高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学应用数学系编

九章丛书

微积分

第二版 下册

同步辅导及习题全解

主编 边文思 黄淑森

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

微积分（第二版·下册）同步辅导及习题全解

主 编 边文思 黄淑森

编 委（排名不分先后）

程丽园 李国哲 陈有志 苏昭平

郑利伟 罗彦辉 邢艳伟 范家畅

孙立群 李云龙 刘 岩 崔永君

高泽全 于克夫 尹泉生 林国栋

黄 河 李思琦 刘 闯 侯朝阳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《微积分》（第二版·下册）教材的配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《微积分》教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书，也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分（第二版）同步辅导及习题全解. 下册 / 边文思，黄淑森主编.—北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6369-8

Ⅰ. 微… Ⅱ.①边…②黄… Ⅲ.微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 040521 号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：陈洁　封面设计：李佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 微积分（第二版·下册）同步辅导及习题全解
作　者	主编　边文思　黄淑森
出版发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　格	170 mm×227mm　16 开本　20.5 印张　467 千字
版　次	2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷
印　数	0001—6000 册
定　价	20.80 元

前言

本书是与同济大学应用数学系编写的“十五”国家级规划教材《微积分》(第二版)配套的学习辅导书。

《微积分》作为高等数学的重要组成部分,是理工科学生必修的一门重要基础课,也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样,从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分,形成了一个无比精美的庞大系统,这个系统不仅内容丰富,更重要的是结构严密,无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程,许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂,对基本概念以及定理结论在理解上感到困难,具体解题时,缺乏思路,难以下手。本辅导书旨在帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论,综合运用各种解题的技巧和方法,提高分析问题和解决问题的能力。

本书主要由如下几个部分组成:

1. **学习指南。**从该课程的知识体系出发,对各个章节在全书中的位置以及其他章节的联系作了简明扼要的阐述,使学习有重点。

2. **本章知识网络图。**每章的知识网络图系统全面的涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容框架结构,全面把握教材的理论体系。

3. **知识点归纳。**对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

4. **典型例题解析。**本书尽可能归纳了该课程所涉及的重要题型,这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的,具有一定的代表性。

5. **课后习题全解。**教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

本书在编写过程中,参考了高等教育出版社出版的《微积分学习辅导与习题选解》一书,在此深表感谢。

由于时间仓促和编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,肯请广大读者不吝批评指正。

编者

2009 年 1 月

目录

第五章 向量代数与空间解析几何

学习指南

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示；

2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件；

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法；

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法；

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题；

6. 会求点到直线、点到平面以及直线到平面的的距离；

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念；

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程；

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，会求空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

本章知识网络图

- 向量代数与平面解析几何
  - 向量
    - 内积
    - 外积
    - 混合积
  - 平面和直线
    - 平面—法向量
    - 直线—方向向量
    - 距离
    - 夹角
  - 空间曲线和曲面
    - 曲线和曲面的表示
    - 二次曲面的分类

第一、二节 向量及其运算

知识点归纳

1. 向量的定义

向量是既有大小、又有方向的量.

(1) 向量的几何表示　有向线段(与起点无关,称为自由向量).

(2) 向量的坐标表示　$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,其中 a_x、a_y、a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影. 以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点、$M(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

(3) 向量的分解表示　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

2. 向量的模与方向余弦

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则向量的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$,$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$,$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$,其中 α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角(称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角),

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

典型例题与解题技巧

题型Ⅰ:根据定义来求解

【题型分析】 在利用向量定义来运算的时候,要充分弄清楚其表示的意义,严格按照定义的要求来解题.

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}=\{3,-4,2\}$,轴 u 的正向与三个坐标轴的正向构成相等的锐角,试求:(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影;(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角.

分析　关键是求出 u 轴上的单位向量 $\boldsymbol{u}_0$,再计算有关所求量.

解:设 u 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{u}_0$,则

$\boldsymbol{u}_0=\{\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha\}$

于是　$3\cos^2\alpha=1$ (方向角应满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$)

解得　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt3}$ (注意 α 是锐角)　　$\boldsymbol{u}_0=\{\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\}$

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_0=\dfrac{1}{\sqrt3}(3-4+2)=\dfrac{1}{\sqrt3}$

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_0})=\dfrac{\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\sqrt3}{\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{29}}$　　$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_0})=\arccos\sqrt{\dfrac{3}{29}}$

例 2　已知 $|\boldsymbol{a}|=15$，$|\boldsymbol{b}|=25$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

分析　此题型是一种典型题型. 由题设无法求出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，因而无法先求向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 再求其模. 考虑到 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 有密切的联系，利用这些关系可求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，从而可求出 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解：由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$，可知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，由此可得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-450$

又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\,300$，所以得到

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10\sqrt{13}$.

例 3　求向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},-1)$ 的模、方向余弦、方向角及与 a 同向的单位向量.

解：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{4}=2$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}\qquad\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{2}\qquad\qquad \alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{2\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

例 4　已知 $\boldsymbol{a}=(1,5,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,-4,-2)$，$\boldsymbol{c}=(0,-5,7)$，$\boldsymbol{d}=(-20,27,-35)$，求数 x，y，z 使向量 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$，$z\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 可构成封闭折线.

解：按题意，只要 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0$ 得

$$\begin{cases}x+6y-20=0\\5x-4y-5z+27=0\\3x-2y+7z-35=0\end{cases}$$

解得 $x=2$，$y=3$，$z=5$.

例 5　设 $\boldsymbol{a}=(3,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}=(5,1,7)$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-18$

$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(10,2,14)$

(3) $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

题型 Ⅱ:向量的线性运算

【题型分析】 向量的加法运算注意方向的确定.

例 6 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,问 λ 为何值时,向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线?

解:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}&=(\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=3\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+15(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-5(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\\&=(\lambda+15)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\neq 0$

故当 $\lambda=-15$ 时,$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\neq 0$,$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 共线.

课后习题全解

习题 5－1 解答

1. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点,求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

【知识点窍】 向量的加法,三角形法则.

解: 如图 5.1 所示,显然有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$

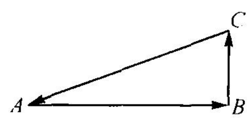

图 5.1

2. 已知正六边形 $ABCDEF$(字母按逆时针向),记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

【知识点窍】 向量的运算.

解: 如图 5.2 所示,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

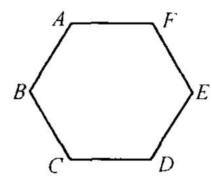

图 5.2

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解: $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$.

4. 用向量法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

【知识点窍】 向量的加法.

解: 设在 $\triangle ABC$ 中(如图 5.3)所示,E 和 F 分别是 AB 边和 AC 边的中点,即

$$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF}.$$

所以有

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{EF},$$

即结论成立.

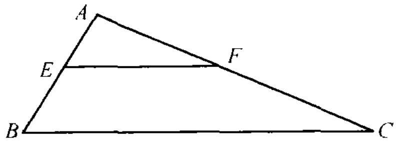

图 5.3

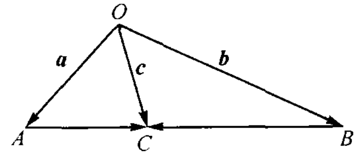

图 5.4

5. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB|=2|AC|$，O 为 AB 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

【知识点窍】 向量的加法.

解：如图 5.4 所示，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$，

即 $3\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，解得 $\boldsymbol{c}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

习题 5－2 解答

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点的坐标有什么特征？指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-3,2)$；　$B(3,-2,-4)$；　$C(-1,-2,-3)$；　$D(-3,2,-1)$.

解：各卦限中的点的坐标有如下特征：

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

A：Ⅳ，B：Ⅷ，C：Ⅶ，D：Ⅵ.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

解：xOy 面上的点：$(x,y,0)$；yOz 面上的点：$(0,y,z)$；xOz 面上的点：$(x,0,z)$. x 轴上的点：$(x,0,0)$；y 轴上的点 $(0,y,0)$；z 轴上的点 $(0,0,z)$.

P 在 yOz 面上；Q 在 xOy 面上；R 在 x 轴上；S 在 y 轴上.

3. 求点 (a,b,c) 关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解：(1) 关于 xOy 面、yOz 面和 xOz 面的对称点分别是 $(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$；

(2) 关于 x 轴、y 轴和 z 轴的对称点分别为 $(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$；

(3) 关于原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求出 P_0 到各坐标面和各坐标轴的距离.

解：自点 P_0 作各坐标面的垂线，垂足的坐标和 P_0 到各坐标面的距离为：

xOy 面：$(x_0,y_0,0)$，$d=|z_0|$；

yOz 面：$(0,y_0,z_0)$，$d=|x_0|$；

xOz 面：$(x_0,0,z_0)$，$d=|y_0|$.

点 P_0 到作各坐标轴的垂线，垂足的坐标和 P_0 到各坐标轴的距离为：

x 轴:$(x_0,0,0)$,$d=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$;

y 轴:$(0,y_0,0)$,$d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$;

z 轴:$(0,0,z_0)$,$d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$.

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特征?

解:平行于 z 轴的直线上的点的坐标为 (x_0,y_0,z);

平行于 xOy 面的平面上的点的坐标为 (x,y,z_0).

6. 已知点 $A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$,写出以线段 AB 为直径的球面方程.

【知识点窍】 两点间的距离公式,球面方程。

【逻辑推理】 先求出 AB 两点间的距离,则以线段 AB 为直径的球面半径 $R=\frac{1}{2}|AB|$,再求出线段 AB 的中点坐标,则可解。

解:设线段 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0,z_0),

则 $x_0=\frac{2+4}{2}=3,y_0=\frac{1+3}{2}=2,z_0=\frac{4+10}{2}=7.$

球面半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{11}=\sqrt{11}$,所求球面方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11$.

7. 设长方体的各棱与坐标轴平行,已知长方体的两个顶点的坐标,试写出其余六个顶点的坐标:(1) $(1,1,2)$,$(3,4,5)$; (2) $(4,3,0)$,$(1,6,-4)$.

解:(1) 各棱与坐标轴平行,所以 $(1,1,2)$,$(3,4,5)$ 必是长方体的两个对角顶点;

与 $(1,1,2)$ 相邻的顶点为:$(1,1,5)$,$(1,4,2)$,$(3,1,2)$;

与 $(3,4,5)$ 相邻的顶点为:$(3,4,2)$,$(3,1,5)$,$(1,4,5)$.

(2) 各棱与坐标轴平行,所以 $(4,3,0)$,$(1,6,-4)$ 必是长方体的两上对角顶点;

与 $(4,3,0)$ 相邻的顶点为:$(4,3,-4)$,$(4,6,0)$,$(1,3,0)$;

与 $(1,6,-4)$ 相邻的顶点为:$(1,6,0)$,$(1,3,-4)$,$(4,6,-4)$.

8. 证明:三点 $A(1,0,-1)$,$B(3,4,5)$,$C(0,-2,-4)$ 共线.

【逻辑推理】 只需证明 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 成线性关系即可.

解:由于向量 $\overrightarrow{AB}=\{2,4,6\}$,$\overrightarrow{BC}=\{-3,-6,-9\}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,又因为 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B,故点 A、B、C 共线.

9. 证明:以点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

【知识点窍】 验证满足等腰直角三角形的定义.

解:$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^3+(6-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+4(-(-1))^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7$

因为　$(|\overrightarrow{AB}|)^2+(|\overrightarrow{AC}|)^2=(|\overrightarrow{BC}|)^2$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

所以，以 A,B,C 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

10. 已知点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，试求点 D，使得以 A,B,C,D 为顶点的四边形为平行四边形.

解：设平行四边形的 4 个顶点依次为 A、B、C、D，则因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，设 $D(x,y,z)$，于是 $(-2,3,-6)=(-1-x,1-y,2-z)$，所以 $x=1,y=-2,z=8$ 和 D 为 $(1,-2,8)$.

同理，若 4 个顶点依次为 A、C、B、D 和 A、C、D、B，则可得 D 的坐标分别为 $(5,0,-4)$，$(-3,4,-4)$.

11. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos\gamma=0$；(2) $\cos\alpha=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\gamma=0$，问这些向量与坐标或坐标面的关系如何？

解：(1) $\cos\gamma=0,\gamma=\frac{\pi}{2}$，故此向量垂直于 z 轴，平行于 xOy 平面；

(2) $\cos\alpha=1,\alpha=0$，故此向量的指向与 x 轴正向一致，垂直于 yOz 面；

(3) $\alpha=\gamma=\frac{\pi}{2}$，故此向量同时垂直于 x 轴和 z 轴，即平行于 y 轴，垂直于 xOz 面.

12. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解：$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(4-3)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(1-2)^2} = 2$

方向余弦为：　$\cos\alpha = \dfrac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\dfrac{1}{2}$，　$\cos\beta = \dfrac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\cos\gamma = \frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \frac{1}{2}.$$

方向角为：$\alpha=\arccos(-\frac{1}{2})=120°$，　$\beta=\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=135°$，

$$\gamma=\arccos(\frac{1}{2})=60°.$$

13. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

解：$\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，所以 l 在 x,y 轴上的投影分别为

$l_x = 4\times3+3\times2-5=13$

$l_y = 4\times5+3\times(-4)-1=7$

l 在 x 轴上的投影为 13.

l 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

14. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

【逻辑推理】　将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 看做常量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 看做变量解方程组即可求解。