開明中學講義

開明幾何講義

章克標　劉薰宇
合編

開明函授學校出版
開明書店印行

開明中學講義

開明幾何講義

章克標　劉薰宇
合編

開明函授學校出版
開明書店印行

本書已照著作權法呈請內政部註冊

開明中學講義
"開明幾何講義"

民國廿四年十月初版

有著作權
*
不許翻印

實價大洋八角
(外埠酌加寄費)

編　者　章克標　劉薰宇

發行者　章錫琛
上海福州路開明書店

印刷者　美成印刷公司
上海梧州路三九〇號

總發行所
上海福州路二七八號
開明書店

分發行所
南京廣州北平漢口長沙
開明書店分店

57624 B

編輯例言

一、本講義爲初級中學程度，以適合自學自修爲目標而編輯，亦可以供在校學生作課外自習之用。

二、本講義取材範圍根據部定中學課程標準。

三、本講義爲適合自學起見，行文講釋力求詳細明白，但亦不陷於累墜嚕囌，以要言不煩爲主旨。讀者對於書中所言，必須一一體會，不厭反覆求詳，勵行復習，其效乃見。

四、本講義設題雖未見多，但均極精要。演題乃學算進步必經之階程，讀者必須實事求是，逐題親自演算，否則進步難見；空讀講義，實屬徒勞無功。

五、爲學貴有恆心，自學尤屬必要，算學一科向被視爲乾燥無味，但能用心精進，則其中自有妙味，讀者應於此中發見學習趣味，則自然樂於學習，不患不成矣。

六、本講義雖算術、代數、幾何各訂分册，但有一貫之線索，須按步就班，循序漸進。

七、本講義所附小註說明，乃算學中最精警之語，幸勿忽視，如能善於體會，不難升堂入室，爲進而修學高等算學之基礎。

八、本講義因篇幅關係，說明容有未盡詳明，取材容有疎漏，幸海內明達有以教正之。

開明書店印行

高等算學入門

周爲羣編　一元四角

本書採用混合編法,包含平面三角、高等代數、解析幾何、微分積分。取材精當聯絡自然,絕無蕪雜凌亂之弊。學者學習,最易領悟到左右逢源之樂。既可作高級中學的課本用,亦可作爲參考書用。大學一年級的學生,用以研究,亦甚適當。就是其他人等爲學問上或是業務上欲了解高中範圍內的算學,本書亦恰合其需要。

三角入門

仲光然編　五角

本書博採實際事項,以便喚起學者興趣。引用幾何定理,概不加以詳細說明,以免煩冗累墜。所設問題,皆經精選,務使學者做一問獲一問之益,處題無虛設,力不徒費。至於三角上計算很佔重要位置,故對應用對數諸表,詳加指導,且多設問題,俾多所演習,明瞭熟達。學校中採用爲教本固極相宜,用以自己研究也很合適。

解析幾何學

劉薰宇編　一元

凡是高等的數學,國內學校,大都用的是英文本。可是,英文本來自英國和美國,他們學生的程度,並不和我們中國的學生一樣,那我們用英文本的教本,豈不是不很適當嗎?編者有鑒於此,以其歷年之經驗,編成本書,學生學習,比了用英文的原本,得益多多,可以斷言。

微積分大意

周爲羣編　五角

投考大學或是工學院的學生,每因算學試題,感覺艱深,因此而失敗的很多。平心而論,我們不能責怪出題的人,因爲出題容易,大家都做得出,就比不出高低來。所以,教育部的高中數學課程標準中,雖無微積分,但高中學生,最好也得學一些,俾投考時占得不少便宜。

開明幾何講義目錄

I 緒論（幾何學入門）

II 平面幾何學

第一章 直線形

第二章 圓

第三章 軌跡及作圖題

開明幾何講義

緒論

（幾何學入門）

(一) 立體 表面 線及點

1. 鐵球和鉛球，形狀是一樣的，但物質不一樣。鉛球和鉛的立方體，構成的物質是一樣的，但形狀不一樣。直徑 3 寸的鉛球和直徑 5 寸的鉛球，形狀和物質都一樣了，但大小不一樣。關於一切物事的研究，可以就構成物體的物質而論，也可以就物體的形狀和大小而攷究之。

幾何學所研究的，是關於物體的形狀和大小的諸性質，又在處理二個物體以上時，也論及其相互間的位置的關係。

至於構成物體的物質如何，不是幾何學所顧及的。

2. 在算術裏，(P.79) 我們說明過計算如次圖一般物體的體的方法。這是一個長方體，在幾何學上，我們叫牠做'直六面體'，就是着眼於牠的形狀、大小及位置而研究時的稱謂。對於一種物體，

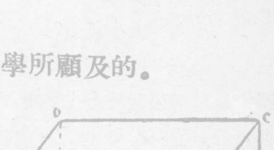

圖 1

我們只就牠的形狀、大小及位置而着想時，這物體可叫做立體。所以也可以這樣說：

立體是物體所占有空間的部分。

直六面體也就是立體的一種，另外如立方體、球體、方柱、角錐、圓柱、圓錐等等，都是有規則的立體。而且無論什麽物體，只就他的形狀着想時，都是立體。

3. 前條所示的直六面體，是向三個方面推展，即是有三個'向'。

(i) 從A向B的方向，

(ii) 從A向D的方向，

(iii) 從A向E的方向，

物質是一種占有空間的位置爲吾人五官所能感知的東西，如木、石、水、空氣等。物體是物質的集合成一定的形狀者，所以是泛指固體、液體、氣體三者的，如木板、石塊、水滴、氣泡便是。

物體因其種類，可以有種種的性質，譬如有個箱子在這裏，我們加以考察，便可以想到:

1. 組成這箱子的材料是木料還是金屬或皮革?
2. 牠的重量怎樣，色彩如何?
3. 硬度如何，有否若干的氣味?
4. 形狀如何?
5. 大小怎樣?
6. 這箱對於他種物體的位置關係(例如說在桌子上或在其左右)如何?

這樣可以從種種地方去觀察，而此等性質之中的(1)，(2)，(3)是屬於組成物體的物質的，(4)，(5)，(6)則不論物質如何，是物體所共通的。所以物體可以形狀不同，而組成的物質相同，也可以形狀相同而組成的物質不同，或形狀物質都相同而大小不同。所以對於物體的研究，可以就其組成的物質，也可以就其形狀大小。再物體有二個時，還可以論其位置的關係，再從我們認識這些物體的性質上看，可以分爲單由我們的視覺可以知道，和單用視覺是不足以認識的。上說的形狀、大小、位置及顏色是可以由視覺而知，其他的硬度、重量、氣味等 都不能由視覺而知的。幾何學所研究的物體的性質，不是其性質的全部，只是就由我們的視覺可以認知而且和物質是無關係的諸種性質，換言之就是形狀、大小、位置三者。至組成這物質的性質如何，幾何學上是不管的。

這三個向，叫做長、闊和高（或厚）。

立體一般有這長、闊、高的三個向。

4. 再就直六面體觀察，可以看見這立體有六個平的面做境界，各個面又有四條稜做界線，各條稜又有二個頂點分界着的。

立體的境界，叫做表面。表面的境界或二個表面的交會，叫做線。線的盡頭，或線和線的交會，叫做點。

直六面體的面是表面，稜是線，頂點是點。

5. 直六面體的一面 $ABCD$ 有二個'向'。即

(i) 從 A 向 B 的方向，

(ii) 從 A 向 D 的方向，

表面一般是向二個方向推展，即是有長有闊而無高（或厚）。

物體的形狀、大小及位置的性質，和構成的物質無關，是一切物體所共通的性質。我們知物體的存在，有無數的種類和數量，在宇宙之間，大如太陽、地球，小若塵沙、細菌，由其爲物體一點着眼，即有同等的位置。即此等物體均占有全宇宙中廣大場所之一部，是同一的。這宇宙全體的廣大場所，我們就叫牠空間。即空間爲宇宙全體的無限展擴 上下、前後、左右均是達到無止境，有不能想像的大。

立體是空間的一部分，而幾何學所研究的是形狀、大小及位置，故可以說是研究空間的學問。

立體是空間的一部分，即立體的外部都是空間的另一部分，故在立體和空間另一部分之間，非有境界不可，這境就是表面。這表面是不屬於立體，也不屬於空間的另一部分，所以沒有厚薄的。這裏須要注意的，一物體和他一物體相隔離而存在時，其中便有了空隙，故宇宙間所存在的許多物體之間，常有種種空隙，但不可只把這些空隙當是空間。原來物體不過是物質的組成了一定的形狀而占有了空間的一部分，所以這些空隙是空間，原無疑問，即該體所在的地方，也是空間。所以物體的存在於空間是和物體的存在於水及空氣中，把水和空氣排斥開去而占有其地位者不同，物體所在的地方，仍還是空間。

直六面體的一稜 AB, 只有從 A 向 B 的一個方向推展。所以

線一般只有一個向，卽是只有長而無闊及高(或厚)。

直六面體的一個頂點 A,不向任何方向推展,沒有向。所以

點一般沒有大小,只有位置。

6. 上面由一個立體,我們分解出來得了表面、線、點等種種東西。其實不根據立體,我們也可以想像這些物事的。例如把粉筆灰想像做沒有大小的點,把絲線想像作無闊及厚的,便是線了。把紙想像做沒有厚的,便可以當做面了。

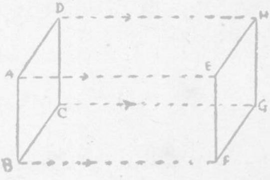

圖 2

現在想像一個表面 $ABCD$, 使牠照箭頭的方向移動,達到 $EFGH$ 的位置。這時:

(i) 點 A 所移動的痕跡是線 AE,

(ii) 線 AB 所移動的痕跡是表面 $ABFE$,

(iii) 表面 $ABCC$ 所移動的痕跡是立體 $ABCD\ EFGH$.

一般,點運動時產生線,線運動時產生表面,表面運動時產生立體。

所以也可以說線含有無數的點, 表面含有無數的線, 立體含

表面沒有厚,所以無論多少表面疊合起,不能成爲立體的。因爲本來無厚的東西無論疊合了多少,還是不會生厚的。

照上面同樣的理論,線拚合攏來,也無論如何拚不成面, 點積集起來, 也無論如何積不成線的。因爲線本來沒有闊及厚,所以拚不出闊來, 點本來沒有大小, 自然積不起長來的。

點,線,面的運動,和點線面的積集不同,積集不能改動其位置, 而運動卻是把位置移動了。所以點,線面的積集不能構成線,面,立體,而其運動卻能產生了這些

有無數的表面。

請問，使立體運動時又生什麼呢？又線運動而不產生表面，表面運動而不產生立體的特別情形有否？

7. 點用・或×表示之，要指示時，則於其傍記一大寫的羅馬字母，例如附記了 A，則讀點 A，或 A 點。

線用 —— ⌒ 等表示之。

表示表面用其作境界的線，表示立體用其作境界的表面。要指示線表面及立體時，普通用其中特殊的點所附注的文字。

8. 點、線、表面、立體或此種物事的集合體，叫做'圖形'。

(二) 直 線

9. 預備問題　把直六面體的稜和圓錐的底圓比較，有怎樣的差別？

線分直線和曲線二種。

如直六面體的稜或角錐的稜，便是直線。圓柱或圓錐的底圓是曲線。

10. 預備問題　取直六面體的一稜，固定其上的二點而迴轉之，其時此稜在空間的位置變更否？又取圍成圓柱底面的線，固定其上的二點而迴轉之，又怎樣？從

所謂含有無數，即指在立體中可以想像無數的表面，在表面上可以想像無數的線，在線上可以想像無數的點。

點沒有大小，線沒有闊及厚，所以無論把鉛筆削得怎樣尖銳，或用針尖總不能把幾何學上的線和點表出來。但幾何學是常常用到這點、線、面、立體的，故只得用一種不完備的記號，即用平常的鉛筆之類畫出來。

表點線面所用之字母，常用羅馬字母之大楷。

幾何學是研究物體的形狀、大小、位置的科學，由着眼於物體的形狀、大小、位置，我們得着了立體表面、線、點的圖形思想。所以幾何學不外即是研究此種圖形的性質的，所以也可以說幾何學是研究圖形的性質的科學。

那裏就可以區別直線和曲線的不同?

固定一線上的二點而迴轉此線時，其在空間的位置不生變化者，是直線。

11. 實地引直線時，常用直規，或叫直尺，是金屬或木材所製成的板條，其邊爲成直線形者，如右圖：

圖 3

12. 預備問題 (a) 用直規引過二點 A,B 之直線，看可以引幾線?
(b) 用直規引二直線而檢查此二直線能否含有二點以上的共有之點?

過二點只有唯一的直線。

故直線由二點而定，從而共有二個點的二直線，勢必相合而成爲一個直線。

二點之間，引以直線，叫做'聯結'這二點。

二直線共有的點，不能多於一點。

因之二直線只能共有一個唯一的點，這時稱二直線相交，這唯一的共有點，是二直線的交點。

13. 指示直線，通例用其上二個點所附記的大寫羅馬字母，如 A——B，讀爲直線 AB。又有時也有小寫的羅馬字母附記於直線，以表示之，如 a—— 則讀爲直線 a 了。

14. 利用直線的性質，可以檢驗直規的正確與否，其法如次:

先用直規之一邊，於二點 A, B 間引一直線，次將直規翻轉，仍於前記二點 A,B 間再引一直線。若直規正確，則二線當一致相合，直規不正確，則不能相合。

準確　　圖 4　　不準確

15. 用直規引直線 AB,次把直規沿 AB 滑下,引直線 BC,再把直規沿 BC 滑下,引直線 CD,

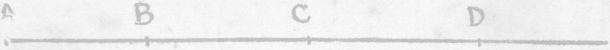

圖　5

次第如此做去。

直線得無限延長。

單稱直線時,其中卽含有其長無限的意思。特地只指直線的一部分時,則叫做'線分',或'有限直線'。在二點間所引[illegible]線的長,稱爲這二點間的距離。

通常說甲地和乙地的距離,是指甲乙二地間的路程,但在幾何學上所說二點間的距離,是其間的直線距離,卽有最短距離之意,這是須注意的。

16. 預備問題　述直接比較二絲線長短的方法。

以一線分疊合到他一線分上,使其一端點相合時,設其他一端點亦相合,則此二線分之長相等。若第二端點不相合,則此二線分之長不相等,而第二端點落在他一線分之延長上者爲大。

實際比較二線分的長短時,記一線分之長於直規之一邊上卽以此直規湊合到他一線分上而比較之。通常用尺度量一線分之長,再量他一線分之長而相比較,也不過這個方法的應用。

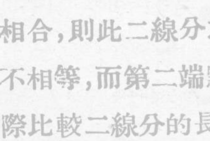

圖　6

於此圖中　$AB=CD$,

$AB>EF$,

$EF<CD$.

17. 今有二線分 AB, CD,使 AB 向 C 的方向延長到 E,使線分 BE 之長與線分 CD 相等,則線分 AE 是 AB,CD 之'和'了。卽

用下式表之。

$$AE=AB+CD.$$

線分 AB 較 CD 大時，於 AB 上截取和 CD 等長的 BF，則線 AF 是 AB, CD 的差，即　　　$AF=AB-CD.$

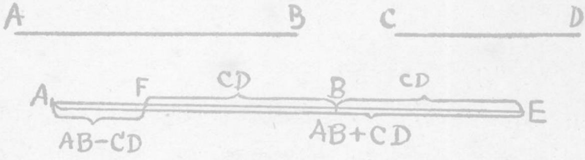

圖　7

18. **預備問題**　述以一尺爲單位，量一條線的長的方法。

從線分 AB 之一端起，順次截取與線分 CD (例如一尺)相等的部分，如有殘餘 EB 時，把 CD 分爲若干等分，使其一部分 CF 較 EB 爲小。再從 EB 之一端起，截取與 CF 等長 (例如一寸) 的部分。次第如此，即是以線分 CD 量線分 AB。

以 CD 爲單位量線分 AB 時，若 AB 恰好含有幾段的 CD，則表 AB 的數爲整數。倘不如此，而有另餘的含有 CD 的若干等分之幾，則表 AB 的數帶有分數了。表 AB 的數有稱爲 AB 的數值的。

圖　8

19. 過 O 點引一直線，於其上取與線分 CD 相等之 OA, Ob

幾何學上二線之長相同時，不用同而用相等二字表之。在同一物的再指出時，才用同字。即相等是用在量的比較上。因爲量不限於長短，故一般在比較量而不相等時，常用大小二字而不用長短、闊狹等獨特的稱謂。

$=$就是表相等的符號，$>$就是表大於的符號，$<$就是表小於的符號。

量的比較只有相等、大於或小於三者，此外不會發生別的情形。

時，線分 AB 於 O 點分爲相等的 OA,OB 二部分，O 點名叫線分 AB 的中點。

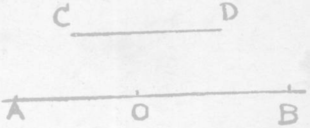
圖 9

線分的中點，卽是分此線爲相等二部分的點。

練習問題　已知三線分 a,b,c 之長。

(1)　作與 $a+b+c$ 相等的線分。

(2)　作與 $2a, 3a, 5a$ 相等之線分。

(3)　作與 $3a+2b, 3a-2b, 3a+b-2c$ 相等之線分。

(4)　用尺度作與 $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a$，相等的線分。

(5)　作與 $a-b$ 相等的線分。次用尺度表示此線分之長，等於 a,b 二線分之差。

(三)　平面及平面形

20. 預備問題　試比較直六面體的面和圓柱體的側面，有什麼不同？

表面分平面和曲面二種。

直六面體或角錐等的面是平面，圓柱或圓錐等的側面是曲面。

21. 預備問題　取直規，以其一邊置直六面體上，使過其上之任意二點。看此時直規的邊和直六面體的面常密接否？若以直規置圓柱的側面上，則又何如？木匠鉋平板時，常用曲尺的邊去湊合板面而觀察，何故？怎樣可以區別平面和曲面？

過表面上任意二點的直線，全與此表面密接時，則此表面是平面。

一線分的中點，也叫二等分點，只有唯一的點。O 是線分 AB 的中點時，$OA=\frac{1}{2}AB$，或 $AB=2AO,=2OB$.

一直線與平面密接時，叫這直線在平面上。

22. 二鏡子的面相疊合，或以直六面體置於案桌上，此等表面如是平面，則必全然密接，卽一般；

二平面相疊合時，此二面全相密接。

23. 直六面體的一面是由直線圍成的，圓柱體的底面，則由曲線圍成。

曲線或直線所圍成平面的部分，叫平面形。平面形由直線所圍成的叫多角形或直線形。圍成多角形的各線分，叫多角形的邊。相隣二邊的交點叫頂點，

如圖 $ABCDE$ 是多角形，線分 AB, BC, CD, DE, EA 是多角形的邊，而點 A, B, C, D, E 是多角形的頂點。

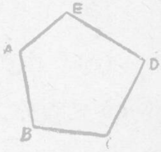

圖 10

24. 預備問題　於直六面體的一面或角錐的一面，試查察其邊數和頂點之數。再任意畫一多角形，而查察其邊數和頂點的數，這些數中間有何關係，其理由如何?

表面分平面和曲面二種，平面和曲面怎樣區別，或問平面是怎樣的面，我們平常只有漠然的不正確的回答。平面和曲面的最顯著的差異卽如在上記〔21〕所說的，可以實驗出來，卽同鏡子一般的平面，若把正確的直規的一邊放置上去，一定全然密合不論放在平面的那一部分。而曲面則否。

平面的性質:

1. 平面的廣幅無限，同直線的可以無限延展一樣，平面也是向四周無限制擴大的。也可以像劃直線的一部分爲線分把平面劃出各形而研究。

2. 二個平面可以相疊合。

3. 平面可以摺合，其摺痕爲直線。又於平面上畫一直線，可以此直線爲摺痕而摺合二平面，其時二平面相疊合了。