

高等学校教材
工程数学

积分变换

(第三版)

南京工学院数学教研组 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

工 程 数 学

积 分 变 换

(第 三 版)

南京工学院数学教研组 编

.....
高 等 教 育 出 版 社

出版前言

本书介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换这两类积分变换的基本内容,初版于1978年,1982年按照原教育部1980年颁发的《工程数学教学大纲(草案)》(“积分变换”部分)进行了修订(第二版),此第三版只对第二版作了一些小修改和补充了两个例题,书中带“*”的内容可供工科五年制有关专业选用,书后附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表可供学习时查用。

本书可供高等工业院校有关专业选作教材,也可供有关工程技术人员参考。

本书的编者为南京工学院数学教研组,现南京工学院改名为东南大学,因此编者应为东南大学数力系。为使读者在选购本书时不至发生疑问,我们仍用南京工学院数学教研组作为本书编者的署名。本书的修订工作仍由张元林同志执笔。

本书第二版获1976~1985国家教委高等学校优秀教材二等奖。

高等学校教材

工 程 数 学

积 分 变 换

(第三版)

南京工学院数学教研组 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 3.875 字数 93 000

1978年12月第1版 1989年5月第3版 1990年1月第1次印刷

印数 0 001—45 090

ISBN7-04-002571-X/O·852

定价 0.89 元

第二版前言

南京工学院数学教研组 1978 年编写的高等学校试用教材《工程数学——积分变换》(第一版)是在我院机、电类型各专业使用讲义的基础上,按照 1977 年 10 月在北京召开的高等学校工科基础课教材座谈会的精神和同年 11 月在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议所订的教材编写大纲修改、补充而成的。这次是在第一版的基础上,按照 1980 年 6 月工科数学教材编审委员会(扩大)会议的精神及教育部于 1980 年颁发的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“积分变换”部分的要求,同时兼顾高等工业院校五年制各类专业的需要修订的。这次修订,是根据我院教学中对第一版使用的情况,也吸取了有关方面的意见,并尽可能地将大家的宝贵意见和教学经验融于书中。修订中,除单位脉冲函数及其傅氏变换一节重新编写外,有些章节也适当地增加了些内容,同时并增补了一些例题及习题。修订后,仍旧保持第一版的系统和结构,对于超出高等工业院校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“积分变换”部分要求的内容或者标以“*”号,或者只给出条件与结论而不加证明。

根据各类专业及四、五年学制的不同要求,在学时分配上,提出如下意见,供教学中参考。

- 1°. 全书的教学时数大约为 20 学时;
- 2°. 若不讲授书中有“*”号的内容,其教学时数为 12—14 学时(即四年制《工程数学教学大纲(草案)》“积分变换”部分的要求);

- 3°. 对于只需要拉氏变换的专业,可删去 § 2.1 的 1(直接给

出拉氏变换的定义)及第二章中有“*”号的内容,其教学时数为6—8学时。

本书可作为高等工业院校《工程数学——积分变换》的教材,也可供有关工程技术人员参考。

本书由浙江大学周茂清教授审阅,他提出了许多重要的修改意见;在修订中,得到王元明同志的热情帮助,他认真修改了部分原稿;焦传桂、吴学澄两同志对原稿也提出了一些有益的意见;很多兄弟院校、单位及个人曾对本书的第一版提出了许多宝贵意见和建议。编者对于上述所有的关注表示衷心感谢。

本书的修订工作由张元林同志执笔完成。

由于编者水平所限,书中一定还存在不少缺点和不当之处,殷切期望同志们批评指教。

编 者

1981 年 10 月

目 录

第二版前言	1
引言	1
第一章 傅里叶变换	3
§ 1.1 傅氏积分	3
习题一	8
§ 1.2 傅氏变换	9
1. 傅氏变换的概念	9
2. 单位脉冲函数及其傅氏变换	13
3. 非周期函数的频谱	20
习题二	25
§ 1.3 傅氏变换的性质	27
1. 线性性质	27
2. 位移性质	28
3. 微分性质	29
4. 积分性质	30
5*. 乘积定理	31
6*. 能量积分	32
习题三	33
§ 1.4 卷积与相关函数	35
1. 卷积定理	35
2*. 相关函数	37
习题四	44
第二章 拉普拉斯变换	46
§ 2.1 拉氏变换的概念	46
1. 问题的提出	46
2. 拉氏变换的存在定理	48
习题一	58

§ 2.2 拉氏变换的性质	59
1. 线性性质	59
2. 微分性质	60
3. 积分性质	62
4. 位移性质	63
5. 延迟性质	64
6*. 初值定理与终值定理	67
习题二	70
§ 2.3 拉氏逆变换	72
习题三	78
§ 2.4 卷积	79
1. 卷积的概念	79
2. 卷积定理	80
习题四	83
§ 2.5 拉氏变换的应用	83
1. 微分方程的拉氏变换解法	84
2*. 线性系统的传递函数	94
习题五	98
附录 I 傅氏变换简表	100
附录 II 拉氏变换简表	106
习题答案	111

引 言

在数学中,为了把较复杂的运算转化为较简单的运算,常常采取一种变换手段.例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差,然后再取反对数,即得到原来数量的乘积或商.这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算(当然,上述运算是依赖于对数表来完成的).再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况.所谓积分变换,就是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换,一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t) K(t, \alpha) dt.$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$,这里 $K(t, \alpha)$ 是一个确定的二元函数,称为积分变换的核.当选取不同的积分域和变换核时,就得到不同名称的积分变换. $f(t)$ 称为象原函数, $F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的象函数,在一定条件下,它们是一一对应而变换是可逆的.

用积分变换去解微分方程或其它方程,就如同用对数变换计算数量的乘积或商一样.如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时,则可求它的某种积分变换的象函数 Y ,然后再由求得的 Y 去找 y .当然,这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的关于 y 的象函数 Y 的方程是容易求解的.一般地说,在这种变换之下,原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程;原来的常微分方程可以变成代数方程,从而使得在函数类 B 中的运算简化,找出在 B 中的一个解,再经过逆

变换，就得到原来要在函数类 A 中所求的解(当然，上述求变换与求逆变换是依赖于积分变换表来完成的)。

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中，而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用，它已成为不可缺少的运算工具。本书要介绍的是最常用的两类积分变换：傅里叶变换和拉普拉斯变换。我们着重讨论它们的定义、性质及某些应用。

第一章 傅里叶变换

§ 1.1 傅氏积分

在学习傅里叶(Fourier)级数的时候,我们已经知道,一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$, 如果在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件(简称狄氏条件,即函数在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点), 那末在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成傅氏级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处,级数的三角形形式为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (1.1)$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

为了今后应用上的方便,下面把傅氏级数的三角形形式转换为复指数形式. 利用欧拉(Euler)公式①

① 数学中常用“ i ”表示虚数单位,这里用“ j ”是按照电工学中通常的习惯.

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = -j \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2},$$

此时, (1.1) 式可写为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right].$$

如果令

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt,$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega t dt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega t dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) [\cos n\omega t - j \sin n\omega t] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{jn\omega t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

若令

$$\omega_n = n\omega \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

则(1.1)式可写为

$$\begin{aligned} f_T(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}, \end{aligned}$$

这就是傅氏级数的复指数形式。或者写为

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}. \quad (1.2)$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题。任何一个非周期函

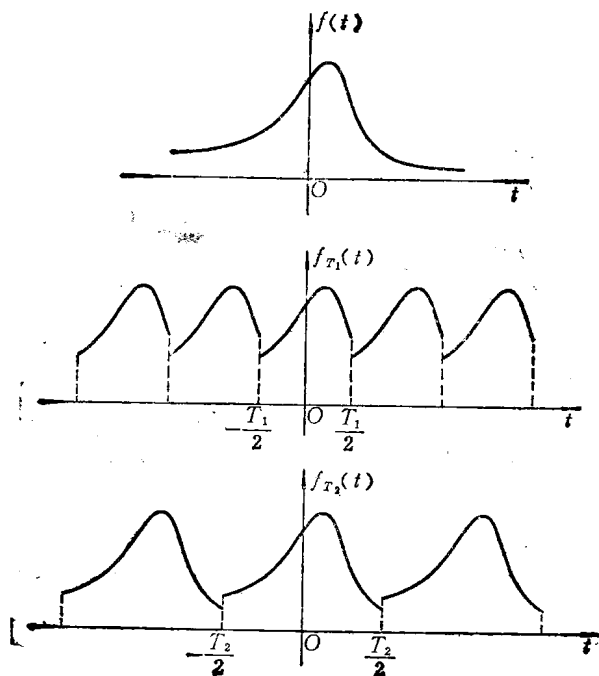


图 1-1

数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \rightarrow +\infty$ 时转化而来的。为了说明这一点，我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$ ，使其在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$ ，而在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上，如图 1-1 所示。很明显， T 越大， $f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大，这表明当 $T \rightarrow +\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$ ，即有

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f(t).$$

这样，在 (1.2) 式中令 $T \rightarrow +\infty$ 时，结果就可以看成是 $f(t)$ 的展开式，即

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}.$$

当 n 取一切整数时， ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上，如图 1-2 所示。若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示，即

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}, \text{ 或 } T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$



图 1-2

则当 $T \rightarrow +\infty$ 时，有 $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ ，所以上式又可以写为

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n. \quad (1.3)$$

当 t 固定时， $\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数，记为 $\Phi_T(\omega_n)$ ，即

$$\Phi_T(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega_n)$ 可将 (1.3) 式写成

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_T(\omega_n) \Delta\omega_n.$$

很明显, 当 $\Delta\omega_n \rightarrow 0$, 即 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\Phi_T(\omega_n) \rightarrow \Phi(\omega_n)$, 这里

$$\Phi(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega_n) d\omega_n,$$

即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega,$$

亦即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的傅里叶积分公式(简称傅氏积分公式). 应该指出, 上式只是由 (1.3) 式的右端从形式上推出来的, 是不严格的. 至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下, 可以用傅氏积分公式来表示, 有下面的定理.

傅氏积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足下列条件:

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄氏条件; 2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积(即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛), 则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (1.4)$$

成立, 而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处, 应以 $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ 来代替. 这个定理的条件是充分的, 它的证明要用到较多的基础理论, 这里从略.

(1.4) 式是 $f(t)$ 的傅氏积分公式的复指数形式, 利用欧拉公

① 式中的广义积分都是在主值意义下的, 所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

式, 可将它转化为三角形形式. 因为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega, \end{aligned}$$

考虑到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$ 是 ω 的奇函数, 就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega = 0,$$

从而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega, \quad (1.5)$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau$$

是 ω 的偶函数, (1.5) 又可写为

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega. \quad (1.6)$$

这便是 $f(t)$ 的傅氏积分公式的三角形形式. 稍加改变, 还可以得到其他形式, 这些都放在习题里了.

习 题 一

1. 试证: 若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

2. 试证: 若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件, 当 $f(t)$ 为奇函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau;$$

当 $f(t)$ 为偶函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

3. 在题 2 中, 设 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$ 试算出 $a(\omega)$, 并推证

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < 1; \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

§ 1.2 傅氏积分

1. 傅氏变换的概念

我们已经知道, 若函数 $f(t)$ 满足傅氏积分定理中的条件, 则在 $f(t)$ 的连续点处, 便有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (1.7)$$

成立.

从 (1.7) 式出发, 设

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.8)$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.9)$$

从上面两式可以看出, $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 通过指定的积分运算可以相互表达. (1.8) 式叫做 $f(t)$ 的傅氏变换式, 可记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)].$$

$F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的象函数. (1.9) 式叫做 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换式, 可记为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)].$$

$f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的象原函数.

(1.8) 式右端的积分运算, 叫做取 $f(t)$ 的傅氏变换, 同样, (1.9) 式右端的积分运算, 叫做取 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换. 可以说象函数 $F(\omega)$ 和象原函数 $f(t)$ 构成了一个傅氏变换对.

例 1 求函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 的傅氏变换及其积分表达式, 其中 $\beta > 0$. 这个 $f(t)$ 叫做指数衰减函数, 是工程技术中常碰到的一个函数.

根据 (1.8) 式, 有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{\beta + j\omega} = \frac{\beta - j\omega}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

这便是指数衰减函数的傅氏变换. 下面我们来求指数衰减函数的积分表达式.

根据 (1.9) 式, 并利用奇偶函数的积分性质, 可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - j\omega}{\beta^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned}$$