概率论与数理统计

（经济类专业用）

周城璧
韩 泽 编著
钟丽华

四川大学出版社

概率论与数理统计

（经济类专业用）

周城璧
韩　泽　编著
钟丽华

四　川　大　学　出　版　社

内 容 提 要

本书以经济类专业的读者为对象，内容起点低，论述简明清晰，着重概念和方法的介绍，对定理、公式不追求严格的推导和证明。

全书共十章。前四章讨论概率论，包括事件与概率、随机变量和分布、数字特征、大数定律及中心极限定理等内容；后六章讨论数理统计，包括参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、质量管理等内容。书中例题和习题紧密结合经济管理的理论与实践，也选编了部分工程技术和工农业生产中的实际问题，书末附有习题答案和几种重要数表。

除作为经济类专业的教材外，本书也可供企业管理和工程技术人员参考。

概率论与数理统计（经济类专业用）

周城璧
韩　泽　编著
钟丽华

四川大学出版社出版发行
四川省新华书店经销　郫县印刷厂印刷
1990年10月第一版　1990年10月第一次印刷
850×1168毫米　32开　印张10.25　字数230千
印数：1—3000册

ISBN7-5614-0316-x/o·46　定价　2.44元

前　言

随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计已广泛地应用于科学研究、工农业生产和国民经济各个领域之中，因此国内各高校甚至中专的许多系科，都把概率论与数理统计列为必修课程，根据校内外一些系科，特别是经济类各专业开设这门课的需要，我们编写了这本教材，内容以介绍概率论和数理统计的基本知识和方法为主。有些定理、公式省略了严格的数学推导和证明，在内容取舍，例题、习题的选配方面，尽量联系经济管理、工程技术和工农业生产的实际问题，叙述力求简明扼要，突出重点。所需时间约50～70学时，在学时较紧的情况下，“矩与矩母函数”、“方差分析”等内容可略去不讲。

本书由周城璧主编，韩泽编写概率部分和质量管理一章，钟丽华编写数理统计的前五章。

在编写过程中，杨秀清、谢勉忠等同志提供过宝贵的意见，谨在此致谢。

由于编者水平有限，一定存在不少缺点、错误，希望读者批评指正。

目　　录

概率部分

第一章　随机事件及其概率

第二章　随机变量与概率分布

第三章　随机变量的数字特征

第四章　几种常用的分布

数理统计部分

第五章　抽样分布

第六章　参数估计

第七章　假设检验

概 率 论 部 分

概率论是一门研究随机现象数量规律的数学学科。它已广泛应用于科研、军事、工农业生产和管理决策等领域。Laplace曾说：人们生活中最重要的问题，其中占绝大多数的，实际上只是概率的问题。

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

一、随机试验与样本空间

例 1　某种新产品投放市场，可能面临失败、勉强成功、基本成功等结果，事先无法准确断定会出现哪种结果。

例 2　从一批产品中任意抽检 5 件，其中次品的件数可能为 0、1、2、3、4、5.

例 3　农作物由于受气候及其他因素的影响，其产量在收获前不能正确预言。

例 4　一小时内光顾某商店的人数；一分钟内，某电话总机接到呼唤次数，事先不能正确判断

以上现象的共同特点是：在一定条件下，可能出现哪些结果是清楚的，但会出现哪一种结果无法准确预言，呈现一种偶然性。我们把这种现象称为**随机现象**。

在概率论中，把对随机现象进行的观察或试验，称为**随机试验**，简称**试验**，常用字母E表示。

随机试验中出现的各种可能结果称为试验的基本结果。

显然，随机试验具有两个或两个以上的基本结果，而且事前

不知哪个结果会在试验中出现。

随机试验的基本结果，常常可以按不同方法来定义，这取决于研究的目的。

例 5 从一批产品中任意抽测一件产品是一个随机试验，如果研究的目的仅是对产品是正品或是次品的情况进行考察，试验只有两种基本可能（抽得正品和抽得次品）。如果研究的目的是考察产品是一等品，二等品或等外品，则试验就有三种基本可能结果。

定义1.1 随机试验的各种不同的可能结果称为基本结果。记为ω. 试验的全体基本结果的集合，称为试验的**样本空间**，记为Ω. 基本结果属于样本空间，又称为**样本点**。

在例 2 中，用ω_i表抽检的 5 件产品中有i件次品（i＝0、1、2、3、4、5），则样本空间$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

基本结果（样本点）在一次试验中不会同时出现，每次只能出现基中的一个。

二、随机事件

有了样本空间的概念，我们可以给随机事件一个数学表述。

定义1.2 样本空间Ω的某个子集称为**随机事件**，简称**事件**。通常用大写字母A、B、C表示。

对于同一个样本空间，可以定义许多事件。

在例 2 中，若以A表示事件："抽得的 5 件产品中含有次品"，则$A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

B表示事件："5 件产品中不含次品"，则$B=\{\omega_0\}$

C："5 件产品中次品不多于 3 件"，则$C=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

通常，把只含一个样本点的事件称为**基本事件**；把含两个或两个以上样本点的事件称为**复合事件**。

对于一个样本点ω而言，要么属于A，要么不属于A，二者必居其一。若ω发生，且$\omega\in A$，则说事件A发生。反之，若A发生，则意味着A所包含的某一个样本点恰在试验中出现了。

由此可知，包含所有样本点的事件Ω在每次试验中必然发生，称为**必然事件**。类似的，把不包含任何样本点的集合（空集Φ）也当作一个事件，对试验而言，它是一定不会发生的事件，称为**不可能事件**。把必然事件Ω和不可能事件Φ看成随机事件的特殊情形，对今后的讨论是方便和必须的。

三、事件的关系及运算

通过简单事件的概率计算复杂事件的概率是概率论的重要课题之一，因此有必要研究事件的关系与运算。

（1）**包含**：若事件A发生必然导致事件B发生，即A中的每一个样本点都含于B中，称事件B包含事件A，或A含于B，记为$B\supset A$或$A\subset B$。

例如　$A=\{\omega_0,\ \omega_1\}$

$B=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_3\}$

则　$A\subset B$

显然，$\Phi\subset A\subset\Omega$

若事件A包含事件B，事件B也包括事件A，即$A\supset B$且$B\supset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$

（2）事件的**积**（交）：两个事件A与B同时发生，这一事件，称为事件A与B的积。它是由A、B所有公共样本点构成的集合，记为AB或$A\cap B$。

例如　$A=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$：“次品不多于3件”

$B=\{\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5\}$：“次品不少于2件”

则$AB=\{\omega_2,\ \omega_3\}$：“次品恰为2件或3件”

（3）事件的**和**（并）：两个事件A和B中至少有一个发

生，这一事件称为A与B的和，它是由A与B的所有样本点构成的集合，记为$A+B$或$A\cup B$.

例如　$A=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$：“次品不超过两件”

$B=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$：“次品件数不少于1，不大于4”

则$A+B=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$：“次品件数不超过4”

（4）**事件的差**：事件“A发生而B不发生”称为事件A与事件B的差，它是由属于A但不属于B的那些样本点构成的集合，记为$A-B$.

例如　$A=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$B=\{\omega_0, \omega_2\}$

则$A-B=\{\omega_3, \omega_4\}$

（5）**互斥事件**：如果A与B不能同时发生，即$AB=\Phi$，称事件A与B互斥，或互不相容。显然基本事件是互斥的。

（6）**对立事件**：事件“非A”称为A的对立事件，它是由样本空间中不含于A的所有样本点构成的集合。记作$\overline{A}$.

例如　若$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$

$A=\{\omega_0\}$

则$\overline{A}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$

如果$B=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

则$\overline{B}=\{\omega_0, \omega_2, \omega_4\}$

显然，$A\overline{A}=\Phi$，$A+\overline{A}=\Omega$，$\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$.

（7）**完备事件组**：若事件A_1，A_2，……，A_n两两互斥，且$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=\Omega$，则$A_1$，$A_2$，……，$A_n$构成一个完备事件组。

用直观的Venn图（图1—1）表示事件的关系与运算如下：

$\overline{A+B}$

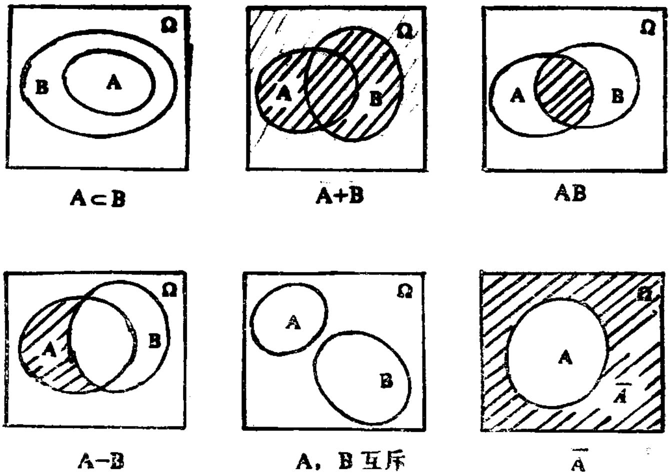

图1—1

事件的和与积的概念还可以推广到多于两个事件的情形。

根据以上定义，可以验证下述法则成立：

1） **交换律**：$A+B=B+A$，$AB=BA$

2） **结合律**：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$

3） $A-B=A\overline{B}$

4） **对偶律**：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

一般：$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

例1 A和B是两个事件，则$A+B=A+(B-AB)$。其中，A与$B-AB$是互斥的，因为$B-AB=B\overline{AB}=B(\overline{A}+\overline{B})=B\overline{A}+\Phi=B\overline{A}$，故$A\cap(B-AB)=\Phi$，且$AB\subset B$.

显然，还有 $A+B=A\overline{B}+B\overline{A}+AB=A+\overline{A}B$

形式上$A+B$要简单些，但等式右端的各和项事件是两两互斥的。把事件分解成互斥事件之和在概率论中经常用到。

例2 事件A_k表示第k次取到正品（$k=1，2，3$），则三次中至少一次取得正品：$A_1+A_2+A_3$；三次中至多一次取得正品：$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_3$；第二次未取得正品：$\overline{A}_2$；第二次取得正品而第三次未取得正品：$A_2-A_3=A_2\overline{A}_3$；前两次均未取得正品：$\overline{A_1+A_2}=\overline{A}_1\overline{A}_2$；后两次至少一次未取得正品：$\overline{A}_3+\overline{A}_2=\overline{A_2A_3}$.

§1.2 概　　率

实际上，在生活和生产的各方面，人们早已自觉不自觉地运用概率的思想。比如要发射一颗卫星，成功的把握多大；研制一种新药，临床有效率多高；向某项工程投资，风险多大等，决策者事先都必须进行研究与估计。这里的“把握”、“有效率”、“风险”其实就是概率的同义词。

简单地说：概率是事件发生的可能性大小的数量刻划。

一、概率的古典定义

最简单也是最早被研究的随机试验是掷骰子一类的碰运气的机会游戏，它们具有下列两个特点：

（1）试验的全部可能结果只有有限个，或称基本事件个数有限。

（2）每次试验中，各基本事件出现的可能性相同。

掷一枚骰子，可能结果为出现1，2，3，4，5，6六种不同点数。由于构造的均匀对称性，显然，每钟点数出现是等可能的。

在概率论中，把具有上述两个特点的试验叫做古典试验，它的数学模型称为**古典概型**。

在古典概型中，事件的概率可以按照下面的定义直接计算。

概率的古典定义：在古典概型中，若基本事件总数为n，任意事件A包含m个基本事件，则事件A的概率

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

例1 100000个储户分别持有编号为000001——100000对奖单中的一张，开奖时，号码的个位数字与摇奖机第一次摇出的号码相同者获三等奖，末两位数字与两次摇奖号码对应相同者获二等奖。末三位数字与三次摇奖号码对应相同者获得一等奖，求每储户获1，2，3等奖的概率。

解：对奖号码个位数字只有0，1，……，9这十种可能。每个数被摇奖机摇中的机会均等，属于古典概型。只有一个数字获奖。

所以，P（获三等奖）=1/10

类似，两次摇奖 数字有100种可能，只有一种获奖，故P（获二等奖）=1/100

同理，P（获一等奖）=1/1000

例2 设20台同型冰箱中16台一级品，4台二级品，在运输过程中损坏两台，求下列事件的概率。

（1）损坏的两台均为二级品。记为A

（2）损坏的是一台一级品、一台二级品。记成B

解：由于型号及运输状况基本相同，可以认为任意两台被损坏的可能性相等。

基本事件总数为：C_{20}^{2}

（1）两台均为二级品共有C_4^2 种可能，即A含C_4^2 个基本事件。所以 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_{20}^2}=\frac{6}{190}=0.0316.$

（2）B含基本事件数 为C_{16}^1。C_4^1

所以 $P(B)=\frac{C_{16}^1C_4^1}{C_{20}^2}=\frac{64}{190}=0.3368$

例3 袋中有a个白球，b个彩球，从中逐一不放回 摸 出，问第k次摸得彩球的概率（$k=1, 2, \cdots\cdots, a+b$）

解：设A_k表示“第k次摸得彩球”

设想，每个球被编号因而可分辨；摸出后依次排列在$a+b$个空格内。于是每一种排列即对应着试验的一个结果，共 有（$a+b$）！个不同结果。

现考察A_k：第k个空格内可以是b个彩球中的任 何一个，其余$a+b-1$个球在其余$a+b-1$个空格内任意排列 着，共 有

C_b^1 （$a+b-1$）！种不同状况。所 以 有

$$P(A_k)=\frac{C_b^1\ (a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b}$$

注意这个概率与k无关。若将球换成签，即翻版成抽签问题。正好说明中彩与抽签先后次序无关，所以抽签不必争先恐后。

就古典概率来说，容易证明下列三个性质：

性质1 $P(A)\geqslant 0$，非负性；

性质2　$P(\Omega)=1$，规范性；

性质3　若A、B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$可加性。

古典概型在概率论中占有重要地位。一方面，由于它简单，有助于理解概率论中的一些基本概念；另一方面，它在产品的抽样检验等实际问题及理论物理的一些理论研究课题等方面都有重要应用。

但是，等可能的限制具有很大的局限性，一些实际问题往往不具备等可能性。比如某商店一天内接待的顾客人数，或一个月的销售额，不仅基本结果数不是有限个，同时也非等可能。因此，必须寻求事件概率更一般的定义。

二、概率的统计定义

在长期的实践中，人们发现随机事件A虽然在一次试验中可能发生，也可能不发生，呈现一种偶然性，但在大量的重复试验、观察中，它发生的频率却具有稳定的特性。

具体地说，在n次重复试验中，A发生了m次，则当n无限增大时，频率$F_n(A)=m/n$总是稳定的在某个数值附近摆动。

下面列举体现频率稳定性的一些著名例子。

例4　抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，事先无法作出准确的判断。但若是均匀的硬币，我们有理由认为正、反面出现的可能性应该几乎一样大，在大量抛掷中，其频率都应接近50%，为了验证这一点，历史上曾有不少人做过试验，其结果如下表：

表1—1

实 验 者	抛掷次数n	出现正面次数m	频率m/n
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

可以看出，不管什么人去抛，当试验次数逐渐增多时，出现正面的频率总是在0.5附近摆动逐渐稳定于0.5，这个数字反映了正面出现的可能性的大小。

例5　任取一本英文书，翻到任意一页，任意指定一行及该行中任意一个字母，大量重复这一试验，发现26个英文字母及空格（包括标点符号）被使用的频率相当稳定，下表是人们经过大量试验后得出的

表1—2

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S	H	D
频率	.2	.105	.072	.0654	.063	.059	.055	.054	.052	.047	.035

字母	L	C	F	U	M	P	Y	W	G	B
频率	.029	.023	.0225	.0225	.021	.0175	.012	.012	.011	.0105