研究生试用

多元分析讲義

孫書安 编

河南农业大学数学教研室

一九八七年元月

绪　言

多元统计分析，简称多元分析，是最近几十年来迅速发展并获得广泛应用的数理统计分支。它是研究如何用数学方法对多指标的随机变量进行统计分析。一般地讲，它的好多方法可以看成是一元统计分析很自然地推广；但也有一些方法是针对多指标提出的特殊问题。

多元分析所研究的内容，大致可以分成以下几类：

1．多维数据结构简化。例如，把高维空间的数据（点）投影到低维空间，并采用某种方法使新变量相互独立，从而使问题得到简化而又不损失多少信息。主成分分析和因子分析等就属於这一类。

2．变量之间的相关性分析。研究多个变量与多个变量之间的相互依存关系。如典型相关分析，多元回归等。

3．多元数据或样品的分类问题。如聚类分析，判别分析等。

4．多元的分布理论，参数估计，假设检验等，在大部分情形下是假定变量服从多元正态分布的。在此假定下研究各种统计量的分布，并在此基础上研究多元的参数估计，假设检验等问题。

5．計算方法的研究。多元数据具有计算量大的特点，如何将统计学与计算数学结合起来，使得运算尽量简化，这也是多元分析的一个内容。例如，多元逐步回归中的消去算法就是这种巧妙结合的例子。

相对于数理统计的其它分支而言，多元分析是一门年轻的

学科。1928年 Wishart 导出了多元正态总体样本协差阵的精确分布，这可以认为是多元分析作为一门学科正式开始。三十年代，R.A.Fisher，H.Hotelling，許宝騄、S.N.Roy 等人在多元分析的理论方面做了許多奠基性工作，使这一学科得到迅速发展。四十年代，多元分析在生物学、心理学、教育学等方面都有不少应用，并取得一定成果。但由于计标量太大，往往使人望而生畏，多元分析的发展受到影响，甚至停滞了相当长的时期。五十年代中期，随着电子计标机的出现和应用，多元分析又活跃起来，在地质、气象、生物、医学、体育及社会科学（如经济、教育）等方面都得到广泛应用。六十年代，在理论上又有了重要发展，直到如今，多元分析一直是数理统计中最活跃的一个分支。

我国数学家对多元分析的发展做出許多卓越的贡献。北京大学許宝騄教授（已故）对此做了許多開创性的研究，武汉大学张尧庭教授提出了双重筛选逐步回归，在世界上也属首创。

现在多元分析已经步入不少院校的研究生课堂，然而眼下尚无成熟的课本可用，有些专著理论性强，数学基础要求太高，非数学专业的读者，不易看懂。有些小册子太偏重于某一方面或个别例子的阐述，不能满足读者欲观全貌的心愿。本书试图通过深入浅出通俗懂的方式，用几十个学时的讲授，使读者既对多元分析有一个总体的了解，理论上有一定提高，又能掌握一些具体的分析方法。阅读本书需要有一元统计分析和线性代数的知识。多元分析在某种意义上可以说是这两个学科结合的产物。

本书初稿曾在85级研究生班进行讲授，此后又进行多次修改。但由于编者水平所限，谬误及不妥之处定有不少，欢迎读者批評指正。

目　录

第一章　预备知识

本章主要介绍多元分析常用的线性代数的有关内容，我们说，矩阵是多维的标术，一个很麻烦的标式利用矩阵可以表达得简单利索，多元统计分析的理论离开矩阵这个有力工具就“寸步难行”，因此，我们将一般线性代数教材中的一些结论简要列出，同时介绍在本书中常用的回块求逆公式，以及在逐步回归中起关键作用的消去变换，另外，对一般多元分析书籍中常见的特征函数的内容，也作以简单介绍，熟悉以上内容的读者，也可以直接阅读第二章。

§1　向量与矩阵

一、向量及其运算

n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ 称为 n 维向量，今后我们提到的向量，一般都是指列向量，即：

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \triangleq (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)'$$

（$\triangleq$ 表記作，也可表定义）向量一般用小写字母表示，一个小写字母是表示向量还是数，由上、下文确定，若一个向量的每个分量都是 0，则这个向量记作 0。

对向量定义以下几种运算：

1．加法，設 $a=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots\cdots b_n)'$，
则 $a+b\triangleq(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots\cdots,a_n+b_n)'$。

2．数乘，設 $a=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)'$，$C$为一实数，
则 $Ca\triangleq(Ca_1,Ca_2,\cdots\cdots,Ca_n)$。

3．内积，設 $a=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)'$，

$b=(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)'$，

则 a与b的内积 $(a,b)\triangleq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，内积有时也記作 $a\cdot b$

4．两向另间的夹角，

定义，$\cos\theta=\dfrac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}}$，$0\leq\theta\leq\pi$

称θ为向另 a与b 之间的夹角。

上面定义的加法满足交换律、结合律，数乘满足分配律，内积满足交换律，且 $(Ca,b)=(a,Cb)=C(a,b)$，特别 $(a,a)\geq0$，当且仅当 $a=0$时，$(a,a)=0$，又对任意之 a,b，有 $\dfrac{|(a,b)|}{\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}}\leq1$。

二．向另的长度及投影

对向另 $a=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)'$，$\sqrt{(a,a)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$
称为向另的长度，記作$|a|$，于是一个向另 a 可以写成
$a=\dfrac{a}{|a|}\cdot|a|$，这就把一个向另明显地分为两部分：方向部分和长度部分，长度为1的向另称为单位向另，$\dfrac{a}{|a|}$就是一个单位向另，引用矩阵乘法的记号，（把 a 看成 $n\times1$矩阵）
$(a,a)=a'a$ 于是 $|a|=\sqrt{a'a}$，$a=\dfrac{a}{\sqrt{a'a}}\cdot\sqrt{a'a}$

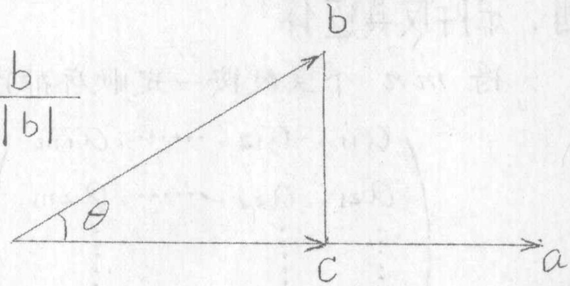
$(a\cdot b)=a'b$.

下面考虑向量 $b=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)'$ 在向量 a 上的投影，以三维向量为例，首先注意到
$(a, b)=a\cdot b=a'b=|a||b|\cos\theta$，这里 θ 是向量 a 与 b 的夹角，于是 b 在 a 上的投影 c 应为：

$$c=\frac{a}{|a|}\cdot|b|\cos\theta$$

$$=\frac{a}{|a|}\cdot|b|\cdot\frac{a'b}{|a||b|}$$

$$=a(a'a)^{-1}a'b$$



特别，当 a 是一个单位向量时，（即 a 仅表一方向时），b 在 a 上的投影的量值就是 $a'b$。

三. 线性相关

设有 K 个向量 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$，若有 K 个不全为 0 的数 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_K$，使得 $\sum_{i=1}^{K} c_i a_i=0$，则称向量 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 是线性相关的，否则称 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 是线性无关的。显然，任何含有 0 向量的向量集总是线性相关的，而不含 0 向量的向量集线性相关时，必有其中某个向量可以表示成该集中其它一些向量的线性组合，其逆亦成立。

给定 K 个 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$，考虑由这些向量所有可能的线性组合 $\sum_{i=1}^{K} c_i a_i$ 组成的集合。

$$R(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K)=\left\{\sum_{i=1}^{K} c_i a_i \;\middle|\; c_1, c_2, \cdots\cdots c_K \text{为实数}\right\}$$

称为由向量 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 生成的子空间，对于这个子空间，若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 线性无关，则称 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 是 R 的

一组基，可以证明，若 R 有两组基，则两组基中向量的个数一定相同，这个数（一组基中向量的个数）称为子空间 R 的维数，显然，R 中的任一向量 a 都可由基 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ 线性表示，且表法唯一。

四. 矩阵及其运算

将 mn 个实数按一定顺序排成：

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots\cdots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots\cdots, & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots\cdots, & a_{nm} \end{pmatrix}$$

称为大小是 $n\times m$ 的矩阵，它有 n 行，m 列，当 $m=n$ 时称为方阵，矩阵常用大写字母 A、B、C、……等表示，如記上矩阵为 $A_{n\times m}$，也可简记为 $A_{n\times m}=(a_{ij})_{n\times m}$，或 $A=(a_{ij})$。

1. 加法：当 A、B 是大小相同的两个矩阵时，则 $A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})$，称为 A 与 B 的和。

2. 数乘：$CA \triangleq (Ca_{ij})$，C 为一实数

3. 乘法：设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $m\times P$ 矩阵，则 $AB \triangleq (\sum_{\alpha=1}^{m} a_{i\alpha} b_{\alpha j})$ 为一 $n\times P$ 矩阵，称为 A 与 B 的积。

注意：加法及数乘满足交换律、结合律、分配律等，而矩阵乘法满足分配律、结合律，但不满足交换律，即一般 AB 与 BA 是不相同的，这一点应特别注意。

一个 n 维向量可以看成 $n\times 1$ 矩阵，矩阵 A 也可以看成 m 个 n 维向量（即 A 的列向量）排成的阵，

即 $A_{n\times m}=(a_1\ a_2\cdots\cdots a_m)$，$A$的行向号記为 $a(i)$，则 $A'=(a_{(1)}\ a_{(2)}\cdots\cdots a_{(m)})$ 。

元素全为 0 的矩阵記作 O，元素全为 1 的矩阵記作 J，分号全为 1 的向号記作 $\mathbb{1}$，它们的大小视上下文而定，显然，$J=\mathbb{1}\mathbb{1}'$，又单位阵．

$$I=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})，这里\ \delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当\ i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

五．逆矩阵和行列式

对方阵 A，若有 B，使得 $AB=BA=I$，则称 B 是 A 的逆矩阵，記作 A^{-1}，当 A^{-1} 存在时，必定唯一，此时，称 A 为非奇异阵，否则称为奇异阵，注意，$(A^{-1})^{-1}=A$，$(A')^{-1}=(A^{-1})'$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，那么 A 在什么情况下有逆呢？下面从两方面加以説明。

对给定的矩阵 $A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots\cdots a_m)$，$R(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m)$ 的维数記作 rkA，称为 A 的秩，可以証明，$rkA=rkA'$，当 A 为 $n\times n$ 方阵时，若 $rkA=n$，称 A 为满秩的，此时，A 必定有逆。另外，还要注意，$rk(AB)\leq min(rkA, rkB)$。

对方阵 A，$|A|$ 表 A 的行列式，当 $|A|\neq 0$ 时，A 必有逆，且 $|A|\neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1}$ 存在 $\Longleftrightarrow$ A 为满秩阵 $\Longleftrightarrow$ A 为非奇异阵，今后这几种说法我们将不加区别。

記 $A_{n\times n}=(a_{ij})$ 中 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}．

则：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ji})=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots\cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

后面的这个矩阵称为 A 的伴随阵，记为 A^*，即 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

又 A^{-1} 中的元素常用 a^{ij} 表示，即 $A^{-1}=(a^{ij})$。

注意：$|A'|=|A|$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，$|AB|=|A||B|$。

六、分块求逆

設 A、B 大小相同的两个矩阵，並且分块的大小也一致，

設 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

则分块矩阵可以类似于矩阵元素一样进行运标，即有：

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix} CA_{11} & CA_{12} \\ CA_{21} & CA_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{这里 } C \text{ 为实数}$$

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix};$$

若方阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}$，

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix}$$

A 与 B 的大小及分块都相同，则

$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$ 特别，

若A有逆时，有$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$。

又若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，则 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$

今設 $A=\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}} & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ p & q & \end{array}$，　$p+q=n$，A及A_{11}

的逆均存在，容易验证：

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & B \end{pmatrix} \tag{1·1}$$

显然，B^{-1}也是存在的，对上式两边分别求逆，则

$$\begin{pmatrix} I_p & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_q \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} I_p & -A_{11}A_{12} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

或記为：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} \\ -I_q \end{pmatrix}B^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1},-I_q) \tag{1·2}$$

其中　$B=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$，

类似地，当A及A_{22}有逆时，有

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_p \\ A_{22}^{-1} A_{21} \end{pmatrix} D^{-1} \left(-I_p, A_{12} A_{22}^{-1}\right) \qquad (1\cdot 3)$$

其中 $D = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$

(1·2) 及 (1·3) 式称四块求逆公式．

对 (1·1) 式两边取行列式并类推之，可得：

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} &= |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| \\ \text{及} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} &= |A_{22}| \cdot |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot 4)$$

例11．設 A 为 n 阶非奇异方阵，x，y 均为 n 维向量，α 为非零常数，试证：

$$(A - \alpha x y')^{-1} = A^{-1} + \frac{\alpha A^{-1} x y' A^{-1}}{1 - \alpha y' A^{-1} x} \qquad (1\cdot 5)$$

証：对矩阵 $\begin{pmatrix} A & \alpha x \\ y' & 1 \end{pmatrix}$，分别用 (1·2) 和 (1·3) 式求逆，并比较左上角的子块即得。

§2 非负定矩阵

一．特征根与特征向量

给定一个方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，则 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是 λ 的 n 次多项式，称为 A 的特征多项式、方程 $|\lambda I - A| = 0$ 称为 A 的特征方程，特征方程的解，称为 A 的特征根（特征值）．显然，n 阶方阵 A 有 n 个特征根（包括复根），記作 λ_1，λ_2，……，λ_n。

設 λ 是 A 的特征根，此时 $|\lambda I-A|=0$，因而方程

$$(\lambda I-A)x=0.$$

一定有非0解，这个非0解称为 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

由 $(\lambda I-A)x=0$，則 $Ax=\lambda x$，这就是说，向量 x 经线性变换 A 之后，仍与 x 共线，仅其长度发生变化，反过来，若对非 0 向量 x，有 $Ax=\lambda x$，则 λ 必是 A 的特征值，x 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

可以証明：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ （主对角元之和，称 A 的迹）

(2) $|A|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ (2·1)

(3) $|A|\neq 0 \Longleftrightarrow A$ 的特征值均不为 0.

显然，A 与 A' 有相同的特征多次式，因而有相同的特征根。

二．特征根，特征向量的几何意义：

一个 n 阶矩阵可以看作是在 n 维空间中的点的坐标值，当 $n=2$ 时，可以看作平面坐标，如矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$$

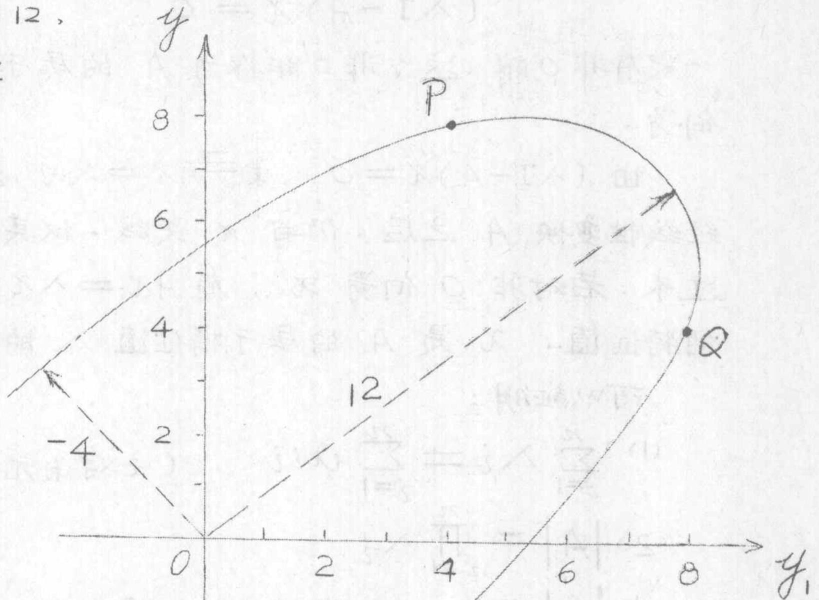
可以看作：两个点 $P(4,8)$，$Q(8,4)$，这两点可以设想为位于以坐标原点为中心的椭圆上，A 的特征多次式.

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -8\\ -8 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2-64$$

令 $f(\lambda)=0$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=12$，$\lambda_2=-4$. 进一步可得相应的特征向量分别是

$$x_1=(1,1)',\quad x_2=(-1,1)'.$$

这时可把特征值看作是上述椭园的轴的相对长度。λ_1 相当于长轴，长度为12，λ_2 相当于短轴，位于坐标系负的部分，长为4。



当两点较为靠近时，λ_1 与 λ_2 的值就随之改变，使长轴变长，短轴更短，当两点到坐标原点的连线互相垂直，而且长度相等时，则特征值就成为通过两点的园的半径，两特征值的绝对值相等。如：

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

其特征方程为：

$$\lambda^2-80=0$$

特征值为：

$$\lambda_1=8.95\ ;\quad \lambda_2=-8.95\ .$$

三. 迹

对方阵 A，它的全部特征值的和与全部主对角元的和相等，这个和称为 A 的迹，容易验证，迹有如下性质。

(1) $tr(A+B)=trA+trB$

(2) $\mathrm{tr}A' = \mathrm{tr}A$，

(3) 对常数 K，有 $\mathrm{tr}(KA) = K\,\mathrm{tr}A$，

(4) 对矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，有 $\mathrm{tr}(AB)_{m\times m} = \mathrm{tr}(BA)_{n\times n}$.

对(4)証明如下：不妨設 $m \geq n$，攷虑行列式.

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} \triangleq g(\lambda)$$

利用(1·4)式，则：

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= |\lambda I_m|\cdot|I_n - B\cdot\lambda^{-1}I_m\cdot A| \\ &= \lambda^m |I_n - \lambda^{-1}BA| \\ &= \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|. \end{aligned}$$

或 $$g(\lambda) = |I_n||\lambda I_m - AI_nB| = |\lambda I_m - AB|.$$

$$\therefore\ \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA| = |\lambda I_m - AB|.$$

这説明，方阵 $(BA)_{n\times n}$ 与 $(AB)_{m\times m}$ 的特征多次式之间仅相差因子 λ^{m-n}，因而它们的非 0 特征根完全相同，由定义，知 $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ // 结论(4)是经常用到的，如：$\mathrm{tr}AA' = \mathrm{tr}A'A$，$\mathrm{tr}ab' = \mathrm{tr}\,b'a = b'a$，从结论(4)的証明中，我们得到：

定理1．对矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，则 AB 与 BA 有相同的非0特征根。

又若对方阵 A，B，有非奇异阵 θ，使得 $B = \theta^{-1}A\theta$，则称 A 与 B 为相似矩阵，相似矩阵有相同的特征多次式，从而有相同的特征根，因而它们的迹也相同。

又若 ξ 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则：

$$\eta = \theta^{-1}\xi$$

是相似矩阵 $\theta^{-1}A\theta$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

四. 非负定矩阵与正交矩阵

若 $A'=A$，则称矩阵 A 为对称阵，設有对称阵 $A_{n\times n}$，任給向量 $x_{n\times 1}$，則 $f(x)=x'Ax$ 就是 A 的二次型，若对任 x，恆有 $x'Ax\geq 0$，則利 A 为非负定矩阵，并記 $A\geq 0$. 对 $A\geq 0$，若当且仅当 $x=0$ 时 $x'Ax=0$ 則称 A 为正定阵，記为 $A>0$，注意，我们所說之非负定阵及正定阵都是指对称阵而言，若 A 与 B 是大小相同之方阵，且 $A\geq 0$，$B\geq 0$，且 $A-B\geq 0$，則記 $A\geq B$. 設 A 为对称阵，P 为一满秩阵，則 $P'AP$ 为对 A 进行的合同变换，記 $B=P'AP$. 則 $\mathrm{rk}B=\mathrm{rk}A$ 且 $A\geq 0\Longleftrightarrow B\geq 0$。

若对方阵 Γ，有 $\Gamma^{-1}=\Gamma'$，則称 Γ 为正交阵. 設正交阵

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots\cdots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots\cdots & \gamma_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots\cdots & \gamma_{nn}\end{pmatrix}=(\gamma_1\,\gamma_2\cdots\cdots\gamma_n)=\begin{pmatrix}\gamma'_{(1)}\\ \gamma'_{(2)}\\ \vdots\\ \gamma'_{(n)}\end{pmatrix}$$

則 (1) $\gamma_i'\gamma_j=\delta_{ij}$.

(2) $\gamma'_{(i)}\gamma_{(j)}=\delta_{ij}$.

(3) 对任 n 维向量 x，$y=\Gamma x$，有 $y'y=x'x$.

(4) $|\Gamma|=\pm 1$.

(5) Γ'，Γ^{-1} 也都是正交阵. 若 Γ_1，Γ_2 为正交阵，則 $\Gamma_1\Gamma_2$ 也是正交阵.

其中 (1)、(2)、(3) 也都是正交阵的充分条件。

对任一对称阵 A，一定存在正交阵 Γ，使