几何解题探索

——解几何题的辅助转化工具

中学生读物

李 淦 林

广东科技出版社

中 学 生 读 物

几何解题探索

——解几何题的辅助转化工具

李 淦 林

广东科技出版社

Jihe Jieti Tansuo

几何解题探索

——解几何题的辅助转化工具

李 淦 林

*

广东科技出版社出版发行

广 东 省 新 华 书 店 经 销

广 东 新 华 印 刷 厂 印 刷

787×1092毫米 32开本　13.25印张　265，000字

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷

印数1—2,100册

ISBN 7—5359—0385—1

O·21　　定价4.30元

内 容 简 介

本书是介绍如何综合运用几何、代数、三角知识来解几何题的中学生读物．

书的内容打破了几何课程的知识体系，系统引入几何、代数、三角问题相互转化的各种辅助工具，通过大量例题，揭示综合运用多方面知识解几何题的方法技巧．内容包括：添辅助线，作辅助圆，引辅助角，设辅助量，建立辅助坐标系，平面几何、代数、三角知识在解析几何中的运用等．

本书以几何例题为主，注重解题思路分析，力求沟通几何、代数、三角知识的联系，“形中有数，数中有形”．书中配备有系列练习题，供读者练习使用．

本书可用作中学生学习几何课程的辅导读物，也可供中学教师教学时参考．

前　言

怎样解几何题？如何沟通几何与代数、三角的关系，综合运用它们来分析问题和解决问题？对于这些问题，这本读物可望能给中学生（特别是高中学生）有所启发和收益．

求解几何题时，引入转化的辅助工具十分重要．

凡碰到几何问题，大都有这样的感受：有时苦思冥想良久，似乎“山穷水尽”；一旦引出巧妙的辅助线，顿觉“柳暗花明”，问题迎刃而解．因此，添设有用的辅助线，往往是求解几何题的关键和难点．尽管辅助线“引无定法”，但还是有一定的规律可循的．本书的第一部分将探讨这个问题，着重分析作出辅助线的思考过程．只要不断总结经验教训，就能逐步提高添设辅助线的自觉性，减少盲目性．

不应把辅助线简单地认为一定是直线段，辅助线也包括曲线．例如，在求解问题“已知一边以及其它两边之和，求这些三角形面积的最大值”时，若能引进一个辅助椭圆，则这个问题的答案就一目了然．当然，在各种辅助曲线中，圆是最常用的．善于添作辅助圆，就可以把圆中的角、圆中的比例线段等有关圆的重要性质，参与到直线形的研究中去，解法也显得灵活．

如果引不出适当的辅助线时怎么办？这时就要敢于从“纯几何”的圈子里跳出来．“他山之石，可以攻玉”，解决一个数学问题，往往要用到不同数学学科的概念和方法，甚至借助于其它学科（例如物理）的知识才能奏效．如果我们在几

何图形中适当引入辅助参变量、参变角或坐标系，就可以充分运用代数、三角和解析的知识和方法求解几何问题. 这不仅拓宽了解题思路，而且也把几何学科与中学其它数学分学科知识沟通起来了. 到了高中阶段，应该不断增强综合运用各种知识处理几何问题的意识和本领. 这样，才能学好几何学.

本书把求解几何问题常用的转化辅助工具归结为五个：添辅助线、作辅助圆、引辅助角、设辅助量和建立辅助坐标系，并分别在第一至第五部分中讲述. 对于解析几何，解题时同样必须注意平面几何、代数、三角知识的综合运用，这是第六至第八部分的基本内容. 第九部分介绍了几何直观在初等数学中的运用，即如何运用几何知识求解代数、三角等问题. 这样，就可使读者对几何与代数、三角间的关系有一个较为全面的、系统的了解.

本书的一个重要特点，是以几何问题为主，通过大量的例题，向读者介绍几何与代数、三角相互转化的各种辅助工具，力求使几何与其它各数学分学科知识互相沟通，形中有数，数中有形. 同时也阐述了综合运用这些知识求解几何问题的思路和方法.

学习几何，除了需要掌握各种转化的辅助工具外，还要注意问题的融会贯通，注意特殊与一般关系. 我们知道，几何题千变万化，一个问题往往可以引伸出很多道题，一个一般性的规律可以派生出很多特殊的命题. 只要我们善于分析，善于抓住事物的本质，就能发现那些仅在表面上不相同的问题之间的内在联系. 同时，在解题时善于联想和类比，尽量找出相近或相似的问题，以便得到解题的思路与方法.

能力的培养离不开习题的训练. 为了便于读者发现规

律，找到问题间的联系，同时也为使学习成绩较好的中学生逐步懂得如何去发现和解决数学问题，掌握撰写数学小论文的一些基本方法，培养创造能力，本书编有系列练习题。在习题的编排上，本书力求围绕一个中心，以题组形式为主．这些习题的有机组合，主要依照四个原则：

（1）把类型相同或相似的问题放在一起，使读者能了解到解决这类问题的方法；

（2）把处理方法相同或相似的问题放在一起，使读者能从思想方法的角度去总结解题规律；

（3）把一些大题（较为复杂的问题）逐步分解成小题目的形式，从而把问题引向最终结论．读者解题后，通过回味反思，能体会到这个数学问题的解决过程，从中学到了各种思维、处理方法；

（4）把一些问题从特殊到一般、从具体到抽象加以引伸推广，引导读者去发现问题，揭示本质，探索未知，提高研究数学的能力．

可以这样说，本书的习题，将为中学生进行数学解题规律的概括和总结提供了一些方法，也为数学爱好者提供了一些撰写小论文的素材．因此，建议读者在做一个习题时，般应按顺序来完成．一个大问题做完后，最好能思考一下这些题目间的内在联系，小结一下解题后有什么收获和体会，从纵、横方面还可以作哪些引伸和推广．这样，在这融会贯通过程中，读者必将会有所收益，从中得到锻炼．

在学习解几何题时，读者除了需要学会逻辑表述外，还需要学会分析和思考．教科书在解几何题时，通常都运用综合法写出证明过程或求解过程．尽管这样做逻辑性强、条理清晰，但这样的写法却有一个缺陷，就是没有告诉读者解法

是怎样被发现的，解法的思考过程中经历了哪些困难与挫折，这往往是很重要的．本书在解题时，着重于解题途径探索与解题思想方法分析的编写．在一些例题的解答中，尝试使用“分析与解”或“分析与证明”的表述方法，把问题的分析与综合解答溶合在一起，而不是把“分析”与“证明”分开来写．但要注意，这里使用“分析与解”，只是为了使读者对所叙述问题的思考过程容易理解．同学们在做作业、测验或考试时，就不要使用这种表述方法了．

考虑到目前我国中学生的实际情况，本书不准备介绍利用向量等知识求解几何题的方法了．

读者阅读这本小册子后，如果能在几何、代数、三角各科知识和方法的沟通方面，在数学问题的分析探讨方面有所领会，作者的目的就算基本达到了．限于作者的水平和能力，本书的错误和疏漏在所难免，敬请读者批评指正．

目录

一、添辅助线……………………………………………1
(一)从分析已知和结论的关系入手添置辅助线……1
(二)从创造条件入手添置辅助线……………………7
(三)从移动元素入手添置辅助线……………………21
(四)利用变换解决几个有趣的问题…………………33
二、作辅助圆……………………………………………40
(一)判断与证明诸点应在一个圆上…………………40
(二)利用共圆求解几类问题…………………………49
习题一……………………………………………………60
三、引辅助角……………………………………………70
(一)如何引入辅助角…………………………………70
(二)运用三角方法求解几个问题……………………93
四、设辅助量……………………………………………108
(一)基本思想与方法…………………………………108
(二)运用方程知识解几何题…………………………113
(三)运用不等式知识解几何题………………………120
(四)运用函数知识解几何题…………………………131
五、建立辅助坐标系……………………………………148
(一)利用坐标法使几何问题的解法代数化…………148
(二)利用坐标法使某些几何问题的解法一般化……154
(三)运用坐标法解几何题的技巧……………………166
(四)圆的一个性质在二次曲线中的推广……………182
习题二……………………………………………………185

六、平面几何知识在解析几何中的运用……………………193
(一)坐标方法与平面几何知识的结合……………………193
(二)解析几何方法和平面几何方法的合理选择……………………203
(三)圆锥曲线的几何性质的运用……………………219
七、代数知识在解析几何中的运用……………………230
(一)代数消去法的运用……………………230
(二)引入参数与参数方程……………………237
(三)充分利用二次方程的理论……………………245
(四)方程$F_1+\lambda F_2=0$的几何意义及其应用……………………262
(五)不等式在表示点和曲线的位置关系中的运用……………………277
(六)二次曲线的相切及其应用……………………288
八、三角知识在解析几何中的运用……………………305
(一)利用辅助角求曲线方程……………………305
(二)直线、圆与椭圆的参数方程及其应用……………………313
(三)直线与圆锥曲线的极坐标方程及其应用……………………322
习题三……………………328
九、几何直观在初等数学中的运用……………………344
(一)借助几何结论求解代数和三角问题……………………345
(二)借助坐标方法求解代数和三角问题……………………352
(三)借助方程的曲线求解代数和三角问题……………………362
(四)借助函数图象求解代数和三角问题……………………377
习题四……………………391
附录 习题答案或提示……………………401

一、添 辅 助 线

添辅助线，虽然不是解题的目的，但它却往往是求解几何问题的关键和难点，所以添置必要的辅助线，是解几何题的一种重要手段．在本节里，我们将探讨添辅助线的一些规律．

（一）从分析已知和结论的关系入手添置辅助线

从分析已知和结论的关系入手，结合图形的特点及其性质，添置对解题有利的辅助线．这时的辅助线往往起着桥梁的作用，把已知和结论沟通起来．

例1 如图1.1，在等腰梯形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，两对角线相交于O，并且$\angle AOB=60°$，证明线段AO，OD和BC的中点是一个正三角形的顶点。

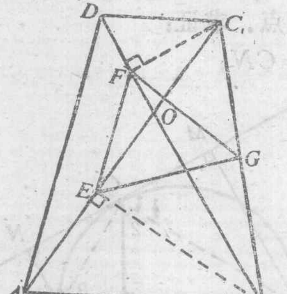

图1.1

【分析】题目即要证明$EF=FG=GE$. 根据图形的特点，若能证得$GE=EF$，则用同样的方法，亦将证得$GF=EF$. 现设GE与EF相等，由于$EF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，则有$GE=GB=GC$，从而$\triangle BEC$应该是直角三角形. 这就启发我们连结$BE$，并证明$BE\perp AC$. 这个关系是显然的，因为$\triangle AOB$是正三角形，一边上的中线同时也是高.

【证明】连结BE，则有$BE\perp AO$，故GE为直角三角形BEC斜边上的中线，

$$\therefore \quad GE=\frac{1}{2}BC.$$

另一方面$EF=\frac{1}{2}AD$，又已知$AD=BC$，

$$\therefore \quad GE=EF.$$

同理，连结CF，可证$\triangle BFC$为直角三角形，且$GF=EF$. 因而$EF=FG=GE$，$\triangle EFG$为正三角形.

例2 如图1.2，AB是半圆的直径，C是半圆上一点，直线MN切半圆于C点，$AM\perp MN$于M点，$BN\perp MN$于N点，$CD\perp AB$于D点. 求证：

①$CD=CM=CN$；

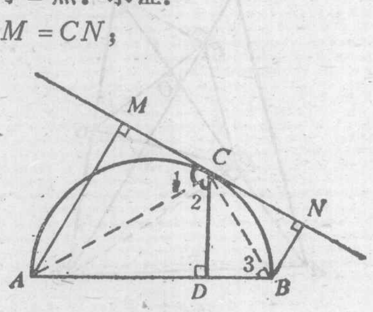

图1.2

②$CD^2=AM\cdot BN$。

【分析】设要证的第二式$CD^2=AM\times BN$成立，由已知的定理又有$CD^2=AD\cdot DB$，则有$AM\cdot BN=AD\cdot DB$，把这个式子与要证的第一式$CM=CD=CN$联系起来考虑，可以看到证明本题的全部关键在于证明$\triangle AMC\cong\triangle ADC$，$\triangle BCD\cong\triangle BCN$。这就启发我们添置辅助线$AC$和$BC$。

【证明】连结AC和BC，则$\triangle ACB$为直角三角形，且$\angle 2=\angle 3$，又由弦切角定理得$\angle 1=\angle 3$，所以$\angle 1=\angle 2$。

$\because$ AC为公共边，

$\therefore$ $Rt\triangle AMC\cong Rt\triangle ADC$，

$\therefore$ $AM=AD$，$CM=CD$。

同理可证

$Rt\triangle BNC\cong Rt\triangle BDC$，

$BN=BD$，

$CN=CD$。

由此得到

$CM=CD=CN$，

$CD^2=AD\times DB=AM\times BN$。

例3 已知E，F，G，H分别是任意四边形$ABCD$各边AB，BC，CD，DA的中点，求证：

$$S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\left(\frac{AB+CD}{2}\right)\times\left(\frac{AD+BC}{2}\right).$$

【证明】证法一　如图1.3，顺序连结四边形四边的中点，得平行四边形$EFGH$，且知这个平行四边形的面积等于原四边形面积的一半，即

$$S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

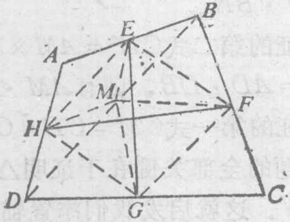

图1.3

$\because$ EG和FH为$\square EFGH$的两对角线，

$\therefore$ $S_{EFGH}=\dfrac{1}{2}EG\cdot FH\cdot\sin\theta\leqslant\dfrac{1}{2}EG\cdot FH$（$\theta$为$EG$和$FH$的交角），

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}S_{ABCD}\leqslant\dfrac{1}{2}EG\cdot FH$，

$\therefore$ $S_{ABCD}\leqslant EG\cdot FH$.

又连结BD，取BD中点M，再连结MF和MH，则有

$$\frac{AB+CD}{2}=MH+MF\geqslant HF.$$

同理，$\dfrac{AD+BC}{2}=ME+MG\geqslant EG$.

$$\therefore \left(\frac{AB+CD}{2}\right)\left(\frac{AD+BC}{2}\right)\geqslant HF\cdot EG.$$

$$\therefore S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\left(\frac{AB+CD}{2}\right)\times\left(\frac{AD+BC}{2}\right).$$

证法二　利用平移法，平移DB到AM，平移DB到CN，并连结有关线段，如图1.4所示．那末，四边形$ADBM$，$BDCN$，$ACNM$都是平行四边形，且有

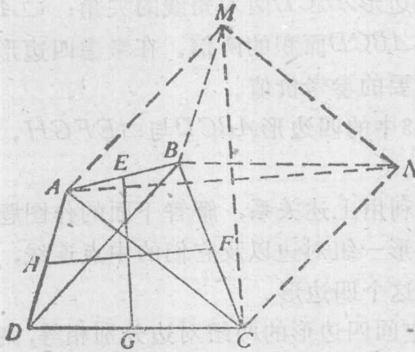

图1.4

$S_{ACNM}=2\cdot S_{ABCD}$，$CM=2EG$，$AN=2HF$，BA，BC，BN，BM分别等于原四边形$ABCD$的四条边.

$$\because\quad S_{ACMN}\leqslant\frac{1}{2}AN\cdot CM$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(BA+BN)(BC+BM),$$

$$\therefore\quad S_{ABCD}\leqslant\frac{1}{4}AN\cdot CM$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(BA+BN)(BC+BM).$$

$$\therefore\quad S_{ABCD}\leqslant HF\cdot EG\leqslant\left(\frac{AB+CD}{2}\right)\left(\frac{AD+BC}{2}\right).$$

说明　在图1.4中，环绕B点的四个角分别等于四边形$ABCD$的四个内角；集于B的四条线AB，CB，BM，BN分别等于四边形$ABCD$的四条边；$\square ACNM$的两条边分别等于四边形$ABCD$的两对角线；$\square ACNM$的两对角线分别等于四边形$ABCD$对边中点连线的两倍；$\square ACNM$的四个内

角分别等于四边形$ABCD$两对角线的夹角；$\square ACNM$ 的面积等于四边形$ABCD$面积的两倍．在考虑四边形问题时，这些关系将有重要的参考价值．

对于图1.3中的四边形$ABCD$与$\square EFGH$，也具有上述相类似的关系．

建议读者利用上述关系，解答下面的作图题：

已知四边形一组对边以及它们的中点连线，又知两对角线的长，求作这个四边形．

例4 若空间四边形的两组对边分别相等，则连结对角线中点的线段垂直于两条对角线．反之，若连接对角线中点的线段垂直于对角线，则此四边形两组对边分别相等．

【证明】①如图1.5，设E，F，G，H为空间四边形各边的中点，因$AD=BC$，$AB=CD$，则可证得$EMFN$，$GMHN$均为菱形，故有$MN\perp EF$，$MN\perp GH$．

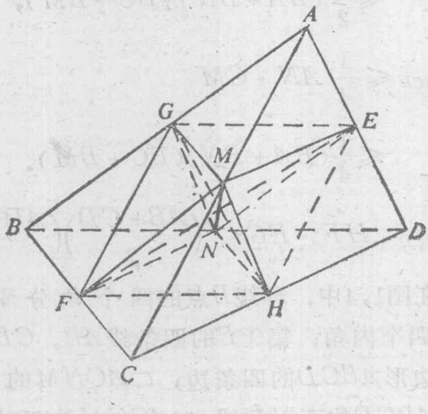

图1.5

连结EG，GF，FH，HE，

$\because$ $GE \parallel FH$，

$\therefore$ E，G，F，H四点共面

并且 $MN \perp$平面$EGFH$，

$\therefore$ $MN \perp GF$，$MN \perp FH$，

$\because$ $FG \parallel AC$，$FH \parallel BD$，

$\therefore$ $MN \perp AC$，$MN \perp BD$，

②若$MN \perp AC$，$MN \perp BD$，则$MN \perp FG$，$MN \perp FH$，由此得出$MN \perp$平面$EGFH$．

$\therefore$ $MN \perp EF$，$MN \perp GH$．

但$EMFN$，$GMHN$均为平行四边形，现它们的两条对角线互相垂直，故均为菱形，其四边都相等，从而空间四边形的两组对边也应分别相等．

（二）从创造条件入手添置辅助线

从创造条件入手添置辅助线，就是创造条件，使问题能应用已知定理或转化为某些已经解决了的问题，或较易解决的问题．这时辅助线往往起着转化问题、化难为易的作用．

1．添置辅助线，利用平行截线、相似三角形的性质或两个比例式等同于第三个比例式等来证两个乘积相等的问题．

例1 如图1.6，以等腰$\triangle ABC$底边BC中点O为圆心作圆切于两腰，设这圆的切线EF交AB于E，交AC于F，求证

$$BE \times CF = \frac{1}{4}BC^2.$$