華夏英才基金學術文庫

康庆德 著

组合学笔记

科学出版社
www.sciencep.com

華夏英才基金學術文庫

组合学笔记

康庆德　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统阐述组合学的经典理论和方法，详细介绍了递归关系、母函数、容斥原理等计数工具以及整数分拆、Hall 定理和 Ramsey 理论，着重介绍了几类重要的组合数和 Pólya 理论，并对线性不定方程、组合恒等式、图标号、幻方以及铺砌、覆盖与剖分等给出了相当的论述. 全书深入浅出、条理清晰、结论严谨，具有一定的广度和深度，并选用了适量的趣味问题和应用实例，列出了一些前沿性结论和有待探讨的问题.

本书可作为数学与应用数学专业的高年级本科生、研究生及教师的教材或教学参考书，也可供相关专业的科研人员或广大数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合学笔记/康庆德著. —北京：科学出版社，2009
(华夏英才基金学术文库)
ISBN 978-7-03-023876-4
Ⅰ. 组… Ⅱ. 康… Ⅲ. 组合数学 Ⅳ. O157
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 001446 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2009 年 5 月第一次印刷 印张：21
印数：1—2 500 字数：410 000

定价：65.00 元

前　言

组合数学 (combinatorial mathematics), 或称组合论 (combinatorial theory)、组合学 (combinatorics), 是一门既古老又年轻的数学分支, 其渊源可以追溯到公元前 2200 年左右的大禹治水时代. 中外历史上许多著名的数学游戏是组合数学古典部分的主要内容. 20 世纪中叶以来, 计算机科学、数字通信、企业管理和实验设计等方面的需求极大地推动和刺激了组合数学的发展, 使它焕发了青春, 以前所未有的速度发展和壮大起来.

现代数学可以分为两大门类: 一类是研究连续对象的连续数学, 以数学分析为核心; 另一类则是研究离散对象的离散数学, 以组合数学为核心. 由于离散对象的处理是计算机科学的核心，研究离散对象的组合数学在计算机出现以后得到了迅猛的发展. 按照当代数学界的观点, 连续数学和离散数学这两大门类中, 后者的重要性正在上升, 并将取代前者而成为主流. Birkhoff 说: “对代数系统的系统结构的研究终将让位于对离散系统的关系结构的研究.” Halmos 说: “在不久的将来，离散数学对我们的研究工作，对了解世界将成为一个重要的工具. 相反，分析 (连续数学) 则只会起到次要的作用了.” Gelfand 则指出: “几何学和组合数学将是 21 世纪数学研究的前沿领域.”

今天, 组合数学与许多数学分支已有了相当多的联系和交叉, 在基础数学研究中的地位也越来越重要. 不仅如此, 组合数学在计算机科学、编码和密码学、物理学、化学、生物等学科中, 以及企业管理、交通规划、战争指挥、金融分析、城市物流等领域中也有着重要的应用. 它的思想、方法和理论已受到人们的高度关注, 必将在科学技术与社会发展的诸多方面展现出更多的效应, 产生日益深刻的影响.

吴文俊院士指出:“每个时代都有它特殊的要求，使得数学出现一个新的面貌，产生一些新的数学分支.”而以全球信息化为时代特征的 21 世纪带给数学的变革将是: 作为信息技术、软件产业基础的组合数学势必异军突起，显示出越来越重要的作用. 近年来，组合数学在国际上颇受重视, 发展十分迅速. 相比之下, 国内尚力量较弱, 急需大力培养人才, 建设队伍, 提高水平. 在教育界与学术界有识之士的合力推动下, 离散问题作为科学前沿问题已被列入 “国家中长期科学和技术发展规划纲要 (2006—2020)” 中.

组合数学的研究对象是构形 (configuration), 亦称组态, 即某种离散对象满足一定条件的安排. 所研究的主要内容是: 构形的存在与性质、计数与分类、构作与枚举、算法与优化. 它包含以下一系列分支: 组合计数 (combinatorial enumeration)、组合设计 (combinatorial design)、组合优化 (combinatorial optimization)、图论 (graph theory)、组合算法 (combinatorial algorithm)、码论 (coding theory)、代数组合学 (algebraic combinatorics)、组合矩阵论 (combinatorial matrix)、组合几何学 (combinatorial geometry)、组合集合论 (combinatorial sets)、组合拓扑学 (combinatorial topology)、字的组合 (combinatorics on words)…… 组合数学四千多年的发展历史可概括为以下四个阶段 (包括典型事件和人物):

起源阶段 (公元前 2000 年 — 公元 1665 年):

公元前 2200 年 (大禹治水时代), 洛书;

公元前 1100 年, 排列;

贾宪、杨辉、Pascal 1100–1665, 组合、二项式系数.

初创阶段 (1666–1900):

Leibnitz, Disertatio de Arte Combinatoria(1666);

de Moivre(1730), Euler, Laplace, 母函数 (生成函数);

Euler(1736), Könisberg 的七桥问题;

Euler(1779), 36 军官问题;

Legendre, Jordan(1798), 容斥原理;

Kirkman(1847), Sylvester, Cayley, 15 个女学生问题;

Hamilton(1859), 周游世界问题;

Lucas(1891), 夫妇问题.

成长阶段 (1901–1965):

Netto(1901), 《组合学教程》;

MacMahon(1916), 《组合分析》;

Ramsey(1930), Ramsey 理论;

Hall(1935), 婚配定理 (相异代表系理论);

Weisner, Hall(1936), Möbius 反演;

König(1936), 图论专著;

Pólya(1937), Pólya 计数定理;

Dilworth(1950), 偏序集分解定理;

Rota(1964), 广义 Möbius 函数及其反演.

复兴阶段 (1966–):

Journal of Combinatorial Theory 创办 (1966);

Hall(1967), *Combinatorial Theory* 问世;

Harary(1968), *Graph Theory* 问世;

Discrete Mathematics 创办 (1971).

本书共 13 章, 分为三部分. 第一部分包括 1–3 章, 全面概述了经典的组合计数方法, 并介绍了组合计数的两个主要工具 —— 递归关系和母函数; 第二部分包括 4–9 章, 以较大的篇幅详细介绍了几类重要的组合数以及容斥原理、整数分拆、Hall 定理、Ramsey 理论和 Pólya 理论; 第三部分包括 10–13 章, 对线性不定方程、组合恒等式、图标号、幻方以及铺砌、覆盖与剖分等分别进行了较充分的讨论. 附录中列出了组合学的有关名词符号.

本书是作者长期主讲本科生与研究生组合计数课程的积累, 具有一定的广度和深度. 其中一些章节还包含了作者的研究成果. 所列出的命题中, 基础性的重要结论都给出了严格的证明, 凡未给出证明的则多是囿于深度和篇幅. 为了顾及一些范畴中内容的系统性, 部分概念和结论可能会提前出现, 但这些都不致影响读者的阅读和理解.

本书可作为高等院校数学、计算机等专业本科生和研究生的教材, 也可供相关专业的教师和研究工作者阅读参考, 有一定数学素养的高中水平读者也可阅读本书的部分章节. 作者在撰写本书时力求做到条理清晰、论证严谨、深入浅出、结论明确, 以期既能使初学者在阅读本书的较浅显章节后逐步入门, 也能使有一定基础者在阅读本书的较深入章节后颇获裨益. 书中选取的趣味问题和应用实例足以使读者兴趣盎然, 而所列出的一些前沿性结论和有待进一步探讨的问题更可令读者追思求索. 当然, 限于能力与水平, 本书难免有不当之处, 敬请读者批评指正.

作者谨对毕全起老师在书稿打印工作中付出的辛劳和我的几位学生在校对核验中的帮助表示诚挚的感谢. 作者尤其要对爱妻王栋数十年如一日的关心、理解与支持表示由衷的谢意.

康庆德

2008 年 11 月于石家庄

目　录

第 1 章　基本计数法则与公式

组合理论被广泛认为是最引人入胜的数学分支. 这是由于它的双重性质: 包含所有抽象论证的最巧妙的证明, 亦有当代科学中最综合的应用领域.

—— Daniel I A Cohen

对于实数 x、整数 m,n 和正整数 k, 本书将采用以下符号:

下阶乘 $[x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$;
上阶乘 $[x]^k = x(x+1)\cdots(x+k-1)$;
下整数 $\lfloor x \rfloor = n$, 若 $n \leqslant x < n+1$;
上整数 $\lceil x \rceil = n$, 若 $n-1 < x \leqslant n$;

最近整数 $\langle x \rangle = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & 若\ x < \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil}{2}, \\ \lceil x \rceil & 若\ x > \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil}{2}; \end{cases}$

整数区段 $[m,n] = \{m, m+1, \cdots, n\}$, 其中整数 $m \leqslant n$;
间隔区段 $[m,n]_k = \{m, m+k, m+2k, \cdots, n\}$, 其中整数 m,n 模 k 同余;
正整数段 $I_n = [1,n]$, 其中未定义运算;
模 n 剩余类环 $Z_n = [0, n-1]$, 其中可进行模 n 的加法与乘法运算;
有限域 $F_q = F_p^t$, 其中 p 为素数, t 为正整数, $q = p^t$ 被称为素数幂;
有限集 X 中子集的全体 2^X, 其中 k 元子集的全体记为 $\dbinom{X}{k}$;
有限集 X 上无序对的全体 $\dbinom{X}{2}$, 有序对的全体 $[X]_2$.

1.1　基本计数法则

和则 (分组法, 加法原理): 如果做一件事的全部方法可分成互不相关的 k 类, 其中属于第 i 类的方法有 n_i 种 $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 则做这件事的方法共有 $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ 种.

积则 (分步法, 乘法原理): 已知做一件事要依次经过 k 个步骤, 而在已完成前面 $i-1$ 个步骤后再完成第 i 个步骤有 n_i 种方法 $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 则做这件事的方法共

有 $\prod_{i=1}^{k} n_i$ 种.

等则 (匹配法, 配对原理): 设 A, B 是两个有限集, 如果存在由 A 到 B 的一一映射, 则 $|A| = |B|$.

命题 1.1.1　整数 $n!$ 尾部零的个数 $= \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$.

证明　令 $n! = 2^\lambda 5^\mu m$, 其中 m 与 10 互素. 显然有 $\lambda \geqslant \mu$, 而 $n!$ 尾部零的个数 $= \min(\lambda, \mu) = \mu$. 进而不难得知 $\mu = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$. □

命题 1.1.2　n 元集的子集个数 $= 2^n$.

证明　对于 n 元集的一个子集 A 来说, n 元集的每个元都各自独立地有两种选择: 属于 A 或不属于 A. 从而由乘法原理可知结论. □

命题 1.1.3　若 n 的质因数分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$, 则 n 的正整数因子个数 $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(t_i + 1)$.

证明　n 的任一个正整数因子的质因数分解必形为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i}$, 其中 $0 \leqslant s_i \leqslant t_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. 且具有此种形式质因数分解的正整数必为 n 的因子, 故可建立以下一一对应:

$$\text{集合}\{n\text{的正整数因子}\} \longleftrightarrow \text{集合}\{(s_1, s_2, \cdots, s_k) : 0 \leqslant s_i \leqslant t_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

但后者按乘法原理可知计数为 $\prod_{i=1}^{k}(t_i + 1)$, 于是由配对原理知, 此计数即是 $\tau(n)$. □

命题 1.1.4　凸 n 边形的对角线在形内交点个数 $= \binom{n}{4}$.

证明　产生每个这种形内交点的两条对角线对应着它们的四个端点, 而凸 n 边形中的任意四个顶点可交错连弦产生一个形内交点. 于是, 这种形内交点的全体与凸 n 边形顶点集的 4 子集全体可建立一一对应. 由配对原理知, 前者的个数即是后者的个数, 而后者的个数是 $\binom{n}{4}$. □

1.2　基本计数公式 I: 排列组合

由 n 元集中取出 r 个元素来作安排时, 有表 1.2.1 所列诸情形:

表 1.2.1 经典排列组合

元可否重复	安排是否有序	计数公式	符号与说明
无重复元	无序	$\binom{n}{r}=\frac{[n]_r}{r!}$	n 元集的 r 组合 $C(n,r)$
无重复元	有序 (线形)	$[n]_r$	n 元集的 r 排列 $P(n,r)$
无重复元	有序 (圈形)	$\frac{[n]_r}{r}$	n 元集的圈形 r 排列 P_n^r
元可重复	无序	$\binom{n+r-1}{r}=\frac{[n]^r}{r!}$	n 元集的可重 r 组合 $F(n,r)$
元可重复	有序 (线形)	n^r	n 元集的可重 r 排列 $U(n,r)$
元可重复	有序 (圈形)	$\frac{1}{r}\sum\limits_{d\mid r}\varphi(d)n^{\frac{r}{d}}$	n 元集的可重圈形 r 排列 U_n^r

注：此表所列的各类安排即是最经典的排列组合问题，常被依序称为:

无重 (复) 组合, 无重 (复) 线形排列, 无重 (复) 圈形排列;

可重 (复) 组合, 可重 (复) 线形排列, 可重 (复) 圈形排列.

其中, 无重复元的三类排列组合计数公式及 $U(n,r)=n^r$ 都是熟知的, 而 $F(n,r)$ 与 U_n^r 的计数公式将分别在命题 1.2.1 与命题 5.5.9 中给出证明.

命题 1.2.1 不定方程 $\sum\limits_{i=1}^m x_i=n$ 的非负整数解组数$=F(m,n)=\binom{m+n-1}{n}$, 正整数解组数 $=F(m,n-m)$. 而此方程满足 $x_i\leqslant n_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的非负整数解组数为

$$\binom{m+n-1}{m-1}+\sum_{k=1}^m(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\binom{m+n-k-1-\sum\limits_{j=1}^k n_{i_j}}{m-1}.$$

证明 设有一个袋子, 其内装有 m 种不同色的球, 每种色的球数均 $\geqslant n$. 则由此袋中同时取出 n 个球的取法即是典型的可重复组合. 显然, 每一种这样的取法等价于方程 $\sum\limits_{i=1}^m x_i=n$ 的一组非负整数解. 故由表 1.2.1 可知

$$\text{不定方程 }\sum_{i=1}^m x_i=n\text{ 的非负整数解组数 }=F(m,n).$$

现在给出 $F(m,n)$ 的计数公式. 设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 $I_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个可重 n 组合, 不妨设 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant m$. 记 $b_i=a_i+i-1$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则显然有 $1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_n\leqslant m+n-1$, 即 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是集合 $I_{m+n-1}=\{1,2,\cdots,m+n-1\}$ 上的一个无重 n 组合. 不难看出, 映射

$$f:\ \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\mapsto\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

恰给出了 I_m 上的全部可重 n 组合到 I_{m+n-1} 上的全部无重 n 组合的一一对应. 于是, 由等则, 可得到结论:

$$F(m,n)=C(m+n-1,n)=\binom{m+n-1}{n}.$$

进而, 因方程 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=n$ 的一组正整数解等价于方程 $\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=n-m$ 的一组非负整数解, 其中 $y_i=x_i-1,\ 1\leqslant i\leqslant m$, 又可得到下一个结论:

$$\text{不定方程}\ \sum_{i=1}^{m}x_i=n\ \text{的正整数解组数}=F(m,n-m).$$

至于最后的结论 (涉及容斥原理), 其证明可见命题 5.1.4. □

命题 1.2.2　对于 $0\leqslant n\leqslant 9$ 和正整数 k, 在 10^k 以内的非负整数中, 其数字和 $=n$ 的有 $\binom{k+n-1}{k-1}$ 个, 其数字和 $<n$ 的有 $\binom{k+n-1}{k}$ 个.

证明　10^k 以内的非负整数当然是最多 k 位的, 可记为 $x_1x_2\cdots x_k$, 其中诸 x_i 可取的值为 $0,1,\cdots,9$. 于是, 数字和 $=n$ 的这种非负整数个数即是方程 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=n$ 的非负整数解组数. 由命题 1.2.1, 这个数 $=F(k,n)=\binom{k+n-1}{k-1}$. 而数字和 $<n$ 的这种非负整数个数则恰应等于

$$\sum_{i=0}^{n-1}F(k,i)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i-1}{k-1}=\binom{k+n-1}{k}.$$

其最后一步的理由可见 4.1 节二项式系数性质 (B7). □

命题 1.2.3　网格图中从 (a,b) 到 (c,d) 的最短路径数为 $\binom{c+d-a-b}{c-a}$, 其中 a,b,c,d 为整数, $c\geqslant a,\ d\geqslant b$.

证明　所谓网格图即是平面直角坐标系中由两个直线族 $\{x=k:k\in Z\}$ 与 $\{y=k:k\in Z\}$ 构成的图, 其中 Z 为整数环. 不妨假定 m,n 为非负整数 (即点 (m,n) 在坐标系的第一象限中, 在其他象限时可类似讨论). 则从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的最短路径即是由 m 个单位长的 "向右" 线段与 n 个单位长的 "向上" 线段排列成的一条路径. 显然, 这种路径共 $\binom{m+n}{m}$ 条. 于是可知, "(a,b) 到 (c,d) 最短路

径数” 等于 “(0,0) 到 $(c-a, d-b)$ 最短路径数”, 即 $\binom{c+d-a-b}{c-a}$. □

命题 1.2.4 I_n 上有序递增 (增量均大于整数 k) 的 r 子集个数$=\binom{n-k(r-1)}{r}$. 特别, 当 $k=0$ 时, 给出无重组合数 $\binom{n}{r}$; 当 $k=-1$ 时, 给出可重组合数 $\binom{n+r-1}{r}$; 当 $k=1$ 时, 给出无二数相邻的组合数 $\binom{n-r+1}{r}$.

证明 设此有序递增 r 子集为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$, 满足 $a_1 \geqslant 1, a_r \leqslant n$ 且 $a_{i+1}-a_i > k$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant r-1$. 令 $b_i = a_i - k(i-1)$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, 则 $1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n-k(r-1)$. 不难说明, 此对应 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \longrightarrow \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ 恰建立起以下的一一映射:

$$\{I_n \text{ 上 (增量} > k) \text{ 的有序递增 } r \text{ 子集 }\} \longleftrightarrow \{I_{n-k(r-1)} \text{ 上 (无重) } r \text{ 组合 }\}.$$

因后者的计数是 $\binom{n-k(r-1)}{r}$, 故由配对原理即可得证. □

1.3 基本计数公式 II: 分配分派

将 n 个球放入 m 个盒子中, 有表 1.3.1 所列诸情形:

表 1.3.1 分配分派

球标号	盒标号	盒可空	计数公式	等价构形
√	√	√	m^n	m 元集的可重 n 排列
√	×	×	$\frac{1}{m!}\Delta^m 0^n$	n 元集无序地分拆为 m 个非空子集
√	×	√	$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\Delta^k 0^n$	n 元集无序地分拆为 m 个子集
√	√	×	$\Delta^m 0^n$	n 元集有序地分拆为 m 个非空子集
×	√	√	$\binom{m+n-1}{n}$	$x_1+\cdots+x_m=n$ 非负整数解组数
×	√	×	$\binom{n-1}{m-1}$	$x_1+\cdots+x_m=n$ 正整数解组数
×	×	×	$P_{n,m}$	整数 n 无序分拆为 m 个部分
×	×	√	$P_{n,\leqslant m}$	整数 n 无序分拆为最多 m 个部分

注: 此表所列的是球放入盒子的全部经典安排类型. 对于每类安排, 均不难说明其与后边所列等价构形的对应. 至于计数公式, 第一、五、六类都可由上节所列的表中得知, 最后两类写出的仅是整数分拆的符号 (参见第 6 章). 而第二、三、四类的计数公式均以零的差分 $\Delta^m 0^n$ 表示, 其中第二、三类的公式显然可由第四类的推导出. 我们将在命题 5.1.5 中给出第四类计数公式的证明.

命题 1.3.1　n 元集各元的重复次数分别为 $r_1,\cdots,r_n$ 的可重排列数为 $\dfrac{(r_1+r_2+\cdots+r_n)!}{r_1!r_2!\cdots r_n!}$.

证明　设此 n 元集为 $\{a_1,\cdots,a_n\}$. 满足要求的排列之长度为 $r_1+r_2+\cdots+r_n$, 首先选择其中的 r_1 个位置安置元素 a_1, 再从所余的 $r_2+\cdots+r_n$ 个位置中选择 r_2 个位置安置 $a_2,\cdots$, 最后在余下的 r_n 个位置中安置 a_n. 此安置过程即给出了所求的可重排列数为

$$\binom{r_1+r_2+\cdots+r_n}{r_1}\binom{r_2+\cdots+r_n}{r_2}\cdots\binom{r_n}{r_n}=\frac{(r_1+r_2+\cdots+r_n)!}{r_1!r_2!\cdots r_n!}.$$

等号右边即多项式系数 (参见 4.2 节), 通常记为 $\dbinom{r_1+r_2+\cdots+r_n}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n}$.　□

命题 1.3.2　直线上 n 个位置放 k 种色的球, 同色不邻的放法数为

$$\begin{cases} k(k-1)^{n-1} & \text{最多用 } k \text{ 色},\\ k!S_2(n-1,k-1) & \text{恰用 } k \text{ 色}.\end{cases}$$

证明　记直线上由左向右的 n 个位置依序为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 我们从 A_1 开始由左向右依序地选放色球. 显然, A_1 位置可放 k 种色中任一色的球. 而 A_1 的球选定后, A_2 位置只能放 (除去 A_1 球色外) $k-1$ 种色中任一色的球. 进而, A_3 位置只能放 (除去 A_2 球色外) $k-1$ 种色中任一色的球, $\cdots$. 如此下去, 因条件仅是 “同色不邻”, 故除去 A_1 外, 其他诸 A_i 位置的可放置颜色数均为 $k-1$. 于是, 可得到计数为 $k(k-1)^{n-1}$. 当然, 此时不能保证所安排的 n 个球可取遍 k 种色. 如果要求所安排的球恰好取遍 k 种色 (此时显然需满足 $n\geqslant k$), 则问题涉及第二类 Stirling 数, 将在命题 4.6.12 中给出证明.　□

命题 1.3.3　圆周上的 n 个位置放最多 k 种色的球, 同色不邻的放法数为

$$\begin{cases} k & n=1,\\ (k-1)^n+(-1)^n(k-1) & n\geqslant 2, \text{且诸位置为编号的},\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)[(k-1)^{\frac{n}{d}}+(-1)^{\frac{n}{d}}(k-1)] & n\geqslant 2, \text{且诸位置为不编号的}.\end{cases}$$

证明　这是与命题 1.3.2 相匹配的关于圆周上放置 k 种色球 (同色不邻) 的一个结论. $n=1$ 时的结论是显然的. 而当 $n\geqslant 2$ 时, 这里将仅对诸位置编号时的结论给出证明 (位置不编号的情形较复杂, 需应用后边章节的知识).

令 $n\geqslant 2,\ k\geqslant 1$. 记直线上 n 个位置安排最多 k 种色的球 (同色不邻) 之构形全体为 $\mathcal{A}_k(n)$, 圆周上 n 个标号位置安排最多 k 种色的球 (同色不邻) 之构形全体

为 $\mathcal{B}_k(n)$. 由命题 1.3.2 知 $|\mathcal{A}_k(n)| = A_k(n) = k(k-1)^{n-1}$, 以下对 n 进行归纳, 以证明:

$$|\mathcal{B}_k(n)| = B_k(n) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

当 $n = 2$ 时, 易知有 $B_k(2) = A_k(2) = k(k-1)$, 而公式所给出的恰是 $B_k(2) = (k-1)^2 + (-1)^2(k-1) = k(k-1)$. 设公式对于 $< n$ 的参数成立. 将 $\mathcal{A}_k(n)$ 分拆为 $\overline{\mathcal{A}}_k(n), \mathcal{A}'_k(n)$ 两部分, 前者是直线上首尾球色不同的那些构形, 后者是直线上首尾球色相同的那些构形. 显然, 可以建立起 $\overline{\mathcal{A}}_k(n)$ 与 $\mathcal{B}_k(n)$ 间的一一映射 (直线构形首尾相接即得到圆周构形). 而 $\mathcal{A}'_k(n)$ 与 $\overline{\mathcal{A}}_k(n-1)$ 间亦存在一一映射: 删去前者尾部的位置及该位置上 (与首位同色) 的球, 即得到一个直线上 $n-1$ 个位置安排最多 k 种色的球 (同色不邻, 且首尾异色) 之构形. 于是, 由归纳假设, 可得到欲证之结论:

$$\begin{aligned} B_k(n) &= |\overline{\mathcal{A}}_k(n)| = A_k(n) - |\mathcal{A}'_k(n)| = A_k(n) - |\overline{\mathcal{A}}_k(n-1)| \\ &= A_k(n) - |\mathcal{B}_k(n-1)| = A_k(n) - B_k(n-1) \\ &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k-1) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \quad \square \end{aligned}$$

命题 1.3.4 红、蓝、白色的球各 n 个排成首尾有别的 $3n$ 长排列的不同方法数为

$$\text{红色球不邻: } m_1 = \binom{2n}{n}\binom{2n+1}{n};$$

$$\text{红、蓝色球均同色不邻: } m_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{2n-k+1}{n+1};$$

$$\text{每色球均同色不邻: } m_3 = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\binom{n-1}{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}\binom{2n-k+1}{n+1}.$$

证明 首先, 将蓝、白色球各 n 个排成一列 (不作任何限制), 再在每种排列的 $2n+1$ 个空档 (包括首尾) 处选择 n 处各插入一个红球. 则有

$$m_1 = \binom{2n+1}{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{n}.$$

进而考察符合 m_2 或 m_3 条件的任一排列 T, 将其中红球抽出后的蓝白球排列, 有表 1.3.2 中的四种式样, 其中蓝或白分别表示蓝连贯或白连贯. 若一个排列中的蓝 (或白) 连贯数有 r 个, 其长度分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 则该色球的可能分布方式数即为

$$\text{方程} \sum_{1}^{r} k_i = n \text{ 的正整数解个数 } p = \binom{n-1}{n-r}.$$

而该排列中此色球同色相邻的对子数 $q=\sum_{1}^{r}(k_i-1)=n-r$. 为区分不同色, 以下将涉及蓝连贯或白连贯的参数分别缀以下标 b 或 w, 比如 r_b, r_w; p_b, p_w; q_b, q_w.

显然, 每种式样对应的蓝白球排列个数 $=p_bp_w$. 进而, 再在每种排列中插入红球.

表 1.3.2

排列的连贯式样	r_b	r_w	p_b	p_w	q_b	q_w	q_b+q_w
蓝白 ··· 蓝白蓝	t	$t-1$	$\binom{n-1}{n-t}$	$\binom{n-1}{n-t+1}$	$n-t$	$n-t+1$	$2n-2t+1$
白蓝 ··· 白蓝白	t	$t+1$	$\binom{n-1}{n-t}$	$\binom{n-1}{n-t-1}$	$n-t$	$n-t-1$	$2n-2t-1$
蓝白 ··· 蓝白蓝白	t	t	$\binom{n-1}{n-t}$	$\binom{n-1}{n-t}$	$n-t$	$n-t$	$2n-2t$
白蓝 ··· 白蓝白蓝	t	t	$\binom{n-1}{n-t}$	$\binom{n-1}{n-t}$	$n-t$	$n-t$	$2n-2t$

对于 m_2, 排列中相邻的蓝色球间都必须恰放一个红球, 这共需 $q_b=n-t$ 个. 而尚余的 $n-q_b=t$ 个红球需在其他 $2n+1-q_b=n+t+1$ 个位置 (包括两端) 自由插入 (均可插入一个或不插入), 于是可插入方式数为 $\binom{n+t+1}{t}$. 从而

$$
\begin{aligned}
m_2&=\sum_t\binom{n-1}{n-t}\binom{n+t+1}{t}\left[\binom{n-1}{n-t+1}+2\binom{n-1}{n-t}+\binom{n-1}{n-t-1}\right]\\
&=\sum_t\binom{n-1}{n-t}\binom{n+t+1}{t}\binom{n+1}{n-t+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{2n-k+1}{n+1},
\end{aligned}
$$

其中最后一步的代换是 $t=n-k$.

对于 m_3, 排列中相邻的蓝色球 (及白色球) 间都必须恰放一个红球, 共需 q_b+q_w 个. 仿上可知, 所余红球的可插入方式数为 $\binom{2n+1-q_b-q_w}{n-q_b-q_w}$. 从而

$$
m_3=\sum_t\binom{n-1}{t-1}\left[\binom{n-1}{t-2}\binom{2t}{n+1}+\binom{n-1}{t}\binom{2t+2}{n+1}\right.
$$