碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

线性代数
全程学习指导

配人大三版

编著 李海燕 王艳芳

.2-42

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

线性代数
全程学习指导

配人大三版

编著 李海燕 王艳芳

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导(配人大三版)/李海燕,王艳芳编著.—3版
大连:大连理工大学出版社,2008.8
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 978-7-5611-2434-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第075387号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路80号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:9.375 字数:381千字
2008年8月第3版 2008年8月第7次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:舒 道
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-2434-5 定 价:14.00元

编者的话

大连理工大学出版社的朋友邀请我写作《线性代数全程学习指导》,这是对我工作的肯定和鼓励。作为教师,我愿意将我的教学经验与大家共享,与大家共同学习,共同提高。更加上有老同事、老朋友"最受学生欢迎的好老师"王丽燕的热情鼓励和指导,以及同行好友王艳芳的精诚合作,更增添了我写好本书的信心。

《线性代数》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量,提高应试能力,因此,本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的"本科数学基础课程教学基本要求"(教学大纲),以及教育部最新的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求编写。

本书按照被全国许多高校经济类、管理类专业采用的《线性代数》(人大第三版,赵树嫄编)的章节顺序编写,共 5 章,每章均有 4 个版块。

知识点考点精要　列出基本概念、重要定理、主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解　精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广,类型多,技巧性强,旨在提高大家分析问题、解决问题的能力,帮助大家掌握基本概念和理论,开拓解题思路,掌握解题技巧。

教材习题同步解析　本版块为教材习题全解,为大家提供一种比较规范的解题思路和方法,以便读者对照和分析。

模拟试题自测　模拟试题力争反映考试的重点、难点，帮助大家进一步强化训练解题能力，巩固和提高学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式，如“060406”，说明此题是2006年数学四的考题，分值6分。

常言道，熟能生巧。剖析一定数量的范例，做一定数量的练习，无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法，注重科学思维方式的培养，才能掌握“数学力”，并将之转化为一种“数学素质”和“竞争力”。

本书自出版以来，受到读者的一致喜爱。想到成千上万的学子曾经阅读过此书，作为教师，我深感欣慰。本次修订，有许多新的教学体会融入其中，并根据考研大纲的变化，对重点、难点及例题都进行了调整，订正了原书的印刷错误，使其日臻完善。

此次修订，得到了编委会诸位前辈和同仁的指点，特此致谢！

希望读者通过 E-mail 等方式给我们提出宝贵意见和建议。

李海燕

2006年7月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第一章　行列式 / 1
知识点考点精要 / 1
典型题真题精解 / 4
教材习题同步解析 / 18
模拟试题自测 / 57
第二章　矩　阵 / 61
知识点考点精要 / 61
典型题真题精解 / 65
教材习题同步解析 / 86
模拟试题自测 / 124
第三章　线性方程组 / 128
知识点考点精要 / 128
典型题真题精解 / 130
教材习题同步解析 / 159
模拟试题自测 / 193
第四章　矩阵的特征值 / 195
知识点考点精要 / 195
典型题真题精解 / 196
教材习题同步解析 / 219
模拟试题自测 / 240

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第五章　二次型 / 242
知识点考点精要 / 242
典型题真题精解 / 243
教材习题同步解析 / 252
模拟试题自测 / 268
模拟试题自测参考答案 / 270

第一章 行列式

知识点考点精要

行列式的概念和基本性质,行列式按行(列)展开定理及应用.

一、行列式的概念

n 阶行列式定义为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

右式为行列式 D_n 的展开式,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列,$N(j_1j_2\cdots j_n)$表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,即 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项,其中每一项都是取自于 D_n 的不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和.各项的符号是:当这一项中 n 个元素的行指标按自然顺序排列时,由这 n 个元素的列指标所组成的排列为偶(奇)排列,该项取正(负)号.

D_n 简记为 $|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$.

二、行列式的基本性质

1. 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

2. 交换行列式的任意两行(列),其值变号.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素相等,其值为零.

3. 用数 $k(k\neq0)$乘行列式的某一行(列)的所有元素,等于用 k 乘行列式,即行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来.

若行列式某行(列)的所有元素全为零,其值为零.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素成比例,其值为零.

4. 若行列式的某一行(列)中的各元素均为两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 若把行列式的某行(列)中各元素同乘数 $k(k\neq 0)$,然后加至另一行(列)对应位置元素上,其值不变.

为了帮助读者记忆行列式的性质,归纳如下:

(1)两个翻:全翻(转置)不变,部分翻(交换)变号.

(2)三个零:某行(列)元素全为零,两行(列)对应位置元素相等.两行(列)对应位置元素成比例.

(3)三个可:可提性,可分性,可加性.

三、行列式的计算方法及有关定理

1. 定义法

2. 化为上(下)三角形法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(上三角形)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(下三角形)}$$

特别地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(对角形行列式)}$$

具体步骤为:若第一列的第一个元素为0,先将第一行与其他行交换,使第一列第一个元素不为0;然后把第一行分别乘以适当的数加至其他各行,使第一列除第一个元素外其余元素全为0;再用同样的方法处理 a_{11} 的余子式;依次下去,直到将行列式

化为上三角形行列式为止,其值为主对角线上元素的乘积.

3. 降阶法

(1)按某行(列)展开

定理:n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i\text{ 行})$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j\text{ 列})$$

当 $i\neq s$ 时,$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0$;

当 $j\neq t$ 时,$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0$.

即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D_n & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D_n & j=t\\ 0 & j\neq t\end{cases}$$

(2)按 k 阶子式展开

定理(拉普拉斯定理):

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 中,任取 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式的值,即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

其中,A_i 是 k 阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式$(t=C_n^k)$.

(3)分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵(参看第二章).

4. 拆项法(利用性质 4)

5. 递推法

利用行列式的性质或按行(列)展开定理,找出 D_n 与 n 个同结构的较低阶的行列式 D_3,D_2 之间的关系式,从而求出 D_n 的值.

6. 归纳法(对阶数归纳)

7. 范德蒙行列式法

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

8. 反证法

在解题中,往往几种方法结合使用,使计算简化.

四、行列式的应用

1. 用克莱姆法则求非齐次线性方程组的惟一解.
2. 用齐次线性方程组系数行列式的值,讨论其解的情况.

典型题真题精解

【例 1】 利用行列式的定义,求出

$$D_4=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 6 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 6 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$$

的展开式中包含 x^4 和 x^3 的项.

解 由行列式定义知,展开式中的每一项取之于不同行不同列的 4 个元素之积,包含 x^4 的项仅有主对角线 4 个元素之积,若第 1 列不取 $5x$,而取另两个 x 之一,该项至多取主对角线上的两个含 x 的元素,则至多为 x^3,所以包含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1\,2\,3\,4)}5x\cdot x\cdot x\cdot 3x=15x^4$$

展开式中包含 x^3 的项只有两种情形,第 1 列取第 2 行和第 4 行元素,即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x \end{vmatrix}=(-1)^{N(2\,1\,3\,4)}1\cdot x\cdot x\cdot 3x=-3x^3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(4\,2\,3\,1)}6\cdot x\cdot x\cdot x=-6x^3$$

故展开式中包含 x^4 和 x^3 的项为 $15x^4-9x^3$.

本题主要利用行列式定义,展开式中的每一项是取自于行列式的不同行、不同列的 4 个元素的乘积这一规律. 当展开式中某一项含有 a_{ij} 时,该项必不含有第 i 行的其他元素,且也不含第 j 列的其他元素.

碧海书道 BOOK HOUSE

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【例 2】 (010403) 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$$

则第 4 行各元素余子式之和为________.

解法 1 用 $M_{4j}(j=1,2,3,4)$表示第 4 行各元素的余子式,则

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56,\qquad M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42,\qquad M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14$$

所以

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-56+0+42+(-14)=-28$$

解法 2 用 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$表示第 4 行各元素的代数余子式,由于 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}$,于是有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1-c_4\\c_2-c_4\\c_3-c_4}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}3&0&4&0\\0&0&0&2\\0&-7&0&0\\-2&0&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}3&0&4\\0&-7&0\\-2&0&-2\end{vmatrix}=2\times(-7)\begin{vmatrix}3&4\\-2&-2\end{vmatrix}=-28$$

本题最容易出现的是计算错误,审题一定要仔细,求第 4 行的余子式与求第 4 行的代数余子式要区分开.行列式的值等于第 4 行的各个元素与其所对应的代数余子式乘积之和.若本题是:求第 4 行代数余子式之和,则

$$\begin{aligned}&A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}\\&=(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=-(-56)+0-42+(-14)=0\end{aligned}$$

或者

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

(注意到第 2 行与第 4 行对应元素成比例,其值为零.)

本题主要是让读者正确理解余子式和代数余子式的概念,并能灵活运用行列式按行(列)展开定理.解法 2 比解法 1 计算简便,此类型题是考研常出的题型.

【例 3】 计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & l \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -l & -k & 0 \end{vmatrix}$$

剖析 由于行列式 D 的元素之间有关系式 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,5)$,将行列式每行提出一个公因子$(-1)$,再利用转置行列式其值不变($D=D^{\mathrm{T}}$)的性质计算之.

解 每行提出公因子(-1),得

$$D=(-1)^5\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c & -d \\ a & 0 & -e & -f & -g \\ b & e & 0 & -h & -l \\ c & f & h & 0 & -k \\ d & g & l & k & 0 \end{vmatrix}=-D^{\mathrm{T}}=-D$$

所以 $2D=0$,即 $D=0$.

在行列式中,元素之间满足关系式 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的 n 阶行列式称 n 阶反对称行列式.利用本例的解法可以证明阶数 n 为奇数的反对称行列式,其值等于零.

【例 4】 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 各列对应元素相加后相等,把第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列,有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)$$

一般地，当行列式的各行(列)的元素之和为同一数时，也可以把各行都加至第 1 行(列)，并提取第 1 行(列)的公因子，再把第 1 行(列)的适当倍数分别加至后边各行(列)，使行列式化为上(下)三角形，再求其值. 这是一种类型的行列式，在计算行列式时需仔细观察之.

如

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix},\quad D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

都属于这一种类型，请读者自行完成.

【例 5】 解方程

$$\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}=0$$

解 左式$=\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

$$=[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

即$[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}=0$，解得$x_1=(2-n)a,x_2=x_3=\cdots=x_n=2a$是方程的$n$个根.

【例 6】 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

剖析 当行列式零元素较多时，可考虑直接展开计算.

解 按第 1 列展开，得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

本题也可以按第 n 行展开.

【例 7】 计算 6 阶行列式

$$D_6=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

解　在行列式 D_6 中第 3,4,5 列所能组成的 3 阶子式中只有一个非零子式，利用拉普拉斯定理按第 3,4,5 列展开，得

$$D_6=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}(-1)^{3+4+5+3+4+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}^2=(x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2$$

该题也可以按第一行展开来计算，请读者自行完成，并将两种方法进行比较.

【例 8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\quad (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

解　第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3,\cdots,n+1)$，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2-r_3-\cdots-r_n}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

这种类型的行列式，称为“爪”形行列式. 一般地，对于“爪”形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{(n-1),1} & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1),(n-1)} & 0\\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解题步骤是：若 $a_{ii}\neq 0(i=2,3,\cdots,n)$，则将第 i 列的 $\left(-\frac{a_{11}}{a_{ii}}\right)$ 倍加至第 1 列 $(i=2,3,\cdots,n)$，就将行列式化为上三角形行列式；若有某 $a_{ii}=0$，则利用降阶法可将行列式化成对角形行列式，不必用此方法. “爪”形行列式主要指 $a_{ii}\neq 0$ 的情形. 有些行列式可化为“爪”形行列式.

【例 9】 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$$

解 对行列式 D_n“加边”，得到 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1\\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_1x_{n-1} & x_2x_{n-1} & \cdots & x_nx_{n-1}\\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}_{n+1}$$

将行列式的第 1 行乘 $(-x_i)$ 加到第 $i+1$ 行 $(i=1,2,\cdots,n)$，得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com