经济控制论

Economic Cybernetics

龚德恩 著

高等教育出版社

经济控制论

Economic Cybernetics

龚德恩　著

高等教育出版社

内容简介

本书共分七章,第一,二章介绍离散与连续时间动态系统的状态空间模型及其求解方法,第三,四章介绍离散与连续时间动态系统的稳定性理论与经济应用,第五章介绍线性系统的反馈控制与经济应用,第六,七章介绍离散与连续时间系统的最优控制与经济应用。本书的特点是:在介绍经济学文献中常用的控制论基本原理与方法的基础上,介绍了大量的经济应用模型,如市场价格波动模型,动态 IS-LM 模型,动态 AD-AS 模型,失业与通货膨胀相互作用模型,动态投入产出模型,经济增长模型等约 30 个模型。每章末均配有习题。阅读本书仅要求读者具备大学本科“西方经济学”与“经济数学”的基础知识。

本书可作为大学经济管理类专业高年级本科生、硕士研究生的教材,也可供经济与管理实际工作者学习、参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济控制论 / 龚德恩著. —北京:高等教育出版社,2009.1
ISBN 978-7-04-024913-2

Ⅰ.经… Ⅱ.龚… Ⅲ.经济控制论 Ⅳ.F224.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 176393 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 李卫青
版式设计 王艳红 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2009年1月第1版
印 张	20	印 次	2009年1月第1次印刷
字 数	370 000	定 价	28.20元

物料号 24913-00

序

发展社会主义市场经济，离不开运用宏观经济调控。依靠“无形之手”来配置资源，需要“有形之手”与之配合。这已为我国改革开放30年实践所证实，成了美国学者斯蒂格列茨等人提出的“北京共识”区别于“华盛顿共识”的一个重要标志。

宏观经济调控主要是政府用经济、行政、法律等多种手段对经济运行所做的调控，同时还有非政府的社会调节，以及行业和企业尤其是特大企业的自律（自我控制）。对经济活动的调控、调节、控制，均可运用经济控制论的原理和方法。经济控制论乃是数量经济学的重要分支之一。

龚德恩教授是我的好友，他在数学、控制论方面的学术造诣较深，曾参加过我主编的《宏观经济控制论》（辽宁人民出版社，1990年）一书的写作。龚德恩教授早于1988年就出版了《经济控制论基础》（中国人民大学出版社），现在他又在总结自己多年教学经验的基础上，编著了摆在我们面前的《经济控制论》一书。该书系统地阐述了控制论的原理和方法，探讨了它们在经济中的应用，列举了失业与通货膨胀相互作用模型等30个左右的经济控制论应用模型。全书共分七章，附有若干习题。这不仅是一本规范的经济控制论教材，而且还是一本不可多得的饱含作者心得的经济控制论学术专著。

本书的出版，将使数量经济学专业的师生增添了有益的读物，还将帮助从事宏观经济调控的实际工作者掌握经济控制论的原理和方法。这正是我与作者共有的希望和心愿之所在。是为序。

乌家培

2008年11月20日

于华侨大学校园

前　言

控制论是定量研究客观事物的发生、发展及对它的发展过程进行控制的科学。① 控制论的一般原理与方法不但广泛应用于工程技术系统，也大量应用于社会、经济、管理、自然资源、能源、生物生态、环境保护、医药卫生等众多非工程技术系统。

长期以来，经济学家与控制论专家互相学习与合作，将控制论的一般原理与方法应用于对经济系统的运动规律与控制方法的研究，取得了丰硕的成果，并形成了一门新的学科——经济控制论。但是，迄今为止，不同知识背景的人对经济控制论的定义仍有不同的理解。乌家培教授在其主编的《宏观经济控制论》[5]中曾指出："纵观现有经济控制论书籍的体系，不外乎两种。第一种是按控制论逻辑展开，从控制出发联系经济……。第二种是按经济学逻辑展开，从经济出发运用控制……。"张金水教授在《经济控制论》[4]中也作过类似的定义："定义 1：经济控制论是控制理论概念和方法在经济学中的各种应用。定义 2：经济控制论是应用控制理论概念与方法来描述的经济学。"

目前国内已出版的《经济控制论》基本上都属于上述第一种体系或定义 1。比如张金水教授已出版的三本《经济控制论》[2,3,4]；作者本人 1988 年出版的《经济控制论概论》和这次新编的《经济控制论》。属于第二种体系或定义 2 的，仅见到乌家培教授主编的那本《宏观经济控制论》。

虽然人们对经济控制论的定义仍有不同的理解，但对如下三个基本点的认识是基本一致的：

1. 经济控制论的研究对象是经济系统（包括管理系统）；
2. 经济控制论的任务是，分析与研究经济系统的运动规律与控制方法；
3. 经济控制论使用的方法主要是控制论的基本原理与方法。

因此，可将经济控制论定义为：运用控制论的一般原理与方法，分析与研究经济系统运动规律与控制方法的学科。

在西方经济学文献中，很少见到以《经济控制论》为书名的出版物。但是，很多高水平的经济学专著或教材，都以控制论的基本原理与方法作为分析研究经济问题的主要工具。例如，国内已翻译出版的三本高水平宏观经济学著作：托马

① 宋健《自动化》创刊词，1983(1)。

斯·J·萨金特的《宏观经济理论》;奥·琼·布兰查德,斯·费希尔的《宏观经济学(高级教程)》;戴维·罗默的《高级宏观经济学》。他们都是按经济学逻辑或结构,先构造出动态经济模型,然后运用控制论的稳定性理论与最优控制方法去分析研究所构造模型的运动规律与控制方法。实际上,这三本宏观经济学可视为前述第二种体系或定义2的《经济控制论》或《宏观经济控制论》。此外,还有书名为《经济学中的分析方法》,《经济数学方法与模型》,《经济动态学》,《数理经济学》等经济学著作,按控制论逻辑或数学逻辑展开,同样大量用到控制论的原理与方法。

从目前国际上已出版的高水平经济学著作与重要学术期刊上发表的论文来看,越来越多地运用控制论原理与方法是一种趋势。显然,一个从未学习过控制论基本原理与方法的人,要想看懂这些高水平著作与论文,将会遇到极大的困难。

本书是在总结作者多年教学经验的基础上编写的,目的是向读者介绍控制论的基本原理和方法,以及这些基本原理与方法在经济学中的应用。

全书共分七章,按控制论逻辑(状态空间模型→稳定性→控制)与数学逻辑(先离散系统后连续系统)相结合的结构编写。第一、二章分别介绍离散与连续时间动态系统的状态空间模型及其求解方法。全书将以统一的状态空间模型作为分析的基础。第三、四章分别介绍离散与连续时间动态系统的稳定性分析及其经济应用。第五章介绍定常线性系统的反馈控制原理及其经济应用。第六、七章分别介绍离散与连续时间动态系统的最优控制理论及其经济应用。

本书的一个重要特点是,在介绍经济学文献中经常用到的控制论基本原理与方法的基础上,介绍了大约30个重要且较具代表性的经济应用模型。例如,市场价格波动模型,一般竞争均衡模型,动态IS-LM模型,动态AD-AS模型,失业与通货膨胀相互作用模型,动态投入产出模型,经济增长模型等。并对这些模型的运动规律或控制策略进行了深入浅出、条理清晰的分析与研究。

各章末均配备了一定数量的习题。这些习题既有控制论内容的(用来检验读者对控制论基本原理与方法的理解程度);也有经济应用方面的。有些习题可能有一定的难度。

读懂本书内容仅要求财经类专业大学本科生学习过的"西方经济学"与"经济数学"(微积分与线性代数部分)的基本知识。书中注有*号的§7.3可以略去,不会影响对后续内容的学习。另外,本书各章之间既有联系,也有一定的独立性,教师在实际教学时,也可采用其他授课次序。例如,先讲一、三、五、六章,再讲二、四、七章;或者相反。教师对书中介绍的经济应用模型可以有选择地讲授,不必全讲,未讲部分由学生自学。

本书承蒙我国著名经济学家乌家培教授作序，特此致谢、本书能顺利出版，得益于高等教育出版社有关领导的大力支持，特此致谢。策划编辑马丽同志、责任编辑张耀明同志为本书的出版，付出了辛勤的劳动，也向他(她)们表示衷心感谢。

限于水平，书中存在错误或不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便再版时更正。

龚德恩

2007年7月12日

目　录

第一章　离散时间动态系统的状态空间模型及其解法

由于经济统计、计划、管理与调控等经济活动，一般均以年、季、月、日等为时间计量单位，故建立的经济系统数学模型为离散时间形式的数学模型. 这类数学模型在数学中称为差分方程或差分方程组，而在控制理论中往往将差分方程(组)变形为状态方程和输出方程，称为状态空间模型.

本章介绍如何将一个动态经济模型化为离散时间状态空间模型，如何求状态空间模型的解，即如何对经济系统进行运动分析.

§1.1　离散时间动态系统的状态空间模型

我们先从两类典型的实际经济模型的分析出发，从而导出离散时间状态空间模型的一般形式.

一、微观经济模型

考虑单一的商品市场的供需变化规律.

假设某种商品(例如大米、汽车、电视机、电冰箱等)的需求函数和供给函数分别为

$$D = D(p), \qquad S = S(p) \tag{1.1.1}$$

其中 D、S 和 p 分别为该商品的需求量、供给量和价格；$D(p)$、$S(p)$ 为价格 p 的已知函数. 对于不同的商品，$D(p)$ 和 $S(p)$ 的具体形式会不同，这反映不同商品的市场结构的差别. 一般地说，对于大多数商品，价格上升(下降)，需求量减少(增加)，而供给量增加(减少)，这表明需求函数 $D(p)$ 为价格 p 的单调减少函数，供给函数 $S(p)$ 为价格 p 的单调增加函数，如图 1.1.1 所示.

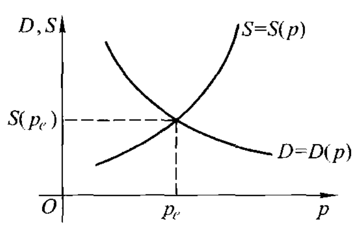

图 1.1.1　静态供需均衡模型

使等式

$$D(p)=S(p) \tag{1.1.2}$$

成立的价格 p(记为 p_e),称为(静态)供需均衡价格,简称为(静态)均衡价格.

例如某商品的需求函数、供给函数为如下线性函数:

$$D=a-bp \quad ,S=-\alpha+\beta p \tag{1.1.3}$$

其中 a、b、α、β 为正的常数.

将式(1.1.3)代入供需均衡条件式(1.1.2),不难求得静态均衡价格为

$$p_e=\frac{a+\alpha}{b+\beta} \tag{1.1.4}$$

上面的分析未考虑时间的变化对商品需求量、供给量和价格的影响. 实际上,任何商品的需求量、供给量和价格都会随时间的变化而变动的. 一般而言,消费者是价格的被动接受者,其需求量为当期实际价格的单调减少函数,而生产者是价格的主动决策者,其供给量不是由当期实际价格决定的,而是由生产者的预期价格决定的. 因此,考虑到时间变化的需求函数和供给函数的一般形式为

$$D_t=D(p_t),\quad S_t=S(p_t^*) \tag{1.1.5}$$

其中 D_t、S_t、p_t、和 p_t^* 分别为某商品 t 期的需求量、供给量、实际价格和生产者的预期价格.

显然,为了分析商品的需求量、供给量和实际价格的动态变化规律,应先确定生产者预期价格 p_t^*. 关于预期价格的确定,文献中常见的有四种形式:(1) 传统预期 $p_t^*=p_{t-1}$,即 t 期预期价格为前期价格. (2) 参照正常价格预期 $p_t^*=p_{t-1}+c(p_N-p_{t-1})$,$0\leqslant c<1$,其中 p_N 称为正常价格,通常取 p_N 为静态均衡价格,即 p_N 满足方程 $D(p_N)=S(p_N)$. 这种预期价格是在前期价格的基础上,根据前期价格偏离正常价格的情况调整本期的预期价格. 前期价格低于正常价格时,本期预期价格上调;反之,则下调. (3) 适应性预期 $p_t^*=p_{t-1}^*+\delta(p_{t-1}-p_{t-1}^*)$,$0<\delta\leqslant 1$. 这种预期价格是在前期预期价格的基础上,根据前期实际价格与预期价格的偏离情况,调整本期的预期价格. (4) 心理预期 $p_t^*=p_{t-1}+\rho(p_{t-1}-p_{t-2})$. 这种预期价格是根据前期实际价格和前期实际价格变动的情况,调整本期预期价格. 其中调节参数 ρ 的符号不定,这反映不同人对市场未来发展趋势所作出的不同心理反应. 当 $\rho>0$ 时,称为外推预期,它反映对市场价格总是看涨的人的心理;当 $\rho\leqslant 0$ 时,称为内推预期,它反映对市场价格偏向于保守的人的心理.

由上述四种预期价格,可得到相应的四个模型:

(1) 传统预期价格模型

$$\begin{cases} D_t=D(p_t) \\ S_t=S(p_t^*)=S(p_{t-1}) \\ D_t=S_t \end{cases} \tag{1.1.6}$$

由式(1.1.6)可知,如果$t-1$期价格p_{t-1}已知,则t期市场上该商品的供给量为$S(p_{t-1})$,而使这一供给量恰好售完的价格p_t由动态均衡条件

$$D(p_t)=S(p_{t-1}),t=1,2,3,\cdots \tag{1.1.7}$$

确定.

如果存在一个价格$p_e>0$,使当$p_t\equiv p_{t-1}=p_e$时,式(1.1.7)仍成立,则称p_e为动态均衡价格.

由式(1.1.7)易知,如果初始价格p_0已知,则由式(1.1.7)可求出价格p_1,以及相应的供给量和需求量:

$$Q_0=S(p_0)=D(p_1)$$

再由p_1类似地求出价格p_2,以及相应的供给量和需求量:

$$Q_1=S(p_1)=D(p_2)$$

如此继续下去,可得到任意的t期价格p_t,以及相应的供给量和需求量:

$$Q_{t-1}=S(p_{t-1})=D(p_t),t=1,2,3,\cdots$$

在需求函数和供给函数满足一定条件的情况下,最终得到均衡价格p_e和相应的供需均衡数量:$Q_e=S(p_e)=D(p_e)$.

图1.1.2描述了上述价格和供需量的动态变化过程,由于该图的形状恰如一张蜘蛛网,故通常称其为蛛网模型.

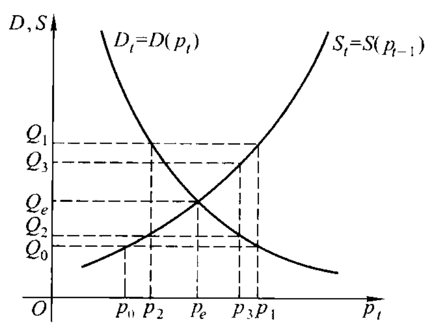

图1.1.2 蛛网模型

动态均衡条件可改写为

$$p_t=D^{-1}(S(p_{t-1}))\triangleq f(p_{t-1}),t=1,2,3,\cdots$$

或者

$$p_{t+1}=D^{-1}(S(p_t))\triangleq f(p_t),t=0,1,2,\cdots \tag{1.1.8}$$

其中$D^{-1}(\cdot)$表示需求函数的反函数.

在控制理论中,称式(1.1.8)为状态方程,称p_t为状态变量.

如果需求函数和供给函数取为线性形式(1.1.3),则模型(1.1.6)为

$$\begin{cases} D_t = a - bp_t, & a > 0, b > 0 \\ S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}, & \alpha > 0, \beta > 0 \\ D_t = S_t \end{cases}$$

由此可得状态方程为

$$p_{t+1} = \left(-\frac{\beta}{b}\right)p_t + \frac{a+\alpha}{b}, t = 0,1,2,\cdots \tag{1.1.8$'$}$$

而动态均衡价格为

$$p_e = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$$

此即前面得到的静态均衡价格.

(2) 参照正常价格的预期价格模型

$$\begin{cases} D_t = D(p_t) \\ S_t = S(p_t^*) = S(p_{t-1} + c(p_N - p_{t-1})) \\ D_t = S_t \end{cases} \tag{1.1.9}$$

与(1) 中类似地可将式(1.1.9) 化为状态方程

$$p_{t+1} = D^{-1}[S((1-c)p_t + cp_N)] \tag{1.1.10}$$

取需求与供给函数为线性形式(1.1.3) 时,可得状态方程

$$p_{t+1} = -\frac{\beta(1-c)}{b}p_t + \frac{1}{b}(a + \alpha - c\beta p_N), t = 0,1,2,\cdots \tag{1.1.10$'$}$$

(3) 适应性预期价格模型(线性形式)

$$\begin{cases} D_t = D(p_t) = a - bp_t \\ S_t = S(p_t^*) = -\alpha + \beta p_t^* \\ p_t^* = p_{t-1}^* + \delta(p_{t-1} - p_{t-1}^*), 0 < \delta \leqslant 1 \\ D_t = S_t \end{cases} \tag{1.1.11}$$

经过简单的运算,消去 p_t^*、p_{t-1}^*,可得模型(1.1.11) 的对应状态方程为

$$p_{t+1} = \left(1 - \frac{(b+\beta)\delta}{b}\right)p_t + \frac{(a+\alpha)\delta}{b}, t = 0,1,2,\cdots \tag{1.1.12}$$

(4) 心理预期价格模型(线性形式)

$$\begin{cases} D_t = D(p_t) = a - bp_t \\ S_t = S(p_t^*) = -\alpha + \beta p_t^* \\ p_t^* = p_{t-1} + \rho(p_{t-1} - p_{t-2}) \\ D_t = S_t \end{cases} \tag{1.1.13}$$

消去 p_t^*,由模型(1.1.13) 可得

$$p_t + \frac{(1+\rho)\beta}{b}p_{t-1} - \frac{\rho\beta}{b}p_{t-2} = \frac{a+\alpha}{b} \tag{1.1.14}$$

这是关于实际价格 p_t 的二阶差分方程.

若令

$$x_1(t)=p_{t-2},x_2(t)=p_{t-1}$$
$$u(t)=(a+\alpha)/b,y(t)=p_t$$

则由式(1.1.14)可得

$$\begin{cases}x_1(t+1)=p_{t-1}=x_2(t)\\ x_2(t+1)=p_t=\dfrac{\rho\beta}{b}x_1(t)-\dfrac{(1+\rho)\beta}{b}x_2(t)+u(t)\end{cases}$$

$$y(t)=p_t=\frac{\rho\beta}{b}x_1(t)-\frac{(1+\rho)\beta}{b}x_2(t)+u(t)$$

改写成矩阵形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \rho\beta/b & -(1+\rho)\beta/b\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t) & (1.1.15a)\\ y(t)=(\rho\beta/b,\quad -(1+\rho)\beta/b)\boldsymbol{x}(t)+u(t) & (1.1.15b)\end{cases}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$,称为状态向量,而$x_1(t)$、$x_2(t)$称为状态变量;$u(t)$称为控制变量或输入变量;$y(t)$称为输出变量或观测变量. 称式(1.1.15a)为状态方程,称式(1.1.15b)为输出方程或观测方程,而式(1.1.15)称为状态空间模型.

差分方程(1.1.14)或状态空间模型(1.1.15)的控制论框图如图1.1.3所示,其中$\rightarrow\boxed{z^{-1}}\rightarrow$表示延迟算子或延迟环节.

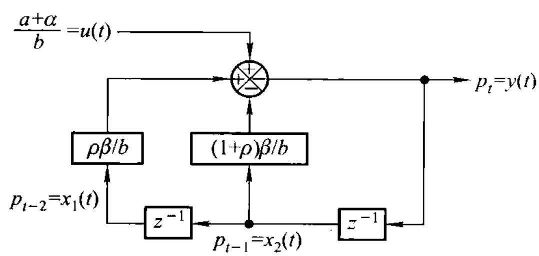

图1.1.3 式(1.1.14)和式(1.1.15)的控制论框图

二、宏观经济模型

考虑一个国家或地区的宏观经济.

著名经济学家凯恩斯(Keynes)建立了如下宏观经济模型:

$$\begin{cases}Y=C+I\\ C=a+bY,\quad a\geqslant 0,\quad 0<b<1\end{cases}\tag{1.1.16}$$

其中Y为国民收入,C为总消费水平,I为总投资水平,a为基本消费水平,b为边际消费倾向. 式(1.1.16)中第一个方程为总需求等于总供给的平衡条件,第二

个方程为消费函数.

将式(1.1.16)中消费函数代入平衡条件,可得

$$Y=\frac{1}{1-b}I+\frac{a}{1-b} \tag{1.1.17}$$

其中$\frac{1}{1-b}>1$,称为凯恩斯乘数,由式(1.1.17)可知,若总投资增加1个单位,则国民收入增加$\frac{1}{1-b}$个单位.

凯恩斯模型(1.1.16)是一种静态宏观经济模型,不能完全反映经济现实.萨缪尔森(Samuelson)等经济学家在此基础上进行了更深入的研究,建立了各种动态宏观经济模型,下面介绍三种具代表性的模型.

(1) 萨缪尔森乘数加速数模型

1970年诺贝尔经济学奖获得者萨缪尔森教授对上述凯恩斯宏观经济模型作了三点改进:一是将总消费、总投资中的公共消费、公共投资区分出来,作为新的经济总量,即政府(购买)支出,引入均衡条件;二是将消费函数改为动态的,即现期个人消费是上期国民收入的函数,而不是现期收入的函数;三是增加了投资函数,假定现期投资是上期到现期的消费增量的函数,即投资由消费增加的需要来决定.

用公式表示,萨缪尔森乘数加速数模型为

$$\begin{cases}Y_t=C_t+I_t+G_t\\ C_t=a+bY_{t-1}, \quad a\geqslant 0, \quad 0<b<1\\ I_t=q+k(C_t-C_{t-1}), \quad k>0\end{cases} \tag{1.1.18}$$

其中Y_t为t期国民收入(即国民生产总值或国内生产总值),C_t为t期个人消费总额,I_t为t期个人投资总额,G_t为t期政府购买支出;a、b、q、k为正的常数,b为边际消费倾向,k为投资加速数,表明消费量增加时投资将相应地增加.

由式(1.1.18)消去C_t、I_t,可得关于Y_t的二阶差分方程

$$Y_t-(1+k)bY_{t-1}+kbY_{t-2}=G_t+a+q \tag{1.1.19}$$

给定G_t时,由式(1.1.19)可解出Y_t,再由消费函数确定C_t,由投资函数确定I_t.

若令

$$\begin{cases}x_1(t)=C_t, \quad x_2(t)=I_t\text{——状态变量}\\ u(t)=G_t\text{——控制(输入)变量}\\ y(t)=Y_t\text{——输出变量}\end{cases}$$

则由式(1.1.19)可得状态空间模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\begin{bmatrix}b & b\\ k(b-1) & kb\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}b\\ kb\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t) & (1.1.20\text{a})\\ y(t)=(1, \quad 1)\boldsymbol{x}(t)+u(t) & (1.1.20\text{b})\end{cases}$$

其中式(1.1.20a)为状态方程,式(1.1.20b)为输出方程,$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 为状态向量;$\boldsymbol{w}(t)=(a,\ q)^{\mathrm{T}}$ 称为参考输入或干扰输入.

(2) 希克斯经济周期模型

1972 年诺贝尔经济学奖获得者希克斯(Hicks)为了研究国民收入的周期波动建立了一个与萨缪尔森乘数加速数模型类似的宏观经济模型,二者的主要区别在于投资函数的不同. 希克斯是从国民收入增长的可能性来决定投资. 希克斯模型为

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G_t \\ C_t = a + bY_{t-1} \\ I_t = q + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{cases} \tag{1.1.21}$$

消去 C_t、I_t,由式(1.1.21)可得关于 Y_t 的二阶差分方程:

$$Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} = G_t + a + q \tag{1.1.22}$$

与(1)中类似地,令

$$\begin{cases} x_1(t) = Y_{t-2}, \quad x_2(t) = Y_{t-1} \\ u(t) = G_t \\ y(t) = Y_t \end{cases}$$

则由式(1.1.22)可得状态空间模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & b+k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) \\ y(t) = (-k,\ b+k)\,\boldsymbol{x}(t) + u(t) + (1,\ 1)\,\boldsymbol{w}(t) \end{cases} \tag{1.1.23}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{w}(t)=(a,\ q)^{\mathrm{T}}$.

(3) 史密斯经济增长与货币政策综合模型

前两个模型均未考虑货币政策因素对经济增长的影响. 经济学家史密斯(Smyth)在希克斯模型的基础上,引入货币政策因素,得到如下"经济增长与货币政策综合模型":

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G_t \\ C_t = bY_{t-1}, 0 < b < 1 \\ I_t = k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - cR_{t-1}, \quad k > 0, c > 0 \\ R_t = R_{t-1} + h(H_{t-1} - M_{t-1}), \quad h > 0 \\ H_t = dY_{t-1} + (e - jR_t), \quad d, e, j > 0 \end{cases} \tag{1.1.24}$$

其中 Y_t、C_t、I_t 和 G_t 分别为 t 期国民收入、个人消费、个人投资和政府支出;R_t 为 t 期利率,H_t 为 t 期货币需求量,M_t 为 t 期货币供给量,b、k、c、h、d、e、j 均为正的常数.

由式(1.1.24)消去 C_t、I_t、H_t,可得关于 Y_t、R_t 的差分方程组:

$$\begin{cases} Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} + cR_{t-1} = G_t \\ R_t - (1-jh)R_{t-1} - dhY_{t-2} = h(e - M_{t-1}) \end{cases} \tag{1.1.25}$$

若令

$$\begin{cases} x_1(t) = Y_{t-2}, \quad x_2(t) = Y_{t-1}, x_3(t) = R_{t-1} \text{—— 状态变量} \\ u_1(t) = G_t, u_2(t) = e - M_{t-1} \text{—— 控制变量} \\ y_1(t) = C_t, y_2(t) = I_t \text{—— 输出变量} \end{cases}$$

则由式(1.1.25)可得状态空间模型：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & b+k & -c \\ 0 & dh & 1-jh \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ -k & k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{\mathrm{T}} \text{—— 状态向量} \\ \boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm{T}} \text{—— 控制向量} \\ \boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^{\mathrm{T}} \text{—— 输出向量} \end{cases}$$

三、离散时间动态经济系统的状态空间模型

1. 状态空间模型的一般形式

由上面介绍的微观与宏观经济系统的例子可知，一个离散时间动态经济系统化为状态空间模型时，应包括状态方程和输出方程两组方程．状态空间模型的一般形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t), t], t = 0,1,2,\cdots & (1.1.26\text{a}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t), t], t = 0,1,2,\cdots & (1.1.26\text{b}) \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)$为n维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为m维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$为r维输出向量，$\boldsymbol{w}(t)$为l维参考输入或干扰输入向量(有时不出现)；(1.1.26a)称为状态方程，$\boldsymbol{f}[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$为已知的$n$维向量函数，式(1.1.26b)称为输出方程，$\boldsymbol{g}[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$为已知的$r$维向量函数．

状态空间模型的框图如图1.1.4所示．

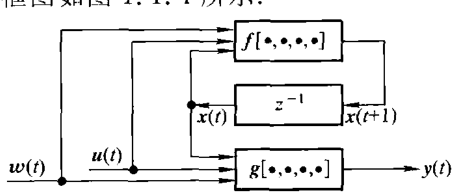

图1.1.4　状态空间模型(1.1.26)的框图