有能力、升学有基础、发展有后劲”的宗旨，我们编写了本套书。

本套书有以下几个方面的特点：

(1) 根据不同专业的教学需要，本套书增加了矩阵与行列式、导数与微分、积分等高等数学基础知识，弥补了目前教材中普遍缺少线性代数及微积分等内容的缺陷。

(2) 以运用为目的，以必需、够用的原则选取数学知识点；编写中采用深入浅出、逐级递进、螺旋上升的方式，逐步渗透数学思想，使学生更易了解和掌握数学知识。

(3) 充分突出数学的工具性。重视理论联系实际，深化概念，加强计算，引导学生探索实际问题，提高他们将数学应用于实践的兴趣。

(4) 采用分专业编排方式，易于教师根据不同专业及学生的实际情况安排教学内容。

(5) 内容简单明了，易于学生接受。

本套书由许萍萍编写第0、3、4、6、11章，陈淑婷编写第2、7、

8、10 章，王俊编写第 1、9、12 章，贺秋艳编写第 5、13 章，郑秀秀编写第 14 章；由许萍萍最后统稿；陕西建设技术学院高收茂老师主审。

在本套书的编写过程中，得到了机械工业出版社的大力支持和帮助，同时也得到陕西省电子信息学校及基础教研室的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误，热诚欢迎广大读者批评指正，提出宝贵意见。

编 者

目 录

前言

第 9 章 立体几何	1
9.1 平面的基本性质	1
9.2 空间直线和平面	5
9.3 空间向量	15
9.4 直线和平面的度量关系	20
本章小结	27
复习题 9	29
第 10 章 平面解析几何	31
10.1 平面上直线的方程	31
10.2 平面上两条直线的位置关系	38
10.3 圆	47
本章小结	53
复习题 10	55
第 11 章 矩阵与行列式	57
11.1 行列式	57
11.2 矩阵	68
11.3 线性方程组	81
本章小结	84
复习题 11	86
第 12 章 导数与微分	89
12.1 极限	89

12.2	导数	100
12.3	导数的应用	109
12.4	函数的微分	113
	本章小结	115
	复习题 12	119
第 13 章	积分	122
13.1	不定积分	122
13.2	定积分	131
	本章小结	137
	复习题 13	139
第 14 章	计算器的应用	141
	本章小结	147
	参考文献	148

第9章 立体几何

本章要研究的对象为空间图形，即由空间的点、线、面所构成的图形。

当我们把研究的范围由平面扩大到空间后，有些平面图形的基本性质，在空间仍然成立，例如三角形全等、平行线的传递性等。而有些性质在研究范围扩大到空间后，就不成立了，如，垂直于同一条直线的两条直线是否平行的问题。在这一章，我们要把平面内直线的平行、垂直和图形对称的性质推广到空间及表示空间图形的方法。

9.1 平面的基本性质

9.1.1 平面的特征及图形和符号语言

观察以下几个事物：

桌面、黑板、地面、平静的海平面等。

这些事物是生活中所说的平面，但还不能算是数学意义上的平面，因为它们是有限的面。

平面是一个不加定义的概念，具有“平”、“无限延展”、“无厚薄”的特点。一个平面可以把空间分成两部分。

在平面内，基本图形是点、直线、射线和线段。在空间，除以上图形外，还有一个基本图形——平面。因此，首先要学习平面的表示方法。

几何里的平面和直线一样，是无限延展的，常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象。

我们不能把一个无限延展的平面在纸上表示出来，通常用平面的一部分表示平面。

平面的画法：

① 常用平行四边形表示平面，如果是水平面，把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成斜边的 2 倍长，如图 9-1 所示。

② 如果是非水平平面，只要画成平行四边形。

③ 当几个平面在一起时，一个平面被另一个平面遮住的部分的线画成虚线或不画。不过要把它想象成无限延展的，如图 9-2 所示。



图 9-1

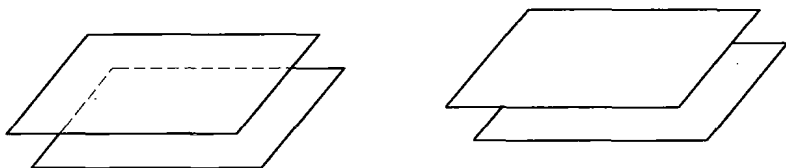


图 9-2

平面的表示法有如下几种：

① 在一个希腊字母 α 、 β 、 γ 的前面加“平面”二字，如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等，且字母通常写在平行四边形的一个锐角内，如图 9-3a 所示。

② 用平行四边形的四个字母表示，如平面 $ABCD$ ，如图 9-3b 所示。

③ 用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC ，如图 9-3c 所示。

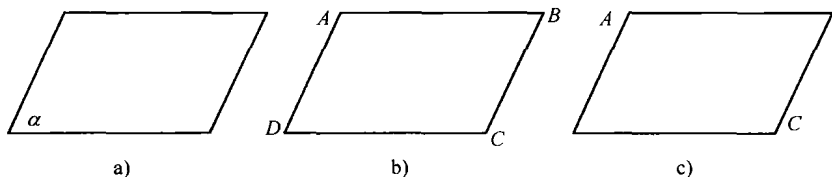


图 9-3

习 题

1. 按照以上的方法画一个水平平面。
2. 画出两个水平平面，且一个平面遮住另一个平面的一部分。

9.1.2 平面的基本性质

在日常生活中，我们对平直和弯曲这两种状态都有了直观的认识，很容易区分物体的表面是平直的还是弯曲的。下面我们来学习平面的基本性质。

公理 1 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内。

这时我们说直线在平面内或平面经过直线。利用这个性质，可以判断一条直线是否在一个平面内。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条直线。

以后说到两个平面，如不特别说明，都是指两个不重合的平面。

如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的**交线**。如图 9-4 所示，平面 α 与 β 相交，交线是直线 a ；平面 γ 与 δ 相交，交线是直线 b 。

画两个平面相交，当其中一个平面被另一个平面遮住时，应把被遮住的部分画成虚线或不画。

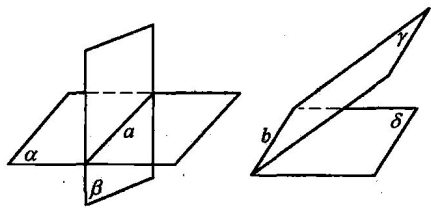


图 9-4

公理 3 经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面。

如照相机可用三条腿的架子支撑在地面上，就是基于这个性质。公理 3 也可简单地说是，**不共线的三点确定一平面**。过不共线三点 A 、 B 、 C 的平面通常记作平面 ABC 。

由上面的公理，可以得到下面的推论：

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面。

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面。

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面。

下面证明推论 1(叙述法)。

证明 如图 9-5 所示, 设点 A 是直线 l 外一点, 在 l 上任取两点 B 、 C , 根据公理 3, 经过不共线的三点 A 、 B 、 C 有一个平面 α ; 因为点 B 、 C 在平面 α 内, 所以根据公理 1, 直线 l 在平面 α 内, 即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面. 又因为 B 、 C 在 l 上, 所以任何经过点 A 和直线 l 的平面一定经过点 A 、 B 、 C . 于是再根据公理 3, 经过不共线的三点 A 、 B 、 C 的平面只有一个. 所以经过直线 l 和点 A 的平面有且只有一个.

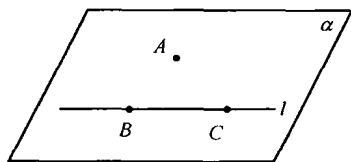


图 9-5

由于点、线、面是构成空间中物体的三个要素, 而点是构成直线和平面的最基本元素, 因此直线和平面可以看成是点的集合, 这样立体几何中的物体间的关系就可以用集合间的关系来表示. 我们规定如下:

- ① 点 A 在直线 l 上, 记作 $A \in l$;
- ② 点 A 在平面 α 内, 记作 $A \in \alpha$;
- ③ 直线 l 在平面 α 内, 记作 $l \subset \alpha$;
- ④ 直线 l 与直线 m 相交于点 A , 记作 $l \cap m = A$;
- ⑤ 直线 l 与平面 α 相交于点 A , 记作 $l \cap \alpha = A$;
- ⑥ 平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 记作 $\alpha \cap \beta = l$.

习 题

1. 仿照推论 1 的证明, 证明推论 2、3.
2. 判断下列说法的正误, 并说明为什么?
 - ① 一条线段在一个平面内, 这条线段所在的直线也在这个平面内;
 - ② 任意三点都可以确定一个平面;
 - ③ 不共线的四点可以确定一个平面;
 - ④ 过一条直线的平面有无数多个;
 - ⑤ 梯形、矩形、三角形都是平面图形;
 - ⑥ 四边形不一定是平面图形;
 - ⑦ 一条直线可以确定一个平面;
 - ⑧ 两点确定一个平面;
 - ⑨ 一条直线和一个平面内两条相交直线都相交, 则这条直线必在平面内.

3. 空间中两两平行的三条直线, 且不在同一平面内, 它们能确定几个平面?

4. 用符号 $\subset$ 、 $\supset$ 、 $\in$ 、 $\cap$ 、 $\cup$ 填空:

① 经过点 C 的直线 l 可记作_____;

② 经过直线 l 的平面 α 可记作_____;

③ 平面 α 与平面 β 相交于直线 l 可记作_____.

5. 试证明两两相交的三条直线共面.

9.2 空间直线和平面

9.2.1 直线和直线的位置关系

在初中几何中, 我们知道在平面上两条直线的位置关系可以是重合、相交或平行. 从有无公共点角度来分析得出: 在空间中, 有两条直线既没有公共点, 也不在同一个平面内, 这样的两条直线的位置关系叫做异面直线.

由上所述空间中两直线的位置关系有以下四种:

重合: 两条直线有两个以上的公共点(无数个).

相交: 两条直线有且只有一个公共点.

平行: 两条直线没有公共点.

异面: 两条直线没有公共点, 且不在同一平面内.

区分平行与异面的位置关系时, 就看两直线在不在任何一个平面内.

画图时为了明显看出异面直线的位置关系, 我们通常用如图 9-6 所示的画法.

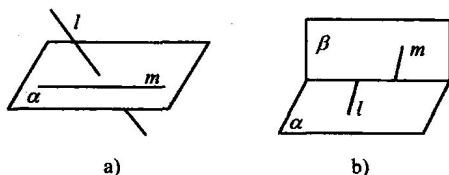


图 9-6

我们可以证得空间中平行线的一条重要性质定理:

定理 1 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

定理 1 用数学符号表示为: 已知直线 a 、 b 、 c , 且 $a \parallel b$, $b \parallel c$, 则 $a \parallel c$. 也称为平行线的传递性.

例1 试证：连结平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过此点的直线是异面直线。

证明 如图 9-7 所示，设直线 AB 与平面 α 相交于点 B ，点 A 在 α 外，直线 l 在 α 内但不过点 B ，这时直线 AB 和 l 一定是异面直线（否则， AB 与 l 共面，可推得点 A 在 α 内，这与已知点 A 在 α 外矛盾）。

例2 已知 E 、 F 、 G 、 H 分别是空间四边形四条边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点，求证四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

证明 如图 9-8 所示， EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

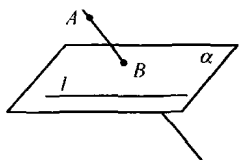


图 9-7

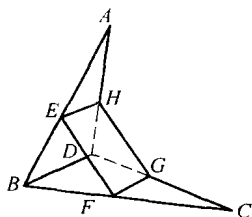


图 9-8

因此

$$EH \parallel \frac{1}{2}BD.$$

同理

$$FG \parallel \frac{1}{2}BD.$$

由定理 1 可知， $EH \parallel FG$ ，即四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形。

习 题

1. 如图 9-9 所示，指出下列直线间的位置关系。

- ① 直线 AB 与直线 CD' ；
- ② 直线 AB 与直线 CD ；
- ③ 直线 AB 与直线 BB' ；
- ④ 直线 AB 与直线 AC' ；
- ⑤ 直线 $B'D$ 与直线 $A'C$ ；
- ⑥ 直线 $B'D$ 与直线 CD' ；
- ⑦ 直线 AA' 与直线 CC' ；
- ⑧ 直线 AC 与直线 $A'C'$ 。

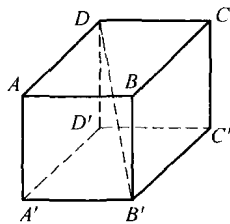


图 9-9

2. 判断下列说法正误，并说明为什么？

- ① 不在同一个平面内的两条直线必为异面直线；
- ② 平行于同一条直线的两条直线平行；
- ③ 相交于同一条直线的两条直线相交；
- ④ 没有公共点的两条直线平行；
- ⑤ 若两条直线分别在两个平面内，则这两条直线异面；
- ⑥ 垂直于同一条直线的两条直线平行；
- ⑦ 一条直线垂直于两条平行线中的一条直线，那么它也垂直于另一条直线。

3. 如图 9-9 所示，分别取 AB 、 BC 中点 E 、 F ，连结 EF ，试证 $EF \parallel A'C'$ 。

4. 画图。

- ① 用至少两种方法画两条异面直线；
- ② 平面外的一条直线与平面内的一条直线平行；
- ③ 平面外的一条直线与平面内的一条直线垂直；
- ④ 平面内的两条平行直线。

9.2.2 直线和平面的位置关系

1. 直线和平面的位置关系

观察下列各组的直线与平面的位置关系，如图 9-10 所示。

- ① 直线 AB 与平面 ABC ；
- ② 直线 AB 与平面 $A'B'C'$ ；
- ③ 直线 $B'D$ 与平面 ABC ；
- ④ 直线 AA' 与平面 $A'B'C'$ ；
- ⑤ 直线 AA' 与平面 $BB'C'$ 。

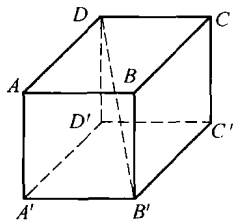


图 9-10

由此看出，一条直线与平面的位置关系有三种：

直线在平面内：有两个公共点（以至有无数个公共点）；

直线和平面相交：有且只有一个公共点；

直线和平面平行：没有公共点。

直线与平面平行的画法：如图 9-11 所示，直线画在平行四边形的外面，记作 $l \parallel \alpha$ 。

直线与平面相交的画法：如图 9-12 所示，直线与平行四边形相交并延伸到平行四边形的外面。直线 l 与平面 α 相交于点 A ，记

作 $l \cap \alpha = A$.

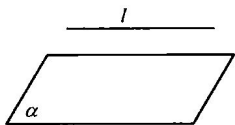


图 9-11

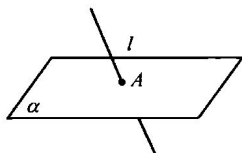


图 9-12

2. 直线和平面平行

观察我们教室内的管灯是否和天花板平行？通常我们用如下的方法来判定一条直线和平面平行。

定理 2 如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

定理 2 可以表示为：若 $l \parallel m$, $l \notin \alpha$, 则 $l \parallel \alpha$.

定理 2 证明：假设直线 l 不平行于平面 α , 因 $l \notin \alpha$, 所以 $l \cap \alpha = P$. 若 $P \in m$, 则和 $l \parallel m$ 矛盾，如图 9-13a 所示。

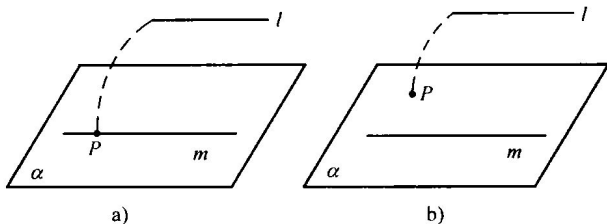


图 9-13

若 $P \notin m$, 则 l 和 m 成异面直线，也和 $l \parallel m$ 矛盾，如图 9-13b 所示。所以 $l \parallel \alpha$.

直线和平面平行的性质：

定理 3 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。

定理 3 可表示为：若 $l \parallel \alpha$, $l \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, 则 $l \parallel m$.

定理 3 证明：如图 9-14 所示，因 $l \parallel \alpha$, 则 l 和 α 没有公共点，又因 $m \subset \alpha$, 所以 l 和 m 没有公共点；即 l 和 m 都在 β 内，且没有公共点，则 $l \parallel m$.

例1 已知：空间四边形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AB, AD 的中点，如图9-15所示. 求证： $EF \parallel$ 平面 BCD .

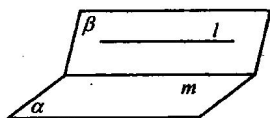


图 9-14

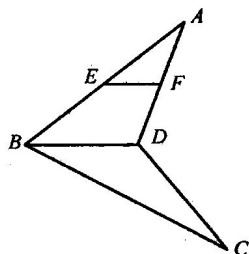


图 9-15

证明 连结 BD ，在 $\triangle ABD$ 中，因 E, F 分别是 AB, AD 的中点，所以 $EF \parallel BD$. 又 $EF \not\subset$ 平面 BCD ， $BD \subset$ 平面 BCD ，

因此， $EF \parallel$ 平面 BCD .

3. 直线和平面垂直

观察我们教室内的课桌腿是否与地面垂直？通常情况下我们用如下的方法来判断一条直线和平面垂直.

定义 如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的任意一条直线都垂直，我们就说这条直线和这个平面互相垂直. 其中直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面，交点叫做垂足. 直线与平面垂直简称线面垂直，记作： $l \perp \alpha$.

画法 如图9-16所示，通常情况下将直线与表示平面的平行四边形的横边画成垂直.

由定义我们知道，要判断直线和平面是否垂直，则要检验直线和平面内的所有直线都垂直，这是很难办到的. 通常我们用下面的定理来判断.

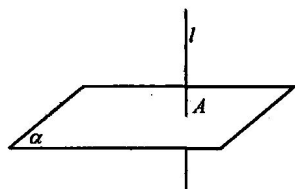


图 9-16

定理4 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线与这个平面垂直.

定理4可以表示为：若 $l_2 \subset \alpha$ ， $l_3 \subset \alpha$ ， $l_2 \cap l_3 = A$ ，且 $l_1 \perp l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ；则 $l_1 \perp \alpha$.

因为两条相交直线确定一个平面，如果一条直线和这个平面内

的两条相交直线都垂直, 那么它也就和这个平面内的所有的直线都垂直.

例 2 过一点和已知平面垂直的直线只有一条.

已知: 如图 9-17 所示, 平面 α 和一点 P .

求证: 过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

证明 不论点 P 在 α 内或 α 外, 设直线 $PA \perp \alpha$, 垂足为 A . 如果另有一条直线 $PB \perp \alpha$, 设 PA 、 PB 确定的平面为 β , 且 $\alpha \cap \beta = AB$, 于是在平面 β 内过点 P 有两条直线 PA 、 PB 垂直于 AB , 这是不可能的. 所以过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

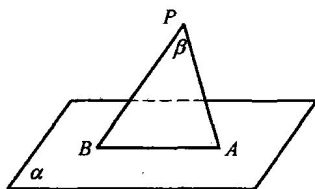


图 9-17

定理 5 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条直线也平行于这个平面.

定理 5 可以表示为: 若 $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \perp \alpha$, 则 $l_2 \perp \alpha$.

定理 6 如果两条直线垂直于同一个平面, 那么这两条直线互相平行.

定理 6 可以表示为: 若 $l_1 \perp \alpha$, $l_2 \perp \alpha$, 则 $l_1 \parallel l_2$.

例 3 试证: 同时垂直于三角形两边的直线, 也和第三边垂直.

证明 如图 9-18 所示, $l \perp AC$ 、 $l \perp BC$.

因为在三角形 ABC 中, A 、 B 、 C 三点确定一个平面 ABC , 且 AC 、 BC 、 AB 在平面 ABC 内, l 垂直于直线 AC 、 BC , 则 l 垂直于平面 ABC .

所以 $l \perp AB$.

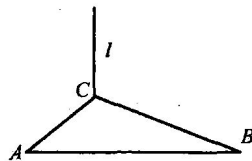


图 9-18

习 题

1. 如图 9-19 所示, 指出下列直线与平面的位置关系.

- ① 直线 AC 与平面 ABC ;
- ② 直线 AB' 与平面 $A'B'C'$;
- ③ 直线 $B'D$ 与平面 $A'BC$;
- ④ 直线 CA' 与平面 $A'B'C'$;
- ⑤ 直线 AA' 与平面 $BB'C'$;