高中数学综合复习丛书

代数

杨象富

河北教育出版社

前　言

近十多年来，各省、市出版的高中数学复习用书，由于没有打破原有系统，仍按照已学过的高中课本中原有章节程序编写，且所配例题及提要，缺少对学过的知识作纵横联系的综合分析与研究，因此在使用时，师生们都感到平淡、重复，难以提高对综合题、难题的解题能力。还有一类书是高等师范院校编写的初等数学复习研究教材（有的是翻译本），这类书虽增加了一些近世数学的初步知识，但大部份只是重复高中课本内容，脱离当前中学复习教学的实际，缺乏解题的分析和能力的培养。有的省市还出版了题解或习题集之类的书籍，可作为教学时参考，不能作为学生的复习课本。基于上述各种原因，我国还没有一本质量较高的复习课本，每当高中毕业班复习时，各校教师只得另编讲义给学生复习，耗费了老师们不少的精力与时间。

我们认为，复习决不只是重复，必须在已学的基础上加以深入探讨，把几年中分散学到的知识，作一次概括的、有机的、纵横联系的综合分析与研究，才能使以前所学知识得以融会贯通，才能大大提高原有的理论分析水平，才能更多地、灵活地掌握各种解题方法和技巧，才能开拓出一片新的境界。由于以上认识，本丛书打破了课本原有的程序，以专题综合分析研究的角度，精心选择、安排各种类型的范例，

来复习全部高中数学的基础知识、基本方法、技能和技巧，以求达到上述的综合提高的目的。

本丛书有明显的新意，有合适的深度，便于课堂教学。书中语句通俗易懂，且配有习题解答，也可供学生自学。本丛书是我们三、四十年来教学经验的结晶，在实践中既缩短了高考前的复习时间，又得到了相当显著的教学效果。本丛书每章都配置适当的习题（分A、B组），最后有综合复习题（包括选择、填空和解答证明题）。这些习题足以概括高中数学的全部知识。书后所附习题答案或提示（对难题有详细解答），都经编者自解和使用，不致有错。本丛书适宜于作为高中复习课本，或作为高等师范院校初等数学复习研究课本。

由于受编著时间以及我们能力所限，书中定有一些疏忽或谬误之处，恳请读者们来函批评指出，以便再版时修正。

编　者

目 录

第一章 集合与函数

集合论是现代数学的基础。掌握集合的初步知识，可以对中学数学的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确。一般自然科学都是研究函数，函数在中学数学里是最重要的基本概念之一。

本章要求：(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集等概念；(2) 通过学习集合与映射，加深对函数有关概念的理解。掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质，会解简单的指数方程与对数方程。

下面通过精选、分析和解答例题，阐明基础知识、基本方法及技能技巧，并注重融会贯通和综合提高。

1. **集合中元素的确定性、互异性和无序性**

例1 设集合 $A=\{1, a, b\}$，集合 $B=\{a, a^2, ab\}$，且 $A=B$，求实数 a、b。

分析：根据集合中元素的"三性"，为求 a、b，只需列出关于 a、b 的二个方程。

解：由 $A=B$，可得

$$\begin{cases}1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\\ 1+a+b=a+a^2+ab.\end{cases}\text{即}\begin{cases}ab(a^3-1)=0, & ①\\ (a-1)(a+b+1)=0. & ②\end{cases}$$

因为集合中的元素互异，所以 $a\neq0$，$a\neq1$。于是由①

得 $b=0$，再由②得 $a=-1$。

$\therefore\quad a=-1,\ b=0$。

2．证明两个集合相等

例2 设 A、B、C 为任意三个集合，求证：

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

证明：(1) 设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，即 $x\in A$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$。不论是 $x\in A$，还是 $x\in B$，$x\in C$，总有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

$$\therefore\quad A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)；$$

反之，由 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，可得 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，$\therefore x\in A$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$，即 $x\in A$，或 $x\in B\cap C$，从而 $x\in A\cup(B\cap C)$。$\therefore(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

综上，得 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

(2) 可仿 (1) 证明（请读者完成）。

说明：为证集合 $M=N$，需证 $M\subseteq N$ 且 $N\subseteq M$。

3．用文氏图解题

例3 向50名学生调查对 A、B 两事件的态度，赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多3人，其余的不赞成。另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多1个。问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生，各有多少人？

分析：这里的数量关系错综复杂，采用文氏图可加强直观性。

解：赞成 A 的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 30

$+3=33$。

如图 1-1，记 50 名学生组成的集合为 I，赞成事件 A 的学生全体为集合 A，赞成事件 B 的学生全体为集合 B。设对 A、B 都赞成的学生人数为 x，则由题设知对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$，于是可得方程：

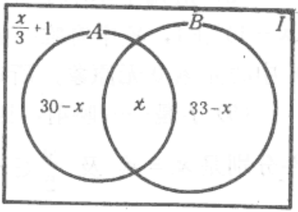

图 1-1

$$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50.$$

解之得 $x=21$，$\frac{x}{3}+1=8$。

所以，对 A、B 都赞成的学生有 21 人，对 A、B 都不赞成的学生有 8 人。

4．映射与一一映射

例 4 已知集合 X、Y 和对应法则 f：

（1）$X=R$，$Y=\left\{y\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$，$f$：$x|\to y=\operatorname{arc\,tg} x$；

（2）$X=\{x|x\geqslant 2,\ x\in N\}$，$Y=\{y|y\geqslant 0,\ y\in Z\}$，$f$：$x|\to y=x^2-2x+2$；

（3）$X=Z$，$Y=\{y|y=2k,\ k\in Z\}$，f：$x|\to y=2x$；

（4）$X=\{$矩形$\}$，$Y=\{y|y>0\}$，f：$x|\to y=x$ 的面积。

试指出哪些对应是映射？哪些是一一映射？为什么？

解：(1) 对任一实数 x，$y=\operatorname{arcctg} x$ 唯一确定，故 f 是映射；又对于 X 中的不同元素，在 Y 中有不同的象，而且 Y 中的每一个元素都有原象，所以 f 是一一映射。

(2) 对每个不小于 2 的自然数 x，由 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，Y 中有唯一的值和它对应，故 f 是映射。因为 Y 中的元素 0 无原象，所以 f 不是一一映射。

(3) f 是一一映射，因为 $2x_1=2x_2$ 及 y 为偶数的充要条件分别是 $x_1=x_2$ 及 $\dfrac{y}{2}\in Z$。

(4) 每个矩形有一个确定的面积，故 f 是映射。但 f 不是一一映射，因为不同的矩形可能有相同的面积。

例 5 (1) 求一个闭区间 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 上的一一映射；

(2) 求一个开区间 $(0, 1)$ 到整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的一一映射。

解：(1) 考虑线性变换 $f(x)=kx+m$，使 $f(0)=a$，$f(1)=b$。由此可求得 $m=a$，$k=b-a$。

$$\therefore \quad f:\ [0, 1]\to[a, b],\ x\mapsto(b-a)x+a$$

是一个 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 上的一一映射。

(2) 因为线性变换 $h(t)=\pi t$ 将 $(0, 1)$ 一一映射到 $(0, \pi)$，$g(x)=\operatorname{ctg} x$ 将 $(0, \pi)$ 一一映射到 $(-\infty, +\infty)$，所以

$$f:\ (0, 1)\to(-\infty, +\infty),\ t\mapsto\operatorname{ctg}\pi t$$

将 $(0, 1)$ 一一映射到 $(-\infty, +\infty)$。

说明：所求的一一映射都不是唯一的。

5. 函数的三要素与符号 $f(x)$

例 6 下面各组中的两个函数是不是同一函数？如果不

是，试指出在自变量的哪一个集合内可视为同一个函数？

(1) $f_1(x)=\lg x^2$，$f_2(x)=2\lg x$；

(2) $g_1(x)=|x|+|x-1|$，$g_2(x)=2x-1$。

解：(1) 函数 $f_1(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，$f_2(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，它们的定义域不同，所以不是同一个函数。

如果限定 $f_1(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，这时 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 就是同一个函数。

(2) 函数 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，但对应法则并不相同，例如在 $(0, 1)$ 上，$g_1(x)=1$ 而 $g_2(x)=2x-1$，就不是同一个函数。

如果限定 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的定义域是 $[1, +\infty)$，这时 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 就是同一个函数。

说明：两个函数只有当它们的定义域、对应法则与值域完全相同时，才可视为同一个函数。

例 7 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，对任意实数 x、y 都有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，同时又存在实数 x_1、x_2，$x_1\neq x_2$ 使 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证：(1) $f(0)=1$；(2) $f(x)>0$ 对任何实数 x 都成立。

证明：(1) 设 $x=1$，$y=0$，则 $f(1)=f(0)\cdot f(1)$； ①

设 $x=0$，$y=0$，则 $f(0)=f(0)\cdot f(0)$。 ②

由②得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$；

若 $f(0)=0$，代入①得 $f(1)=0$。这时出现 $0\neq 1$ 但 $f(0)=f(1)$，与已知矛盾；

若 $f(0)=1$，代入①得 $f(1)=f(1)$，$\therefore f(0)=1$。

(2) 令 $x=y=m(m\in R)$，有 $f(2m)=f(m)\cdot f(m)$。这时

如果 $f(m)=0$ 则必 $f(2m)=0$ }由已知必须 $m=2m$，即 $m=0$。于是有 $f(0)=0$，这与（1）中的 $f(0)=1$ 相矛盾。

可见，对 $x\in R$，$f(x)$ 均非零，即 $f(x)$ 的图象与 x 轴无交点，而 $f(0)=1$，因此 $f(x)$ 的图象在 x 轴的上方，即 $f(x)>0$ 对 $x\in R$ 恒成立。

6．求二次函数

例8 设方程 $x^2-x+1=0$ 的两根为 α、β，试求满足条件 $f(\alpha)=\beta$，$f(\beta)=\alpha$，$f(1)=1$ 的二次函数 $f(x)$。

分析： 可先解出 α、β，然后利用题设的三个独立条件求得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中的 a、b、c；也可以不求 α、β，而由韦达定理求 a、b、c；如果整体使用条件 $x^2-x+1=0$，设 $f(x)=a(x^2-x+1)+dx+e$，则可使解法更简捷。

解法一： 由 $x^2-x+1=0$，

易得 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，　$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$。

于是 $\alpha^2=\alpha-1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，同理 $\beta^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则由题设知

$$a\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)+b\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)+c=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \quad ①$$

$$a\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+b\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)+c=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad ②$$

$$a+b+c=1. \quad ③$$

①＋②，得　$-a+b+2c=1$，　④

①－②，得　$a+b=-1$。　⑤

由③、④、⑤可解得 $a=1$，$b=-2$，$c=2$。

$$\therefore \quad f(x)=x^2-2x+2.$$

解法二：据韦达定理得 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$（且 $\alpha\neq\beta$）. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则由题设有

$$a\alpha^2+b\alpha+c=\beta, \qquad ⑥$$

$$a\beta^2+b\beta+c=\alpha, \qquad ⑦$$

$$a+b+c=1. \qquad ③$$

⑥+⑦并应用 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$，$\alpha+\beta=1$，可得④。

⑥－⑦，并从两边约去 $\alpha-\beta$，可得⑤。

其余同解法一。

解法三：设 $f(x)=a(x^2-x+1)+dx+e$，则由题设可知

$$f(\alpha)=a(\alpha^2-\alpha+1)+d\alpha+e=d\alpha+e=\beta,$$

即 $\quad f(\alpha)=d\alpha+e=\beta, \qquad ⑧$

同样 $\quad f(\beta)=d\beta+e=\alpha, \qquad ⑨$

又 $\quad f(1)=a+d+e=1. \qquad ⑩$

⑧－⑨，得 $d(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$，

$\because \quad \alpha\neq\beta$，$\therefore \quad d=-1$.

⑧+⑨，得 $d(\alpha+\beta)+2e=\alpha+\beta$，

$\because \quad \alpha+\beta=1$，$d=-1$，$\therefore \quad e=1$.

进而由⑩得 $a=1$，

$\therefore \quad f(x)=(x^2-x+1)-x+1=x^2-2x+2$.

7. 函数的定义域、值域与反函数

例 9　求下列各函数的定义域：

(1) $f_1(x)=\dfrac{1}{x^2-|x|}$；

(2) $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{64-x^2}}+\lg\sin x$。

解：(1) 由 $x^2-|x|\neq 0$，得 $|x|(|x|-1)\neq 0$，即 $|x|\neq 0$ 且 $|x|\neq 1$，$\therefore x\neq 0$ 且 $x\neq\pm 1$。即函数 $f_1(x)$ 的定义域是

$$(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty).$$

说明：方程 $|x|(|x|-1)=0$ 的解是 $|x|=0$ 或 $|x|=1$，而使 $|x|(|x|-1)\neq 0$ 成立的值却是 $|x|\neq 0$ 且 $|x|\neq 1$，要注意正确使用"或"与"且"。

(2) $f_2(x)$ 含有分式，$\sqrt{64-x^2}\neq 0$；对偶次根式，$64-x^2\geqslant 0$；由对数定义，$\sin x>0$。综合起来应满足

$$\begin{cases}64-x^2>0,\\ \sin x>0.\end{cases}\quad 即\begin{cases}-8<x<8,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\quad (k\in Z).\end{cases}$$

$\therefore$函数 $f_2(x)$ 的定义域是

$$(-2\pi,\ -\pi)\cup(0,\ \pi)\cup(2\pi,\ 8).$$

说明：求函数定义域时要考虑到：(1) 对分式，分母 $\neq 0$；(2) 对偶次根式，被开方数 $\geqslant 0$；(3) 关于对数：真数 >0，底数 >0，底数 $\neq 1$；(4) 对正切 $\operatorname{tg} x$：$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$；对余切 $\operatorname{ctg} x$：$x\neq k\pi$ $(k\in Z)$；(5) 对反正弦、反余弦 $\arcsin x$，$\arccos x$：$|x|\leqslant 1$；(6) 各类实际问题对变量的要求。

例 10 求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的反函数及它们的定义域、值域。

解：从 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$，可得 $y=\dfrac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$，

解出 10^{2x}，有 $10^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$，$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\lg\frac{1+y}{1-y}$.

$\therefore\quad y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$.

原函数的定义域是 R，反函数的定义域是

$$\left\{x\left|\frac{1+x}{1-x}>0\right.\right\}=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-1}<0\right.\right\}=\{x|-1<x<1\}.$$

$\therefore$原函数的定义域为 R，值域为$(-1,1)$；它的反函数的定义域为$(-1,1)$，值域为 R.

说明：在函数 $y=f(x)$ 是一一映射时，通过求其反函数的定义域来确定函数的值域，是求函数值域的常用方法之一. 求函数值域（包括最大值、最小值）的初等方法还有：观察法、判别式法（见例 11）、换元法、不等式法、图象法等.

例 11　当 $x>0$，$y>0$，$xy^{1+\lg x}=1$ 时，xy 的取值范围是什么？

解：在 $xy^{1+\lg x}=1$ 的两边取对数，得

$$\lg x+(1+\lg x)\cdot\lg y=0.$$

设 $\lg x=t$，则 $t\neq-1$，($\because\quad xy^{1+\lg x}=1$)，

于是 $\lg y=\frac{-t}{1+t}$.

$$\therefore\quad \lg(xy)=\lg x+\lg y=t-\frac{t}{1+t}=\frac{t^2}{1+t},$$

即　$t^2-t\cdot\lg(xy)-\lg(xy)=0$.

$\because\quad t\in R$，$\therefore\quad \triangle=[\lg(xy)]^2+4\lg(xy)\geqslant0$，

$\therefore\quad \lg(xy)\geqslant0$，或 $\lg(xy)\leqslant-4$.

$\therefore$ xy 的取值范围是 $xy \geqslant 1$ 或 $0 < xy \leqslant 10^{-4}$.

8. 含对数符号的方程与不等式

例 12　设 c, d, x 为实数，$c \neq 0$，x 为未知数，讨论方程 $\log_{(cx+\frac{d}{x})} x = -1$ 在什么情形下有解，有解时求出它的解.

解：实数 x 是原方程的解的充要条件是

$$\begin{cases} x > 0 & ① \\ cx + \dfrac{d}{x} > 0 & ② \\ cx + \dfrac{d}{x} \neq 1 & ③ \\ \left(cx + \dfrac{d}{x}\right)^{-1} = x & ④ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 & ① \\ x \neq 1 & ③' \\ x\left(cx + \dfrac{d}{x}\right) = 1 & ④' \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 & ① \\ x \neq 1 & ③' \\ x^2 = \dfrac{1-d}{c} & ④'' \end{cases}$$

为使方程④″有异于 1 的正数解，必须

$$\frac{1-d}{c} > 0, \text{ 且 } \frac{1-d}{c} \neq 1.$$

即当 $c > 0$, $d < 1$, $c + d \neq 1$，或 $c < 0$, $d > 1$, $c + d \neq 1$ 时，原方程有解 $x = \sqrt{\dfrac{1-d}{c}}$.

说明：解含有对数符号的方程与不等式，一定要讨论对数的定义域，注意变形的同解性.

例 13　设 $0 < x < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与