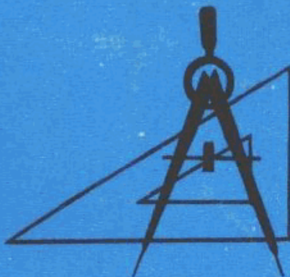
ZHONGXUESHUXUE



中学复习资料

数学

郧阳地区中小学教学教材研究室翻印

中学数学复习资料（下册）

目　　录

平面三角部分

第一章　三角函数的概念及其性质 ……………………389
第二章　加法定理 ……………………………………414
第三章　解三角形 ……………………………………434
第四章　反三角函数与三角方程 ……………………444

平面解析几何部分

第一章　直线与元 ……………………………………461
第二章　二次曲线 ……………………………………477
第三章　极坐标 ………………………………………505
第四章　参数方程 ……………………………………520
第五章　坐标变换 ……………………………………532

平 面 三 角 部 分

第一章　三角函数的概念及其性质

三角函数是基本初等函数之一，是典型的周期函数，它不仅是进一步学习的重要基础知识，而且在科学技术和生产实践中有着广泛的应用．本章包括三角函数的定义和它的性质、角度与弧度的互化、周期函数的概念等．这些内容都是研究三角函数的基础．因此对于三角函数的定义和有关名词的意义要搞清楚，对有关公式和性质要记熟会用．

一、锐角三角函数

1．锐角三角函数的定义

在直角三角形 ABC 中，$C=90°$，a、b、c 分别表示角 A、B、C 的对边（如图），取任何两条边的比就得到锐角 A（对另一锐角 B 也一样）的下列六个三角函数．

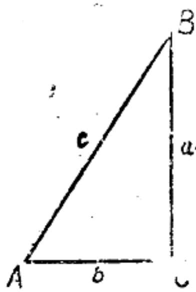


图 212

$$\sin A=\frac{a}{c}\left(=\frac{对边}{斜边}\right)\quad \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}\left(=\frac{斜边}{对边}\right)$$

$$\cos A=\frac{b}{c}\left(=\frac{邻边}{斜边}\right)\quad \sec A=\frac{c}{b}\left(=\frac{斜边}{邻边}\right)$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}\left(=\frac{对边}{邻边}\right)\quad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}\left(=\frac{邻边}{对边}\right).$$

2．特殊锐角的三角函数值

特殊锐角 30°、45°、60° 的三角函数值经常要用到，务必

记熟．根据锐角三角函数的定义，应用勾股定理和我们画图用的锐角为 30° 或 45° 的一付直角三角板（如下图），可很快写出这些角的三角函数值，如下表：

角 α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

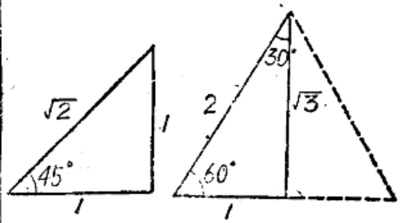


图 213

二、任意角的三角函数

1．角与它的度量

（1）任意角的概念　我们把角理解为平面上的一条射线绕着它的端点任意旋转而形成的旋转量．旋转开始位置的一边叫角的始边；旋转终了位置的一边叫角的终边．由于射线旋转的方向有所不同，我们规定：按照反时针方向旋转所形成的角叫正角；按照顺时针方向旋转所形成的角叫做负角．为了便于研究，我们把角的顶点和坐标原点重合，始边和 x 轴的正方向重合，那末角的终边旋转到哪一象限内，它就叫做这个象限的角 α，和角 α 终边相同的一切角，可写成 $k\cdot 360°+\alpha$．（k 为整数）至于终边在坐标轴上，如 0°，90°，−90°，−180°等，一般地用 $k\cdot 90°$（k 为整数）表示，称象限间的角．

（2）角与弧的度量　常用的有以下两种．

角度制是把等于整个圆的$\frac{1}{360}$的弧叫做含有1°的弧，而1°弧所对的圆心角叫做1°的角。

$$1^\circ=60',\quad 1'=60''$$

弧度制，把等于半径长的弧叫做含有1弧度的弧，而1弧度的弧所对的圆心角叫做1弧度的角。

任何一个角度都可用一个实数来表示。

(3) 角度与弧度的换算

因为 $1\text{周角}=360^\circ=\frac{2\pi R}{R}\text{弧度}=2\pi\text{弧度}$

所以 $180^\circ=\pi\text{弧度}$

由此可得 $1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx0.017453\text{弧度}$

$$1\text{弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57^\circ17'44.8''$$

(4) 圆心角、半径与弧长三者关系

半径(R)×圆心角的弧度数(Q)=弧长(L)

即 $L=RQ$，由此可知 $Q=\frac{L}{R}$，$R=\frac{L}{Q}$。

2、任意角的三角函数的定义

(1) 坐标法定义 用角α的顶点O为原点，角α的始边在X轴的正方向，在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，设原点O到P点的距离为r，那末，不论$P(x,y)$在哪一个象限，横坐标x、纵坐标y和距离r三个量，两两组成的六个比，就叫做角α的三角函数(注)。

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}$，　$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}$，

$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，　$\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{r}{y}$。

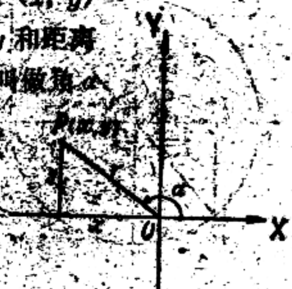


图 214

〔注〕可以证明，这些比的比值的大小决定于角 α 的大小，与 P 点在终边上的位置无关. r 是 OP 的绝对值，常取正值，坐标 (x, y) 的符号由 P 点所在的象限决定，其中 α 为自变量（角度或弧度），比值为 α 的函数.

锐角三角函数是任意角的三角函数的特殊情形.

(2) 三角函数线的表示 以直角坐标系的原点为圆心，单位长为半径作圆，这个圆叫做单位圆. 三角函数的值也可用单位圆中线段的量数连同它的符号来表示.

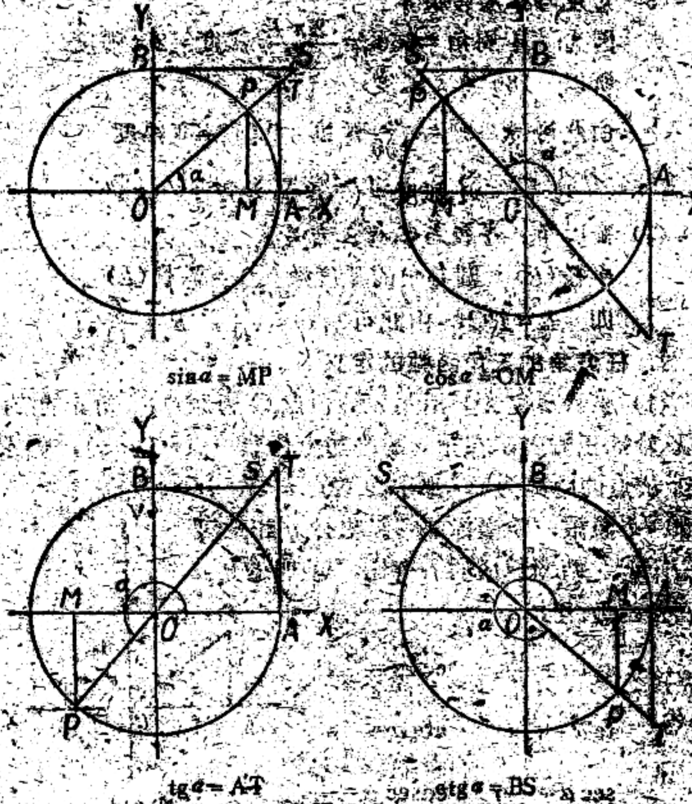
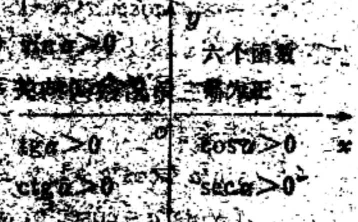


图 215

3. 三角函数值的符号

因为坐标定义三角函数中的r值为正值，所以角α的三角函数值的正负是按照点的坐标的正负来决定，用右图帮助记忆，其中没有写出来的函数均为负值.



4. 三角函数值的变化及其范围

角α从0到2π时，各三角函数值的变化如下表：

α	$0°$		$90°$		$180°$		$270°$		$360°$
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
$\sec\alpha$	1	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	−1	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	1
$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	−1	↘	$-\infty$

上表中箭头↗表示变化的方向，±∞不是一个值，它表示变化的趋向，由上表知，不论α取什么值，总有：

$|\sin\alpha|\leqslant 1$，　$|\cos\alpha|\leqslant 1$；

$-\infty<\mathrm{tg}\,\alpha<\infty\ (\alpha\neq n\pi\pm\frac{\pi}{2}$，$n$为整数)，

$-\infty<\mathrm{ctg}\,\alpha<\infty\ (\alpha\neq n\pi$，$n$为整数)；

$-\infty<\sec\alpha\leqslant -1$ 或 $1\leqslant\sec\alpha<\infty$. $(\alpha\neq n\pi\pm\frac{\pi}{2}$，$n$

为整数)

$-\infty < \operatorname{cosec}\alpha \leqslant -1$ 或 $1 \leqslant \operatorname{cosec}\alpha < \infty$. ($\alpha \neq n\pi$, n 为整数)

5. 同角三角函数间的关系

平方关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha,$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

倒数关系：

$$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1, \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1, \quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

商的关系：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

对任何使函数有意义的角 α，以上八个关系式都成立. 使用平方关系公式时，要看 α 角所在的象限才能决定符号的选择. 如 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，若 α 角在第一、二象限取"正"，在三、四象限取"负".

下面的图形，可帮助记忆这八个公式，记法如下：

① 有线条的倒三角形上面两角顶的函数的平方和等于第三角顶的函数的平方. 如

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

② 边上任一角顶之函数等于它两边相邻二角顶之函数的乘积.

如 $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

③ 对角线两端函数之积等于1. 如 $\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$.

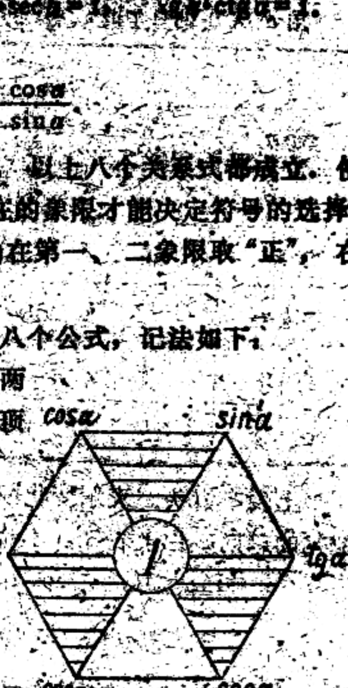


图 216

6. 诱导公式（化任意角三角函数为锐角三角函数的公式）

$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ\pm\alpha$（$90^\circ\pm\alpha$，$270^\circ\pm\alpha$）的三角函数的值，等于α的同函数（相应余函数）的值，放上把α看作锐角时，原函数在相应象限内的符号。如：

$$\sin(180^\circ\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ\pm\alpha)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

记忆方法：奇变偶不变，符号看象限。

7. 三角函数的基本性质

三角函数的基本性质，对研究三角函数很重要，对作三角函数图象也有很大的帮助。可从以上4，5，6中归纳得出下表：

三角函数	增减性（象限）				有界性	奇偶性	周期性
	一	二	三	四			
$\sin\alpha$	增	减	减	增	有界 $\lvert\sin\alpha\rvert\le1$	奇 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	周期 2π
$\cos\alpha$	减	减	增	增	有界 $\lvert\cos\alpha\rvert\le1$	偶 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	周期 2π
$\mathrm{tg}\alpha$	增	增	增	增	无界	奇 $\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$	周期 π
$\mathrm{ctg}\alpha$	减	减	减	减	无界	奇 $\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$	周期 π

8. 三角函数的图象

三角函数的图象能较直观地反映函数的性质。作图象一般采用坐标法或单位圆几何作图法两种。作图时，纵轴和横轴上的单位长尽可能取得一致，自变量（角）应采用弧度制。关于形如$y=A\sin(\omega x+\alpha)$等的三角函数周期的求法，是把基本三角函数的周期除以自变量的系数，如$y=A\sin(\omega x+\alpha)$的周期是$\frac{2\pi}{|\omega|}$。为了加深理解，特把基本正弦函数$y=\sin x$的图象与其他形式的正弦函数图象间的关系归纳如下表：

图象变换
- 形状变换
  1. $y = A\sin x\ (A>0)$ 的图象，可由 $y=\sin x$ 的图象的振幅扩大 A 倍而得到；
  2. $y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的图象，可由 $y=\sin x$ 的图象向 y 轴压缩 ω 倍而得到（周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$）。
- 位置变换
  1. $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴的方向左、右平移 $|\varphi|$ 个单位而得到（当 $\varphi>0$ 时向左，$\varphi<0$ 时向右）；
  2. $y=\sin x+k$ 的图象，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 y 轴的方向上、下平移 $|k|$ 个单位而得到（当 $k>0$ 时向上，$k<0$ 时向下）。

例　题

例 1 已知飞轮的半径是1.2米，每分钟旋转300次。

(1) 求飞轮每秒的角速度 ω。

(2) 求轮周上一点的速度 v。

解 (1) 飞轮每秒旋转的弧度数，叫角速度。

$$\therefore\ \omega=\frac{2\pi\times300}{60}=10\pi\ (\text{弧度/秒}).$$

(2) 飞轮上某点的速度 v 是线速度。

$$\therefore\ v=\frac{2\pi\times1.2\times300}{60}=12\pi\ (\text{米/秒})\approx37.70\ (\text{米/秒}).$$

例 2 脱粒机上传动轮的半径是22.5厘米，电动机主动轮的半径是12.5厘米，它们的圆心间的距离 OO' 是4米，求直接传动装置传动皮带的长。

解 如图，设 $\angle COO'=\alpha$，

厘米

$$\sin\alpha=\frac{CO'}{OO'}=\frac{10}{400}=0.025$$

$$\alpha=1^\circ26'$$

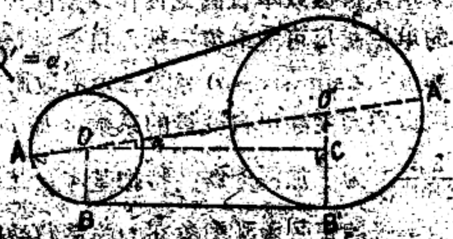


图 217

$\angle A'O'B' = 90° + \alpha = 91°26'$,

$\angle AOB = 90° - \alpha = 88°34'$.

设传动皮带的长是 l 厘米，那末

$l = 2\overset{\frown}{AB} + 2BB' + 2\overset{\frown}{B'A'}$.

$\overset{\frown}{AB} = 12.5 \times 88\frac{34}{60} \times \frac{\pi}{180} \approx 19.3$,

$\overset{\frown}{B'A'} = 22.5 \times 91\frac{26}{60} \times \frac{\pi}{180} \approx 35.9$,

$BB' = OC = 400 \times \cos 1°26' = 400 \times 0.9997 \approx 399.9$.

$\therefore\ l = 2 \times (19.3 + 35.9 + 399.9) \approx 910$(厘米).

例 3 比较大小。

(1) $\sin 100°$ 与 $\cos 100°$；

(2) $\cos 1$ 与 $\cos 1°$；

(3) $\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\beta$ ($\alpha > \beta$ 且在同一象限内)。

解 (1) $\because$ 在第二象限正弦值为正，余弦值为负，

$\therefore\ \sin 100° > \cos 100°$.

(2) $\because$ 1 弧度 $= \frac{180°}{\pi}$，而 $90° > \frac{180°}{\pi} > 1°$，又在第一象限余弦为减函数，$\therefore\ \cos 1 < \cos 1°$.

(3) $\because$ 在四个象限内的正切都为增函数，

又 $\because\ \alpha > \beta$ 且在同一象限内，$\therefore \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$.

例 4 求同时适合于 $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\alpha \leq -1$ 的角 α ($0° < \alpha < 360°$).

解 $\because\ \sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$，而 $\sin\alpha$ 在第一象限是增函数，在第二象限是减函数，$\therefore\ 90° < \alpha \leq 150°$.

又 $\because\ \operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg} 315° = -1$，而 $\operatorname{tg}\alpha$ 在四个象限内都是增函数，$\therefore\ 90° < \alpha \leq 135°$.

或 $270°<\alpha\leqslant315°$.

由此，所求的角的范围是 $90°<\alpha\leqslant135°$.

例 5 在第一、二象限中，使 $\sin\alpha=\dfrac{2m-3}{4-m}$ 有意义，求 m 的值的范围.

解 在第一、二象限中，要使 $\sin\alpha$ 有意义，必须 $0\leqslant\dfrac{2m-3}{4-m}\leqslant1$.

$$故\begin{cases}\dfrac{2m-3}{4-m}\leqslant1,\\ \dfrac{2m-3}{4-m}\geqslant0.\end{cases}$$

$$即\begin{cases}\dfrac{3m-7}{4-m}\leqslant0, & (1)\\ \dfrac{2m-3}{4-m}\geqslant0. & (2)\end{cases}$$

由 (1)，得

$$\begin{cases}3m-7\geqslant0,\\ 4-m<0;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}3m-7\leqslant0,\\ 4-m>0.\end{cases}$$

$$即\begin{cases}m\geqslant2\dfrac{1}{3},\\ m>4;\end{cases}$$

$$或\begin{cases}m\leqslant2\dfrac{1}{3},\\ m<4,\end{cases}$$

得 $m>4$，或 $m\leqslant2\dfrac{1}{3}$.

由 (2)，得

$$\begin{cases}2m-3\geqslant 0,\\4-m>0;\end{cases}$$

或$\begin{cases}2m-3\leqslant 0,\\4-m<0.\end{cases}$

即$\begin{cases}m\geqslant 1\frac{1}{2},\\m<4;\end{cases}$

或$\begin{cases}m\leqslant 1\frac{1}{2},\\m>4\end{cases}$ （矛盾）

得 $1\frac{1}{2}\leqslant m<4.$

使(1)，(2)同时成立，必须 $1\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2\frac{1}{3}$.

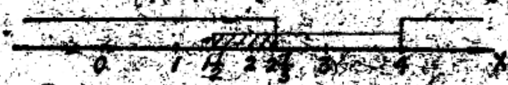


图 218

例 6 化简：

(1) $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}$；

(2) $\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$；

(3) $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\sec^2\alpha-1}$；

(4) $\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$, $\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\right)$

解 (1) 原式 $=\sqrt{\cos^2 100^\circ}=-\cos 100^\circ=\cos 80^\circ$;

(2) 原式 $=\sqrt{\sin^2 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\cos^2 10^\circ}$

$=\sqrt{(\sin 10^\circ-\cos 10^\circ)^2}$

$=-(\sin 10^\circ-\cos 10^\circ)$ $(\because \cos 10^\circ>\sin 10^\circ)$

$=\cos 10^\circ-\sin 10^\circ$.

(3) 原式 $=\cos\alpha\cdot\csc\alpha\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

对于第一、三象限的角 α,

原式 $=\cos\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=1$;

对于二、四象限的角 α,

原式 $=\cos\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)=-1$.

(4) 原式 $=\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

当 α 在第一象限时,

原式 $=\dfrac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1+2=3$;

当 α 在第二象限时,

原式 $=\dfrac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=-1-2=-3$;

当 α 在第三象限时,

原式 $=\dfrac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-1+2=1$;

当 α 在第四象限时，

原式 $=\dfrac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{-\mathrm{tg}\,\alpha}=1-2=-1.$

例 7 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，求 α 的其他各三角函数值.

解 $\because$ $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}<0$，

$\therefore$ α 在第三、四象限.

若 α 在第三象限，

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\sqrt{3}$.

若 α 在第四象限，

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=-\sqrt{3}$.

例 8 已知 $\mathrm{tg}\,\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{4\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$；

(2) $\dfrac{2}{3}\sin^2\alpha+\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha$.

解 (1) 原式 $=\dfrac{4-\mathrm{tg}\,\alpha}{2+3\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{4-2}{2+3\times2}=\dfrac{1}{4}$；

(2) 原式 $=\dfrac{\dfrac{2}{3}\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{4}}{\sec^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{2}{3}\times4+\dfrac{1}{4}}{1+4}=\dfrac{7}{12}$.

例 9 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，计算：

(1) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；

(2) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

解 (1) $\because\ \sin\alpha+\cos\alpha=m$，

$\therefore\ (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$，

得 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$.

(2) $$原式=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{2}{m^2-1}.$$

(3) $$原式=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$=1-2\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1+2m^2-m^4}{2}.$$

例 10 $0\leqslant\alpha<360^\circ$ 当 α 为何值时，下列函数有极值.

(1) $y=1+\sin x$；

(2) $y=1-2\sin^2x+4\cos x$.

解 (1) 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x=1$，$y_{最大值}=2$；

当 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x=-1$，$y_{最小值}=1-1=0$，

(2) $y = 1 - 2\sin^2 x + 4\cos x$

$= 2\cos^2 x + 4\cos x - 1$

$= 2(\cos x + 1)^2 - 3$。

当 $x = 0°$ 时，$y_{极大值} = 5$；

当 $x = 180°$ 时，$y_{极小值} = -3$。

例 11 求证：(1) $\sqrt{(\sec^2\alpha - 1)(1 - \sin^2\alpha)} = |\sin\alpha|$；

(2) $\dfrac{1 + 2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \dfrac{1 + \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg} A}$；

(3) $\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)^2$；

(4) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)} + \dfrac{\sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha)}$

$= 1$。

证明 (1) $\sqrt{(\sec^2\alpha - 1)(1 - \sin^2\alpha)}$

$= \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$

$= \sqrt{\sin^2\alpha}$

$= |\sin\alpha|$；

(2) $\dfrac{1 + 2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$

$= \dfrac{\sin^2 A + 2\sin A\cos A + \cos^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$

$= \dfrac{(\sin A + \cos A)^2}{(\cos A - \sin A)(\cos A + \sin A)}$

$= \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sin A}{\cos A}}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}}$，