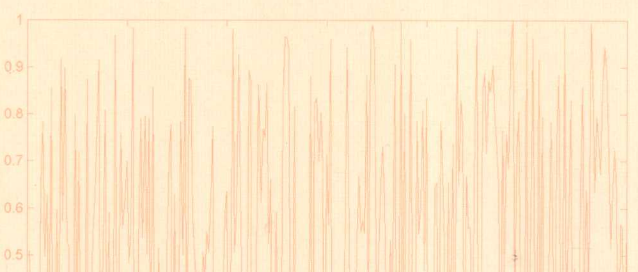
“十一五”国家重点图书 中国科学技术大学精品教材

随机过程引论

奚宏生 编著



中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学精品教材

随机过程引论

SUIJI GUOCHENG YINLUN

奚宏生　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科各专业的研究生学习随机过程而编写的教材.全书共分六章,内容可以概括为三个部分:第一部分介绍集合测度和概率测度、L-S积分和数学期望、极限理论;第二部分介绍随机过程基本概念和主要类型,涉及平稳过程、Gauss过程、Wiener过程、Poisson过程、随机分析和随机微分方程;第三部分介绍了离散和连续Markov过程、隐Markov过程、Markov决策过程等.每章后面附有适量习题或应用实例.

本书中概念的阐述和理论推导比较详细和严谨,并且强调实际应用中随机模型的构建与分析,便于读者自学.本书也可以作为教师和科研工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程引论/奚宏生编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2009.1
(中国科学技术大学精品教材)
"十一五"国家重点图书
安徽省高等学校"十一五"省级规划教材
ISBN 978-7-312-02260-9

Ⅰ.随… Ⅱ.奚… Ⅲ.随机过程引论—高等学校—教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第140935号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
中国科学技术大学印刷厂
全国新华书店经销

开本:710×960 1/16 印张:19.375 插页:2 字数:360千
2009年1月第1版 2009年1月第1次印刷
印数:1—3000册
定价:32.00元

总　序

2008 年是中国科学技术大学建校五十周年. 为了反映五十年来办学理念和特色, 集中展示学校教材建设的成果, 学校决定组织编写出版代表学校教学水平的精品教材系列. 在各方的共同努力下, 共组织选题 281 种, 经过多轮、严格的评审, 最后确定 50 种入选精品教材系列.

1958 年学校成立之时, 教员大部分都来自中国科学院的各个研究所. 作为各个研究所的科研人员, 他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统. 同时, 根据"全院办校, 所系结合"的原则, 科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学, 为本科生授课, 将最新的科研成果融入到教学中. 五十年来, 外界环境和内在条件都发生了很大变化, 但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变. 正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针, 并形成了优良的传统, 才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课教学和专业基础课教学的传统, 也是她特别成功的原因之一. 当今社会, 科技发展突飞猛进、科技成果日新月异, 没有扎实的基础知识, 很难在科学技术研究中作出重大贡献. 建校之初, 华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行, 亲自为本科生讲授基础课. 他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德, 带出一批又一批杰出的年轻教员, 培养了一届又一届优秀学生. 这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材, 其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响, 因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念

与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.五十年来,进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

这次入选的50种精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校五十年教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.该系列精品教材的出版,既是向学校五十周年校庆的献礼,也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念.

侯建国

2008年8月

前　言

随机过程是在概率论基础上研究随机现象动态统计规律性的一门应用数学分支. 自从人们发现在自然界和人类实践活动中几乎一切可观测现象的动态过程或多或少均具有随机性，随机过程的理论和方法就越来越受到重视，它已经被广泛地应用到了自然科学、工程技术和社会科学中. 目前，国内外高等学校普遍将随机过程列为主要专业基础课程.

本教材主要面向控制、通信、计算机和其他工科专业的研究生，他们的预修知识是微积分、线性代数和初等概率. 对大多数研究生而言，他们学习随机过程的目的是希望能将其理论和方法直接应用到自身的专业，以解决所面临的种种科学和技术问题. 作者认为工科研究生主要从事工程中关键技术的研究，而探索关键技术所蕴含的科学原理不仅是解决问题的主要途径，同时也能对持续创新产生启发和指导作用. 因此，从较高层次上对基本概念和方法的原理作清晰的阐述，强化读者对随机过程理论的系统和完整的理解，才能引导读者正确运用基本原理来建立数学模型，开展对实际问题的研究. 作者在本教材的编写过程中始终贯彻这一理念.

第 1 章和第 2 章介绍概率论基础. 概率论有两种叙述方式：一种是直接从随机事件发生的概率角度去描述，其意图是培养学生对学科的直观感觉，它是一种直观但不严格的方法; 另一种方法是用测度论工具严格地研究概率论，它侧重于抽象逻辑思维和推理能力的培养. 从实际背景出发无疑对概率论的理解与应用都极为重要，但很多基本概念和问题，离开测度论很难说清楚. 从发展观点看，这种依赖测度论的趋势将在未来学科发展中大大增强. 因此，作者在本教材中采用融合两种叙述的方式，在强调直观背景和实际应用的同时，也顾及理论的系统性和逻辑思维能力的培养. 在内容中安排了集合与事件、测度空间与概率空间、可测函

数与随机变量、L-S 积分与数学期望等. 目的是要求读者在近代数学层面上去进一步深入理解概率论的基本概念和问题，理解抽象数学符号和公式所表达的具体意义，以便读者在阅读文献和撰写专业论文时能正确把握其涵义. 在本教材设定的数学知识水平下，着重介绍了一些在工科初等概率论中通常不涉及的内容. 例如一般随机变量函数的分布和数学期望、条件数学期望、随机变量序列的极限理论、大偏差原理等.

第 3 章介绍随机过程的基本概念. 本章采用一族随机变量或一族样本实现来定义随机过程，侧重突显随机现象变化过程及其统计规律性的动态特征的阐述. 在此基础上，分别介绍了在工程学科中常用的一些随机过程，例如平稳过程、Gauss 过程、Wiener 过程、Poisson 过程的定义、性质、重要定理和建模方法.

第 4 章介绍了在均方意义下的随机分析和随机微分方程理论. 内容涉及均方连续、均方导数、均方积分和 Ito 积分的定义、性质和定理，并且在随机微积分理论基础上建立了随机微分方程及其解的存在和唯一性理论. 均方微积分的重要意义在于数学上十分近似于普通微积分，因此在理论和应用上比较简单，容易为熟悉普通微积分的广大读者所掌握. 然而，这也往往会导致一些读者在学习和具体应用中忽视其本质属性. 本章在阐述随机微积分表达形式的同时，也侧重强调其在统计意义上的本质属性.

第 5 章介绍了 Markov 过程，它是 1906 年由 Markov 首先提出的一类随机过程. 它采用简单的数学模型描述了自然界中普遍存在的一类随机现象的演化过程，具有广泛的包容性和丰富的内涵. 近三十年来，在自动控制、计算机、通信、生物、物理、化学、经济和管理等领域均有十分重要的应用. 从理论上讲，具有 Markov 性的随机现象只要确定其状态空间和各状态之间的转移规律性，那么，Markov 模型就完全确定了. 本章内容主要阐述了 Markov 过程数学模型的建立，转移概率矩阵或转移速率矩阵的定义、构造及其在常返意义下的极限性质和平稳分布，并集中给出了一些具有启发性的数学模型和应用实例，以帮助读者理解相关内容.

第 6 章讨论了隐 Markov 过程和 Markov 决策过程. 作者将它们统一称作为扩展的 Markov 过程，其涵义是指它们是在 Markov 过程的基本概念上扩展或延伸出来的一类随机过程. 隐 Markov 过程在近代信号处理、检测、识别等应用中卓有成效. 本章内容讨论了隐 Markov 模型在实际应用中所涉及的估计、识别和学习三个重要问题. 在叙述建模有效算法时，着重介绍了 EM 等算法. 如果说 Markov 过程描述了具有 Markov 性的随机现象的客观动态规律性，那么 Markov 决策过程则是

人们试图驾驭这种现象的过程. 因此也称作 Markov 控制过程. 本章所涉及的内容主要是在曹希仁教授和陈翰馥院士 1997 年提出的 Markov 性能势的理论框架基础上，作者和合作伙伴近几年来所开展的部分研究成果，以提供相关专业的研究生和科研人员作为参考和阅读材料.

作者长期从事随机系统理论的教学和科研工作. 这本教材是在由作者编写的中国科学技术大学研究生讲义《随机过程引论》的基础上重新修改编写的，同时也吸收了国内外前辈和同行的学术著作和论文中的新观点、新方法和新成果. 本书的内容很大程度上反映出了他们的影响，借此机会深表谢意.

在本书的编写过程中，徐陈锋博士参与了全书的编排和校阅，江琦博士和鲍秉坤博士参与了部分章节内容的编排和校阅工作. 本书还吸收了殷保群教授、周亚平副教授、谭小彬副教授、江琦博士、李衍杰博士、代桂平博士等近期部分研究工作，在此表示谢意. 此外，由于本人学识水平有限，本书内容中难免存在不当或错误之处，敬请同行和读者批评指正.

作者

2008 年 9 月 1 日

目 次

第1章　概率空间与随机变量

1.1　概率空间

1.1.1　随机现象、随机试验和随机事件

在自然界和人类的活动中经常遇到各种各样的现象，这些现象大体上可以分为两类：**必然现象**和**随机现象**. 所谓**必然现象**是指在一定的条件下必定会出现的现象. 例如，“水分子在电解作用下能生成两个氢原子和一个氧原子”；“在恒力作用下的质点作等加速运动”等等. 自然科学揭示了各种必然现象产生的条件和规律. 当具备一定的条件时，人们可以依据所揭示的某种规律来预测必然现象的结果. 除了必然现象之外，还存在另一类现象. 例如，掷一枚均匀硬币，可能出现“正面”和“反面”两种不同的结果，但是究竟出现哪种结果事先却无法给出确切的预言；某公共汽车站每天早晨7:00到8:00等候乘车的人数，可能是任意一个非负整数，但事先无法预言其确切的数目，等等. 这类现象的共同特点是，即使条件完全相同，它们所产生的结果一般也不尽相同，或不能确切预言，我们把这种性质称作为**随机性**. 我们知道任何现象的出现都是由各种内外部因素所确定的，这些因素中有些是可以控制的，也即通常所指的“条件”；然而，也存在一些时隐时现、变幻多端和无法控制的偶然因素，这些因素产生的效应是不同的、不确定和不能完全预测的，这就是某些现象具有随机性的原因. 我们把具有这种随机性的现象称作**随机现象**. 概率论主要研究随机现象在完全相同的条件下重复出现时所表现出来的某种规律性，我们称这种规律性为**统计规律性**.

对随机现象的观察或为观察而进行的试验称为**随机试验**. 随机试验是研究随

机现象的基本方法，它同一般的实验所不同的是，随机试验必须具有如下特性，即试验具有明确目的，是在相同条件下重复进行，并且其结果不能事先预测. 我们以 E 表示随机试验，E 的一个结果称为**基本事件**或**样本点**，记作 ω. E 的所有可能的结果的全体称为**样本空间**，记作 Ω. 由基本事件构成的集合称为**随机事件**，简称**事件**. 说事件 A 发生，当且仅当 A 中的一个基本事件发生. 如果我们把每一个基本事件看作一个抽象点，则对于每一个随机试验 E, 就有一个抽象点集 Ω 与之对应，E 的每一个事件 A 是 Ω 的一个子集 ($A \subset \Omega$)；如果 E 的结果为 ω, 则当 $\omega \in A$ 时，称事件 A 出现了，而当 $\omega \bar{\in} A$ (或 $\omega \in \overline{A}$) 时，称事件 A 未出现. 特别地，包含一切基本事件 ω 的集合 Ω 也是一个事件，无论随机试验出现哪一个结果，这个事件总要发生，因此 Ω 被表示为**必然事件**，而不包含任何基本事件的空集 $\varnothing$ 被称作为**不可能事件**. 这样，概率论中的事件与集合论中的集合，以及它们之间的关系和运算是具体与一般的关系，为了便于对照，列表如表 1.1.

表 1.1　事件与集合对照表

记号	概率论	集合论
Ω	必然事件、样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件或样本点	元素
A	事件	子集
$\omega \in A$	事件 A 出现	ω 是 A 中元素
$A \subset B$	事件 A 出现，则事件 B 一定出现	A 是 B 的子集
$A = B$	两事件 A, B 相同	两集合 A, B 相等
$A \cup B$	两事件 A, B 至少有一个出现	两集合 A, B 的并集
$A \cap B$	两事件 A, B 同时出现	两集合 A, B 的交集
$A - B$	事件 A 出现，事件 B 不出现	两集合 A, B 的差集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的补集，即 A^c
$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与事件 B 不相容	两集合 A, B 不相交

性质 1.1.1 假设 A, B, C 是任意事件，则它们满足:

(1) **交换律**: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) **结合律**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) **分配律**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) **对偶原则 (De Morgan 律)**: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

假设 $A_1, A_2, \cdots$ 是可列多个事件，并定义

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\lim_{n\to+\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\qquad \bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i=\lim_{n\to+\infty}\bigcap_{i=1}^{n}A_i \tag{1.1}$$

若记 $\bigcup_i A_i$ 和 $\bigcap_i A_i$ 分别为有限和可列多个事件的并和交. 易证性质 (1) ~ (4) 可以推广到有限或可列个事件情形. 特别地，性质 (4) 可以推广至

$$\overline{\bigcup_{i=1}A_i}=\bigcap_{i=1}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}A_i}=\bigcup_{i=1}\overline{A_i} \tag{1.2}$$

这些性质可以利用集合论中集合运算的方法给出证明.

假设事件序列 $\{A_i\}$, 如果 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 我们称 $\{A_i\}$ 是**单调递增事件序列**; 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则称 $\{A_i\}$ 是**单调递减事件序列**，记

$$\lim_{i\to+\infty}A_i=\begin{cases}\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i, & \text{若 } A_i \text{ 是单增}\\ \bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i, & \text{若 } A_i \text{ 是单减}\end{cases} \tag{1.3}$$

称 $\lim\limits_{i\to+\infty}A_i$ 为 (单调) **事件序列** $\{A_i\}$ 的**极限**.

1.1.2　事件 σ–代数

我们研究随机现象时，没有必要把 Ω 的一切子集 (事件) 都当作研究对象. 在实际问题中，通常仅对某些事件类感兴趣，于是我们引出事件 σ-代数的概念.

定义 1.1.1 假设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 中一些点集的集合，如果它满足下列性质:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 如果 $A\in\mathscr{F}$, 则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 如果 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

那么，称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 中的 **σ-代数**.

若 $\mathscr{F}$ 是样本空间 Ω 中一些事件的集合，则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 中的一个**事件 σ-代数.**

性质 1.1.2 假设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中任一事件 σ-代数，则

(1) $\varnothing \in \mathscr{F}$;

(2) 如果 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$;

(3) 如果 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$, 则 $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{F}$;

(4) 如果 $A,B \in \mathscr{F}$, 则 $A-B \in \mathscr{F}, B-A \in \mathscr{F}$.

证明

(1) 因为 $\Omega \in \mathscr{F}$, 故 $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{F}$;

(2) 设 $A_i \in \mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots,n$, 令 $A_i = \varnothing$, $i \geqslant n+1$, 有 $A_i \in \mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots$, 从而 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{F}$. 由 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 可见，$\overline{A_i} \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 因而 $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \in \mathscr{F}$, 故 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}} \in \mathscr{F}$. 再由 De Morgan 律，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}} \in \mathscr{F}$;

(3) 设 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$, 那么 $\overline{A_i} \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$, 故 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in \mathscr{F}$, 因而 $\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}} \in \mathscr{F}$. 由 De Morgan 律知，$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}} \in \mathscr{F}$;

(4) 设 $A,B \in \mathscr{F}$, 那么 $\overline{A},\overline{B} \in \mathscr{F}$, 从而 $A-B = A\cap\overline{B} \in \mathscr{F}, B-A = \overline{A}\cap B \in \mathscr{F}$.

∎

上述性质表明，从定义 1.1.1 出发，可以推得 $\mathscr{F}$ 包含空集，并且关于事件的并、交及差等一切运算都封闭. 容易验证下列事实:

例 1.1.1 由 Ω 的一切事件构成的事件类 $\mathscr{F}$ 是事件 σ-代数.

例 1.1.2 设 $\mathscr{F} = \{\Omega,\varnothing\}$, 则 $\mathscr{F}$ 是事件 σ-代数，称作平凡事件 σ-代数.

例 1.1.3 对任意事件 $A \in \Omega$, $\mathscr{F} = \left\{\Omega,A,\overline{A},\varnothing\right\}$ 是事件 σ-代数，称为最小的非平凡事件 σ-代数.

例 1.1.4 随机实验 E: 掷一枚骰子，观察出现的点数，样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, 试验证下列事件类是否构成事件 σ-代数:

(1) 事件类 $\mathscr{F} = \{\Omega,\varnothing,\{1,2,3\},\{3,4,5,6\}\}$;

(2) 事件类 $\mathscr{F} = \{\Omega,\varnothing,\{1,2,\},\{3,4\},\{5,6\}\}$;

(3) 事件类 $\mathscr{F} = \{\Omega,\varnothing,\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$.

解

(1) 由于 $\{1,2,3\}\cap\{3,4,5,6\}=\{3\}\notin\mathscr{F}$, 故 $\mathscr{F}$ 不构成事件 σ-代数；

(2) 由于 $\overline{\{1,2\}}=\{3,4,5,6\}\notin\mathscr{F}$, 故 $\mathscr{F}$ 不构成事件 σ-代数；

(3) $\mathscr{F}$ 是最小非平凡事件 σ-代数.

∎

定义 1.1.2 设 g 是 Ω 的一事件类，$\sigma(g)$ 是 Ω 上的事件 σ-代数，如果

(1) $g\subset\sigma(g)$;

(2) 对于 Ω 上任意包含 g 的事件 σ-代数 $\mathscr{F}$, 有 $\sigma(g)\subset\mathscr{F}$.

则称 $\sigma(g)$ 为事件类 g 生成的事件 σ-代数, 它是 Ω 上的包含 g 的**最小事件 σ-代数**.

定理 1.1.1 对于 Ω 中的任意事件类 g, 必定存在含 g 的最小事件 σ-代数，并且等于 Ω 上一切含 g 的事件 σ-代数 $\mathscr{F}_i, i=1,2,\cdots$ 之交，即 $\sigma(g)=\bigcap_{i=1}\mathscr{F}_i$.

证明 显然，在 Ω 上至少存在一个含 g 的事件 σ-代数，例如 Ω 中一切事件所构成的事件 σ-代数必含 g. 记 $\mathscr{F}(g)=\bigcap_{i=1}\mathscr{F}_i$, $g\subset\mathscr{F}_i$, $\mathscr{F}(g)$ 为 Ω 中一切含 g 的事件 σ-代数 $\mathscr{F}_i$ 之交. 设事件 $A\in\mathscr{F}(g)$, 则 $A\in\mathscr{F}_i$, 且 $\overline{A}\in\mathscr{F}_i$, $i=1,2,\cdots$, 故 $\overline{A}\in\bigcap_{i=1}F_i=\mathscr{F}(g)$. 又若 $A_j\in\mathscr{F}(g)$, $j=1,2,\cdots$, 则 $A_j\in\mathscr{F}_i$, $i,j=1,2,\cdots$, 故 $\bigcup_{j=1}A_j\in\mathscr{F}_i$, $i=1,2,\cdots$, 因此有 $\bigcup_{j=1}A_j\in\bigcap_{i=1}\mathscr{F}_i=\mathscr{F}(g)$;

验证 $\mathscr{F}(g)$ 是含 g 的最小事件 σ-代数，因为 $g\subset\mathscr{F}_i$, $i=1,2,\cdots$, $g\subset\bigcap_{i=1}\mathscr{F}_i=\mathscr{F}(g)$, 又 $\mathscr{F}(g)\subset\mathscr{F}_i$, $i=1,2,\cdots$, 故 $\mathscr{F}(g)=\sigma(g)$. ∎

定理 1.1.1 表明，我们在对随机现象的研究中，从理论上讲，总可以从一些感兴趣的事件类出发去构造一个含 g 的最小事件 σ-代数 $\sigma(g)$. 这样可以排除一些对研究目标无关的事件，将研究范围收缩到尽可能小的程度.

1.1.3 概率的公理化定义，概率空间

在概率论的发展过程中有过多种有关概率的定义和理论描述，目前得到普遍公认的是柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 在 1933 年提出的. 柯尔莫戈洛夫公理化系统从集合的测度理论出发建立了概率的定义，从而阐明了概率论的基本概念，使概率论成为一门严谨的数学分支，在给出概率的公理化定义以前，我们先简单介绍集合论中的集函数和测度的基本概念.