

初中数学竞赛读本

本书编写组

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

初中数学竞赛读本

ISBN 978-7-5343-8829-3



9 787534 388293 >

定价:18.70 元

初中数学竞赛读本

(本书编写组)

凤凰出版传媒集团

 江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛读本/董林伟,李善良主编. —南京:江苏教育出版社,2008.9

ISBN 978-7-5343-8829-3

I. 初… II. ①董…②李… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 150621 号

- 书 名 初中数学竞赛读本
编 写 本书编写组
责任编辑 张 磊
出版发行 凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 邮编:210009)
网 址 <http://www.1088.com.cn>
集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>
经 销 江苏省新华发行集团有限公司
照 排 南京理工出版信息技术有限公司
印 刷 江苏苏中印刷有限公司
厂 址 泰州市经济开发区内(邮编 225315)
电 话 0523-82099008
开 本 880×1240 1/32
印 张 10.75
版 次 2008 年 10 月第 1 版
2008 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5343-8829-3
定 价 18.70 元
批发电话 025-83260760,83260768
邮购电话 025-85400774,8008289797
短信咨询 10602585420909
E-mail jsep@vip.163.com
盗版举报 025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

前 言

很多同学都喜欢数学。

因为数学可以帮助我们理性思考、优化思维、解决问题。而且数学还非常有趣。

在完成学习任务后,尝试解决一些需要深入思考的数学问题,对我们是一种挑战,也是一种激励。许多大数学家在他的学生时代都有这样的经历。

为了满足那些在数学方面学有余力、又想有更多发展的同学的需要,帮助他们加深理解、拓宽思路、开阔视野,同时也为参加数学竞赛的同学提供系统的辅导,30余位有经验的数学教师联手,编写了《初中数学竞赛读本》。

全书共53节,包括代数、几何、统计概率、组合等方面的问题。本书分“基础篇”和“提高篇”两个部分。“基础篇”以新课程标准(7—9)年级的内容和要求为主,注重基础知识、基本技能、基本方法。“提高篇”以初中数学竞赛常涉及到的专题为主,注重开拓视野、训练思维。

希望本书能对你的学习有帮助。

本书编写组

目 录

第一章 数与式	1
1. 数(一)	1
2. 数(二)	6
3. 整式	10
4. 分式	13
5. 二次根式	17
第二章 方程与不等式	21
6. 一元一次方程、二元一次方程组的解法	21
7. 一元二次方程	24
8. 分式方程	26
9. 方程的应用	29
10. 不等式	34
第三章 函数	39
11. 函数、反比例函数、一次函数	39
12. 二次函数	48
13. 锐角三角函数与直角三角形	57
第四章 空间基本图形	62
14. 空间基本图形	62
15. 视图与投影	72



第五章 三角形与四边形	79
16. 三角形(1)	79
17. 三角形(2)	85
18. 四边形(1)——平行四边形	92
19. 四边形(2)——梯形	100
第六章 圆	107
20. 圆的有关性质及计算	107
21. 圆幂定理及四点共圆	113
第七章 图形与变换	118
22. 平移、旋转	118
23. 探索三角形相似的条件	124
24. 相似三角形的性质	129
25. 图形与坐标	135
第八章 概率与统计	140
26. 概率	140
27. 统计(1)	147
28. 统计(2)	152
第九章 数	159
29. 整除性及其判定	159
30. 素数与合数,最大公约数与最小公倍数	164
31. 奇数和偶数,奇偶性分析	168
32. 完全平方数	172
第十章 代数式	177
33. 综合除法、余式定理	177
34. 因式分解(1)	182



35. 因式分解(2)	185
36. 整式、分式的恒等变形	188
第十一章 方程和不等式	192
37. 含字母系数的方程与不等式的解法	192
38. 一元二次方程根与系数的关系	197
39. 含绝对值的一元一次方程及简单的三元一次方程组 (系数不含字母)	203
40. 简单的不定方程(组)	208
第十二章 函数	213
41. $y = ax + b $, $y = ax^2 + bx + c $ 的图象和性质	213
42. 二次函数	218
第十三章 几何	223
43. 三角形中的边角之间的不等关系	223
44. 面积及等积变换	229
45. 三角形的心(1)	235
46. 三角形的心(2)	241
47. 四点共圆与圆内接四边形	247
48. 圆幂定理	253
第十四章 逻辑推理问题	259
49. 抽屉原理及其简单的应用	259
50. 简单的组合问题	264
51. 简单的逻辑推理, 反证法	270
52. 极端原理的简单应用	273
53. 枚举法及简单应用	277
参考答案	282



基础篇

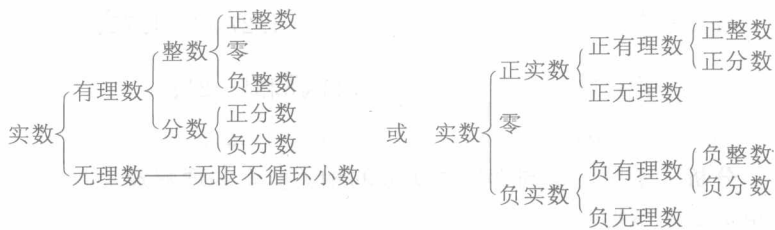
第一章 数 与 式

1. 数(一)



概 要

本课时主要涉及的内容是:实数的分类以及与实数有关的一些概念.实数的分类可以如下表示:



我们知道,与实数有关的概念主要有:有理数、无理数、正数、负数、非负数、数轴、相反数、绝对值、倒数、近似数和有效数字、平方根、算术平方根、立方根、幂(包括正整数指数幂、零指数幂与负整数指数幂)等.

对于上述概念中的数轴、相反数、绝对值、倒数、近似数和有效数字等,我们作如下阐述:

数轴 我们要明确,实数与数轴上的点具有一一对应的关系(体现数形结合的数学思想).

相反数 若 a, b 互为相反数, 则 $a + b = 0$.

绝对值 我们要明确, 实数 a 的绝对值是一个非负实数, 它在数轴上表示数 a 的点与原点的距离, 可用下面式子来表示:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

倒数 若 a, b 互为倒数, 则 $ab = 1$.

近似数和有效数字 我们要了解近似数与有效数字的概念, 并在解决实际问题中, 能用计算器进行近似计算, 并按问题的要求对结果取近似值.

另外, 对于上述概念中的平方根、算术平方根、立方根和幂等, 因其与实数的相关运算密不可分, 故我们将在下一课时中再作说明.

例题

例 1 比较下列每对数的大小:

(1) $-\frac{6}{5}$ 和 $-\frac{5}{6}$;

(2) -1.27 和 -1.72 ;

(3) π 和 3.14 ;

(4) $\sqrt{5}$ 和 $|-2|$;

(5) $\sqrt{a^2}$ 和 a ;

(6) $a^2 + 2a + 1$ 和 0 .

分析 本题考查同学们对实数的相关概念的理解及实数的一些简单运算的掌握.

解 (1) $-\frac{6}{5} < -\frac{5}{6}$;

(2) $-1.27 > -1.72$;

(3) $\pi > 3.14$;

(4) 因为 $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, $|-2| = 2$, 所以 $\sqrt{5} > 2$;

(5) $\sqrt{a^2} = |a| \geq a$;

(6) $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2 \geq 0$.

例 2 已知点 A, B 在数轴上, 点 A 在原点的左侧, 且点 B 与点

A 关于原点对称. 现将点 A 向左平移 4 个单位长度, 再向右平移 10 个单位长度, 此时 A 点恰好与 B 点重合, 试求点 A, B 之间的距离及点 A, B 表示的是什么数?

分析 本题考查同学们对数轴上的点与实数之间的对应关系的理解.

解 由题意知, 点 A, B 之间的距离为 $10 - 4 = 6$ 个单位长度.

因为点 A 与点 B 关于原点对称, 所以点 A, B 表示的两个数互为相反数, 分别是 -3 和 3.

例 3 已知实数 a, b 满足: $a < -1, b < a$. 试化简: $|a| + |a - b| - \sqrt{(b + 1)^2}$.

分析 本题考查同学们对含绝对值符号的数、式的化简. 要正确地去掉绝对值符号, 首先要判断绝对值符号内的数或式的值是正的、负的还是零, 然后再根据绝对值的定义去掉绝对值符号.

解 因为 $a < -1, b < a$, 所以 $a < -1 < 0, a - b > 0, |a| + |a - b| = -a + (a - b) = -b$.

又因为 $b < a < -1$, 所以 $b + 1 < 0, \sqrt{(b + 1)^2} = |b + 1| = -(b + 1) = -b - 1$.

故 $|a| + |a - b| - \sqrt{(b + 1)^2} = -b - (-b - 1) = 1$.

例 4 观察用 5 个连续整数 10, 11, 12, 13, 14 编写的计算题: $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2$. 你能用不同于 10, 11, 12, 13, 14 的其他 5 个连续整数编一道类似的题目吗? 这样的题目你能编几个? 请说明理由.

分析 本题考查同学们的观察能力以及数感, 同时对设数、列式、解方程也有一定的要求.

解 注意到 $365 = 6 \times (10 + 11 + 12 + 13 + 14) + 5$, 我们不妨假设存在这样的 5 个连续整数 $x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$, 其中 x 是整数, 使得

$$\frac{(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2}{6 \times [(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2)] + 5} = 2.$$



则上式可化为： $\frac{x^2+2}{6x+1}=2$ ，去分母得 $x^2-12x=0$. (※)

解之得 $x=0$ 或 $x=12$.

当 $x=12$ 时，5 个连续整数即为 10, 11, 12, 13, 14；

当 $x=0$ 时，5 个连续整数即为 -2, -1, 0, 1, 2.

所以我们可以用这样的 5 个连续整数编写一道类似的计算

题： $\frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}=2$. 同时根据方程(※)解的情

况可以知道，这样的题目只能再编一道.

练习

- 下列说法正确的是().
 - 绝对值较大的数较大
 - 绝对值较大的数较小
 - 绝对值相等的两数相等
 - 相等两数的绝对值相等
- 下列说法正确的是().
 - 一个不等于 1 的非零数的倒数一定不等于该数
 - 两个数的和一定大于每一个加数
 - 若两个数的积大于零，则这两个数一定都是正数
 - 一个非负数的绝对值等于它的相反数，那么这个数一定是零
- 数轴上原点和原点左边的点表示的数是().
 - 负数
 - 正数
 - 非正数
 - 非负数
- 若 a 表示负数，则 $-a$ 表示_____。(填正数、负数或零)
- 不小于 -2 但小于 3 的整数有_____.
- 下列用四舍五入法得到的近似数中，精确到 0.001，且有三个有效数字的是_____。(填序号)
 - 0.080 8；
 - 0.808；
 - 8.080；
 - 80.800；
 - 0.808×10^3 .
- 20 080 用科学计数法表示为_____.
- 已知点 A, B 在数轴上(A, B 不在原点)，它们所表示的数恰好互为倒数. 现将点 B 向右平移 2 个单位长度，若此时点 B 所表示的数与点 A 所表示的数的乘积正好等于 5，则点 A 所表示的

是什么数?

9. 已知水深 25 米是某水库的安全运行水位,如果超过安全运行水位 2 米,水库就必须开闸泄流,每小时泄流可使水库水位下降 0.08 米.表 1 是该水库在某一星期中记录下的水位情况(将超过安全运行水位的用正数表示,低于安全运行水位的用负数表示).

表 1

日 期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
与安全运行水位的落差(单位:米)	-1.2	-0.4	-0.1	+0.4	+1.3	+0.9	+2.4

试根据表 1 中数据,回答下列问题:

- (1) 在这一星期中,水库在哪几天的水深是超过安全运行水位的?这几天的实际水深是多少米?
- (2) 在这一星期中,水库是否需要开闸泄流?如果需要,是星期几?至少需要泄流多长时间?



2. 数(二)

概要

本课时主要涉及的内容是:实数的大小比较和实数的有关运算.

对于实数的大小比较问题,我们可以借助于数轴来解决.我们知道:数轴上的两个点所表示的实数中,右边的点所表示的实数大于左边的点所表示的实数.由此可知,正数大于0,负数小于0,正数大于负数,两个负数中,绝对值大的反而小.

我们知道,实数的有关运算主要有加法、减法、乘法、除法、乘方及其混合运算,数的开方和幂(包括正整数指数幂、零指数幂与负整数指数幂)的运算等.

对于实数的加法、减法、乘法、除法、乘方及其混合运算,我们主要是要理解并掌握以下几个方面:

1. 运算的法则 加法法则、减法法则、乘法法则和除法法则等.
2. 运算的定律 加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律和乘法分配律等.

3. 运算的顺序

- ① 先算乘方,再算乘除,最后算加减;
- ② 同级运算,按照从左至右的顺序进行;
- ③ 如果有括号,就先算小括号里的,再算中括号里的,最后算大括号里的.

对于实数的开方运算,我们的基本要求是:了解平方根、算术平方根、立方根的概念,会用根号表示数的平方根、立方根;了解开方与乘方互为逆运算,会用平方运算求某些非负数的平方根,会用立方运算求某些数的立方根,会用计算器求平方根和立方根.

对于幂(包括正整数指数幂、零指数幂与负整数指数幂)的运算,以下法则我们是要掌握的:

1. 同底数幂相乘,底数不变,指数相加.
2. 幂的乘方,底数不变,指数相乘.
3. 积的乘方,等于把积的每一个因式分别乘方,再把所得的幂相乘.
4. 同底数幂相除,底数不变,指数相减.

例题

例 1 在数轴上画出表示下列各数及其相反数的点: $\frac{1}{2}$, -2 , 0 , $-\frac{4}{3}$, 然后用“ $<$ ”把这些数连接起来.



图 1

分析 通过本题,考查大家对数轴上的点与实数之间对应关系的理解以及比大小问题的处理.

解 (画点略) $\frac{1}{2}$, -2 , 0 , $-\frac{4}{3}$ 及其相反数之间的大小关系为:

$$-2 < -\frac{4}{3} < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < \frac{4}{3} < 2.$$

例 2 计算:(1) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}$;

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - |-2 + \sqrt{3}| - (\sqrt{2})^0$;

(3) $(3\sqrt{18} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2^{-1}}) \div \sqrt{2}$;

(4) $(-1)^{2008} + \pi^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt[3]{8}$.

分析 通过本题,考查同学们的综合运算能力.

解 (1) 原式 $= \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \frac{3}{2} = \sqrt{2} - 1$.



$$(2) \text{ 原式} = 3 - (2 - \sqrt{3}) - 1 = 3 - 2 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}.$$

$$(3) \text{ 原式} = (9\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) \div \sqrt{2} = 12\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 12.$$

$$(4) \text{ 原式} = 1 + 1 - 3 + \sqrt[3]{2^3} = -1 + 2 = 1.$$

例 3 已知三个有理数 a, b, c 的积是负数, 其和为正数, 当 $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c}$ 时, 试求 $x^{2009} - 2x + 2$ 的值.

分析 通过本题, 考查同学们的分类讨论思想以及基本运算能力.

解 因为有理数 a, b, c 的积是负数, 所以 a, b, c 的正、负情况是: “二正一负” 或者 “三负”.

又因为 a, b, c 的和为正数, 所以 a, b, c 的正、负情况只能是: “二正一负”, 则

$$x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} = 1 + 1 + (-1) = 1, \text{ 故 } x^{2009} - 2x + 2 = 1^{2009} - 2 + 2 = 1.$$

例 4 求 $2^{2009} - 1$ 的个位数.

分析 通过本题, 考查同学们的乘方运算以及归纳能力. 2^{2009} 是一个非常大的数, 仅靠笔算, 确切的结果不容易得到. 题目只要求计算 $2^{2009} - 1$ 的个位数, 我们不妨从 $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ 开始, 逐步探索其个位数的规律.

解 列表:

表 1

原数	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	...
个位数	2	4	8	6	2	4	8	6	...

从表 1 中数据可以发现, 个位数始终是 2, 4, 8, 6 循环出现, 故可通过计算 $2009 \div 4$ 的余数来确定个位数.

因为 $2009 \div 4$ 的商为 502, 余数为 1, 所以 2^{2009} 的个位数是 2, $2^{2009} - 1$ 的个位数为 1.

练习

- 下列不等式中,正确的是().
 A. $2 < \sqrt{15} < 3$ B. $3 < \sqrt{15} < 4$
 C. $4 < \sqrt{15} < 5$ D. $14 < \sqrt{15} < 16$
- 下列等式中,正确的是().
 A. $2^2 \times 2^3 = 2^6$ B. $(2^2)^3 = 2^6$
 C. $(2 \times 3)^2 = 2^2 + 3^2$ D. $\frac{2^6}{2^2} = 2^3$
- 已知有理数 a, b 满足 $a < b < 0$, 那么下列各式正确的是().
 A. $\frac{a}{b} > 1$ B. $\frac{b}{a} > 1$ C. $a^2 < b^2$ D. $a^3 > b^3$
- 如果 $2a - 16 = 0$, 那么 a 的算术平方根是_____.
- 已知 a, b, c, d 均为实数, 其中 a, b 互为倒数, c, d 互为相反数, 又实数 e 满足: $|e| = 1$, 那么 $(-ab)^{2006} + (c+d)^{2007} - e^{2008} =$ _____.
- 如果 $a > 0, b < 0, |a| < |b|$, 那么 $a, -a, b, -b$ 的大小关系是_____.
- 计算: (1) $(-1)^2 - \sqrt{\frac{1}{4}} + (2)^{-1}$;
 (2) $\frac{6}{\sqrt{2}} - \sqrt{18} - \left(\frac{1}{2}\right)^0$;
 (3) $|3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$;
 (4) $\frac{1}{|1 - \sqrt{2}|} - \sqrt{2} + 2^{-2} - 0.25$.
- 已知实数 a, b 满足 $a < -a < b$, 求实数 x 的取值范围, 使得等式 $|x+a| + |x-b| = a+b$ 始终成立.
- 求 $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, \dots, 7^{2009}$ 的末两位数之和.

