高职高专公共基础课规划教材

应用数学基础

APPLIED MATHEMATICS FOUNDATION

主　编　支天红　张恩明

副主编　谢日勤

主　审　周　萍

人民交通出版社

China Communications Press

JGB 高职高专公共基础课规划教材

应用数学基础

APPLIED MATHEMATICS FOUNDATION

主　编　支天红　张恩明
副主编　谢日勤
主　审　周　萍

人民交通出版社
China Communications Press

内 容 提 要

本书是作者根据多年教学经验及工程类应用数学教学的实际情况，按照高职高专人才培养目标的要求，本着“基础理论知识必须、够用”的原则，在教学讲义的基础上经过修改、补充而成。全书叙述精炼，由浅入深，并适度注意了数学在工程领域中的应用。

全书共分八章，主要介绍一元微积分学和线性代数的基本知识，内容包括函数的极限与连续、导数与微分及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等。各节后配有一定数量的习题，书后附有习题答案。

本书可作为高等职业院校、成人高校等理工类专业的数学基础课教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础/支天红，张恩明主编.—北京：人民交通出版社，2008.8
高职高专公共基础课规划教材
ISBN 978 – 7 – 114 – 07183 – 6

Ⅰ.应… Ⅱ.①支…②张… Ⅲ.应用数学 – 高等学校：技术学校 – 教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 114623 号

书　　名：应用数学基础
著 作 者：支天红　张恩明
责任编辑：陈志敏　杜　琛
出版发行：人民交通出版社
地　　址：（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址：http：//www.ccpress.com.cn
销售电话：（010）59757969，59757973
总 经 销：北京中交盛世书刊有限公司
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京宝莲鸿图科技有限公司
开　　本：787 × 960　1/16
印　　张：18.75
字　　数：313 千
版　　次：2008 年 8 月　第 1 版
印　　次：2008 年 8 月　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978 – 7 – 114 – 07183 – 6
印　　数：0001 – 4000 册
定　　价：35.00 元
（如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换）

前言 Preface

时下，高职高专教育已不再是新生事物，原来处于探索中的课程改革与课程设置已逐渐趋于定型。高职高专教育的目的是培养技术应用型人才，在此目标驱动之下，各高职高专院校均不同程度地缩减了基础课的学时。为适应这种情况，我们根据工程类应用数学教学的实际情况，把近几年的教学讲义经过进一步的修改、补充，编写而成本书。

本书的主要内容是一元微积分和线性代数的基本知识，我们在编写时把重点放在了基本概念和基本方法方面，并且力求做到三点，即：传授基本知识，培养自学能力，培养应用数学知识和方法分析和解决实际问题的能力。为此我们不断地进行推敲，力争使本书的语言叙述深入浅出、通俗易懂，使读者在没有他人指导的情况下也能读懂教材，轻松获得数学知识。

本书可作为高等职业院校、成人高校等此类院校理工类专业的数学基础课程教材，需要的教学时数为 84 学时左右。书中带 * 号的内容可根据学生实际自由选择。

本书由哈尔滨铁道职业技术学院和西安铁路职业技术学院联合编写，并由哈尔滨铁道职业技术学院支天红、张恩明老师担任主编，由西安铁路职业技术学院谢日勤老师担任副主编。本书第四、七章由支天红编写，第二、三章由哈尔滨铁道职业技术学院张恩明老师编写，第一、八章由西安铁路职业技术学院谢日勤老师编写，第五、六章由西安铁路职业技术学院师宝珠老师编写。

由于作者水平有限，教学任务繁重，编写时间又较为仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生不吝指正，使之进一步完善。

编　者

2008 年 1 月

目录 Content

第一章

函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象。极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法。因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键。连续是函数的一个重要性态。本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法。

第一节　函数的概念

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着。17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海问题等）的研究中引出了函数这个基本概念。在那以后的二百多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置。本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性。

一　邻域

定义 1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径（见图 1-1-1）。

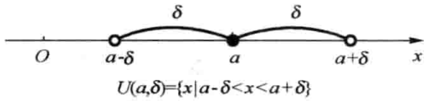

图　1-1-1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域。当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$。

为了使用方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域。

二　函数的概念

1. 函数的定义

定义 2　设 D 为一个非空实数集合，若存在确定的对应法则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在集合 D 上的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为该函数的定义域，也记为 D_f，即 $D_f=D$。

如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0，因变量 y 能够得到一个确定的值，那么就称函数 f 在 x_0 处有定义，其因变量的值或函数 f 的函数值记为

$$y\big|_{x=x_0}, f(x)\big|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0)$$

当自变量取遍 D 的所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

注：函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素。两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同。

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g"、"F"、"φ"、"ψ"等，相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$等。有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$。但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们。

2. 函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。

注：在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达，而不必再写出 D_f。

例 1 确定函数

$$f(x) = \sqrt{3+2x-x^2} + \ln(x-2)$$

的定义域。

解 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} 3+2x-x^2 \geqslant 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得其定义域为$\{x|2<x\leqslant 3\}$，即$(2,3]$。

三 函数的常用表示法

(1)表格法:自变量的值与对应的函数值列成表格的方法。

(2)图像法:在坐标系中用图形来表示函数关系的方法。

(3)公式法(解析法):自变量和因变量之间的函数关系用数学表达式(又称为解析式)来表示的方法。

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数、参数方程表示的函数和分段函数四种:

(1)显函数:函数 y 由 x 的解析表达式直接表示。例如 $y=(x+1)^2$。

(2)隐函数:函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定。例如 $e^{xy}=x+y$。

(3)参数方程表示的函数:函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系通过第三个变量联系起来,例如

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \quad t\text{ 为参变量}$$

(4)分段函数:函数在定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式。以下来看几个分段函数的例子。

例 2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-1-2。

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-1-3。

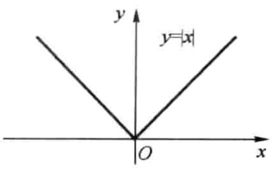

图 1-1-2

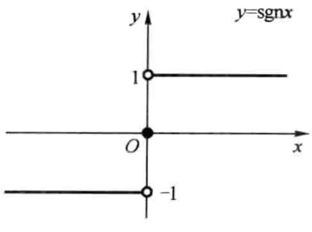

图 1-1-3

例 4 取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如，$\left[\frac{2}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-2.3]=-3$。

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=Z$，图形如图 1-1-4。

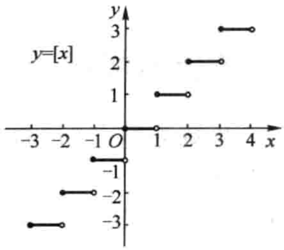

图 1-1-4

例 5 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$。

四 函数关系的建立

为解决实际问题，首先应将该问题量化，从而建立起该问题的数学模型，即建立函数关系。要把实际问题中的函数关系正确的抽象出来，首先应分析哪个是常量，哪个是变量；然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量；最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域。

例 6 旅客乘坐火车可免费携带不超 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每千克交费 a 元，超过 50kg 部分每千克交费 b 元。求运费与携带物品质量的函数关系。

解 设物品质量为 x 千克，应交运费为 y 元。由题意可知这时应考虑三种情况：

情况一：质量不超过 20kg，这时

$$y=0,\quad x\in[0,20]$$

情况二：质量大于 20kg，但不超过 50kg，这时

$$y=(x-20)\times a,\quad x\in(20,50]$$

情况三：质量超过 50kg，这时

$$y=(50-20)\times a+(x-50)\times b,\quad x>50$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ a(50-20)+b(x-50), & x>50\end{cases}$$

五 反函数

函数关系的本质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系。但在研究过程中，哪个作为自变量，哪个作为因变量（函数），是由具体问题来决定的。例如，设某作匀速直线运动的物体的运动速度为 v，运动时间为 t，则其位移 s 是时间 t 的函数：$s = vt$，这里 t 是自变量，s 是因变量；若已知位移 s，反过来求时间 t，则有 $t = \frac{s}{v}$，此处 s 是自变量，t 是因变量。以上两式是同一个关系的两种写法，但从函数的观点看，由于对应法则不同，它们是两个不同的函数，常称它们互为反函数。

一般地，有如下定义：

定义 3 设 $y = f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 M。若对于数集 M 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $y = f(x)$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数。这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$。其定义域为 M，值域为 D。

相对于反函数，函数 $y = f(x)$ 称为直接函数。

注：(1) 习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 常改写为 $y = f^{-1}(x)$。

(2) 在同一坐标平面内，函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 二者的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-1-5）。

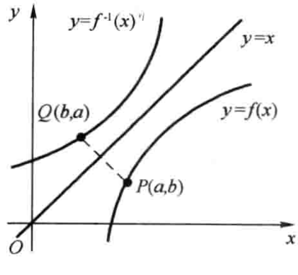

图 1-1-5

(3) 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间存在着如下关系：

$f^{-1}(f(x)) = x$，$f(f^{-1}(x)) = x$

(4) 按此定义，只有单调函数才存在反函数。对于在定义域内不单调的函数，应限定在某一单调区间内才可求反函数。

例 7 求函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数。

解 由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$，可得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$，显然 $e^x > 0$，故只有

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

从而

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

即所求的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

六 函数的基本性态

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$（注：当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常用 I 表示之），对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加函数；若恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少函数。

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的，在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的。

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数；不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，如函数 $y=\cos x$；奇函数的图形是关于原点对称的，如 $y=\sin x$。

3. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对于一切 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期（注：并非每一个函数都有最小正周期，如常数函数 $y=a$ 及狄利克雷函数）。

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得

$$|f(x)|<M$$

对任意 $x\in X$ 均成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，这就是说，若对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，则函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

例如，因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数。这里 $M=1$（当然，也可以取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|<M$ 成立）。

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$

(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$

(3) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$

(4) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

(5) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$

2. 求下列函数的（自然）定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

(2) $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

求函数 $f(x+3)$ 的定义域。

4. 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元。求运价 m 和里程 s 之间的函数关系。

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}\quad(-1<x<1)$

第二节 初等函数

一 基本初等函数

在中学数学中我们已深入讨论了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这五类函数统称为基本初等函数，为以后学习方便，这里我们作简要复习。

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是任意实数），其定义域要依 α 是什么数而定。当

$$\alpha=-1,\frac{1}{2},1,2,3$$

时是最常用的幂函数(见图 1-2-1)。

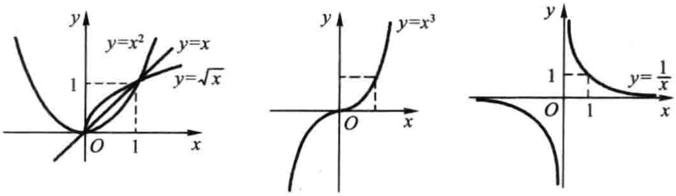

图 1-2-1

2. 指数函数

指数函数 $y=a^{x}$(a 为常数，且 $a>0,a\neq1$)，其定义域为$(-\infty,+\infty)$。当 $a>1$时，指数函数 $y=a^{x}$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 单调减少。函数 $y=a^{-x}$与 $y=a^{x}$ 的图形关于 y 轴对称(见图 1-2-2)。指数函数中最常用的是以无理数 $e=2.718\,281\,8\cdots$为底的函数 $y=e^{x}$。

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_{a}x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$），其定义域为$(0,+\infty)$。当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_{a}x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_{a}x$ 单调减少。(见图 1-2-3)。其中，以 e 为底的对数函数叫自然对数函数，记作 $y=\ln x$；以 10 为底的对数函数叫常用对数函数，记作 $y=\lg x$。

4. 三角函数

常用的三角函数有：

(1)正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是奇函

数，是以 2π 为周期的周期函数，其图像如图 1-2-4 。

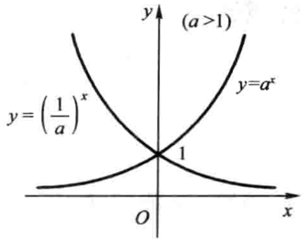

图 1-2-2

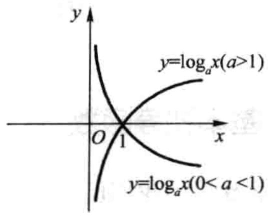

图 1-2-3

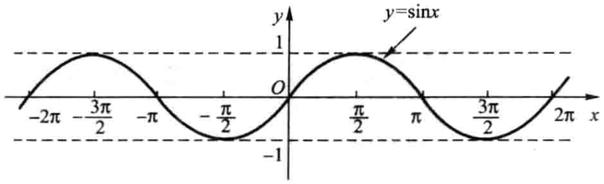

图 1-2-4

(2)余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是偶函数，是以 2π 为周期的周期函数，其图像如图 1-2-5。

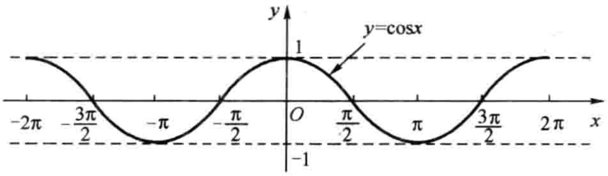

图 1-2-5

(3)正切函数 $y=\tan x$，其定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数，其图像如图 1-2-6。

(4)余切函数 $y=\cot x$，其定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数，其图像如图 1-2-7。

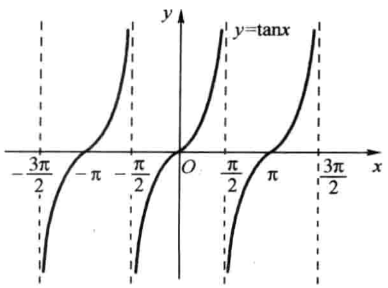

图 1-2-6

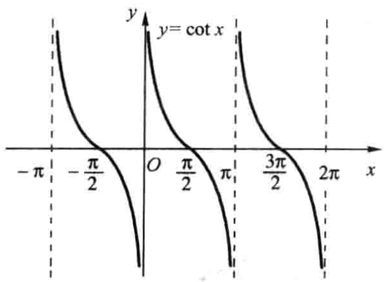

图 1-2-7