



高中数学综合复习丛书

代数

杨 象 富

河北教育出版社

前 言

近十多年来，各省、市出版的高中数学复习用书，由于没有打破原有系统，仍按照已学过的高中课本中原有章节程序编写，且所配例题及提要，缺少对学过的知识作纵横联系的综合分析与研究，因此在使用时，师生们都感到平淡、重复，难以提高对综合题、难题的解题能力。还有一类书是高等师范院校编写的初等数学复习研究教材（有的是翻译本），这类书虽增加了一些近世数学的初步知识，但大部份只是重复高中课本内容，脱离当前中学复习教学的实际，缺乏解题的分析和能力的培养。有的省市还出版了题解或习题集之类的书籍，可作为教学时参考，不能作为学生的复习课本。基于上述各种原因，我国还没有一本质量较高的复习课本，每当高中毕业班复习时，各校教师只得另编讲义给学生复习，耗费了老师们不少的精力与时间。

我们认为，复习决不只是重复，必须在已学的基础上加以深入探讨，把几年中分散学到的知识，作一次概括的、有机的、纵横联系的综合分析与研究，才能使以前所学知识得以融会贯通，才能大大提高原有的理论分析水平，才能更多地、灵活地掌握各种解题方法和技巧，才能开拓出一片新的境界。由于以上认识，本丛书打破了课本原有的程序，以专题综合分析研究的角度，精心选择、安排各种类型的范例，

来复习全部高中数学的基础知识、基本方法、技能和技巧，以求达到上述的综合提高的目的。

本丛书有明显的新意，有合适的深度，便于课堂教学。书中语句通俗易懂，且配有习题解答，也可供学生自学。本丛书是我们三、四十年来教学经验的结晶，在实践中既缩短了高考前的复习时间，又得到了相当显著的教学效果。本丛书每章都配置适当的习题（分A、B组），最后有综合复习题（包括选择、填空和解答证明题）。这些习题足以概括高中数学的全部知识。书后所附习题答案或提示（对难题有详细解答），都经编者自解和使用，不致有错。本丛书适宜于作为高中复习课本，或作为高等师范院校初等数学复习研究课本。

由于受编著时间以及我们能力所限，书中定有一些疏忽或谬误之处，恳请读者们来函批评指出，以便再版时修正。

编者

目 录

第一章 集合与函数	(1)
1. 集合中元素的确定性、互异性和无序性	(1)
2. 证明两个集合相等	(2)
3. 用文氏图解题	(2)
4. 映射与一一映射	(3)
5. 函数的三要素与符号 $f(x)$	(4)
6. 求二次函数	(6)
7. 函数的定义域、值域与反函数	(7)
8. 含对数符号的方程与不等式	(10)
9. 简单的函数方程	(13)
10. 一道集合与函数的综合题	(14)
第二章 关于方程的几类例题	(22)
1. 解含有参数的方程	(22)
2. 判别式与韦达定理的进一步应用	(24)
3. 由实根的性质确定参数的取值范围	(26)
4. 方程的个数与元数	(28)
5. 方程同解性的讨论	(29)
6. 未知量与参变量的转换	(33)
第三章 复数及其应用	(38)
1. 基本的计算题、证明题	(39)
2. 与复数的模有关的问题	(41)
3. 利用复数解数论问题	(45)

4. 利用复数解三角题	(46)
5. 利用复数解几何题	(48)
6. 利用复数解平面解析几何题	(49)
7. 复数与电子讯号设计	(53)
第四章 不等式的证明	(62)
1. 分析综合法、放缩法、几何法、复数法与三角法	(62)
2. 比较法与利用平均值不等式	(64)
3. “步差法”与“差分求和法”	(66)
4. 含绝对值的不等式的证明	(68)
5. Pedoe 不等式的一个证明	(69)
6. Cauchy 不等式的证明及其灵活运用	(70)
7. 利用函数性质证明不等式	(74)
第五章 不等式的解法	(78)
1. 数字系数的高次不等式与分式不等式	(78)
2. 含字母系数的有理不等式	(80)
3. 无理不等式与对数不等式	(82)
4. 与方程、几何、解析几何有关的问题	(85)
第六章 数列与递推	(92)
1. 直接与等差数列、等比数列有关的题目	(92)
2. 用“拆裂法”求数列的和	(94)
3. 用组合数公式解数列问题	(96)
4. 一道与数列有关的不等式证明题	(97)
5. 递推数列的常见类型与解法	(98)
第七章 数学归纳法的应用	(109)
1. 证明“ $p(k+1)$ 真”的关键是创造条件使用归纳假设 “ $p(k)$ 真”	(109)
2. 需要较多的分析、较高的技巧的例题	(114)
3. 数学归纳法与递推	(117)

4. 增多“奠基”个数, 加强归纳假设	(119)
5. “跳档”推进与倒退回填	(120)
6. 双向递推的例子	(121)
7. “翘翘板归纳法”	(122)
8. 主动加强命题, 由强的归纳假设到强的归纳结论	(123)
第八章 排列与组合	(127)
1. 组合数性质的简单应用与简单的组合数恒等式的基 本证法	(127)
2. 排列、组合应用题的几种基本解法	(129)
3. 排队问题	(130)
4. 分配问题	(133)
5. 几何问题	(136)
6. 数码问题	(137)
第九章 二项式定理和组合数恒等式	(143)
1. 二项式定理的直接应用	(143)
2. 拆项与二项式定理之逆用	(145)
3. 证明组合数恒等式的常用方法六种	(146)
4. 李善兰恒等式	(148)
5. 利用复数证明组合数恒等式	(149)
6. 二项展开式的最大项	(152)
7. 组合数与数列	(153)
8. 一类组合数恒等式的递推公式	(156)
第十章 换元方法十二种	(162)
1. 有理式的代换	(162)
2. 根式的代换	(165)
3. 初等超越函数式的代换	(166)
4. 比值代换	(168)
5. 整体代换	(169)

6. 基于公式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 的三角代换	(170)
7. 正切代换和万能代换	(172)
8. 引进辅助角的三角代换	(174)
9. 标准量代换	(176)
10. 对称代换	(177)
11. 常数代换	(179)
12. 复变量代换	(181)
第十一章 综合题的解题思路探讨	(184)
1. “分类讨论”与“统一解决”	(184)
2. “普遍化”与“特殊化”	(186)
3. 从反面去思考:“正难则反”	(188)
4. “数形结合”与“归到定义去”	(189)
5. 通过不等关系证明相等	(190)
6. 多种方法的综合、灵活运用	(191)
复习题	(204)
习题及复习题的答案或提示	(214)
附录	(246)

第一章 集合与函数

集合论是现代数学的基础。掌握集合的初步知识，可以对中学数学的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确。一般自然科学都是研究函数，函数在中学数学里是最重要的基本概念之一。

本章要求：(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集等概念；(2) 通过学习集合与映射，加深对函数有关概念的理解。掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质，会解简单的指数方程与对数方程。

下面通过精选、分析和解答例题，阐明基础知识、基本方法及技能技巧，并注重融会贯通和综合提高。

1. 集合中元素的确定性、互异性和无序性

例1 设集合 $A = \{1, a, b\}$ ，集合 $B = \{a, a^2, ab\}$ ，且 $A = B$ ，求实数 a, b 。

分析：根据集合中元素的“三性”，为求 a, b ，只需列出关于 a, b 的二个方程。

解：由 $A = B$ ，可得

$$\begin{cases} 1 \cdot a \cdot b = a \cdot a^2 \cdot ab, \\ 1 + a + b = a + a^2 + ab. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} ab(a^3 - 1) = 0, \\ (a - 1)(a + b + 1) = 0. \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

因为集合中的元素互异，所以 $a \neq 0$ ， $a \neq 1$ 。于是由 ①

得 $b=0$, 再由②得 $a=-1$.

$\therefore a=-1, b=0$.

2. 证明两个集合相等

例2 设 A, B, C 为任意三个集合, 求证:

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

证明: (1) 设 $x \in A \cup (B \cap C)$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$, 即 $x \in A$, 或 $x \in B$ 且 $x \in C$. 不论是 $x \in A$, 还是 $x \in B$, $x \in C$, 总有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\therefore A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

反之, 由 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 可得 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$, $\therefore x \in A$, 或 $x \in B$ 且 $x \in C$, 即 $x \in A$, 或 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in A \cup (B \cap C)$. $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

综上, 得 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(2) 可仿 (1) 证明 (请读者完成).

说明: 为证集合 $M=N$, 需证 $M \subseteq N$ 且 $N \subseteq M$.

3. 用文氏图解题

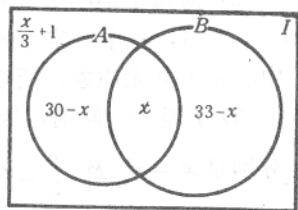
例3 向 50 名学生调查对 A, B 两事件的态度, 赞成 A 的人数是全体的五分之三, 其余的不赞成; 赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人, 其余的不赞成. 另外, 对 A, B 都不赞成的学生数比对 A, B 都赞成的学生数的三分之一多 1 个. 问对 A, B 都赞成的学生和都不赞成的学生, 各有多少人?

分析: 这里的数量关系错综复杂, 采用文氏图可加强直观性.

解: 赞成 A 的人数为 $50 \times \frac{3}{5} = 30$, 赞成 B 的人数为 30

$$\frac{x}{3} + 1 = 33.$$

如图 1-1, 记 50 名学生组成的集合为 I , 赞成事件 A 的学生全体为集合 A , 赞成事件 B 的学生全体为集合 B . 设对 A 、 B 都赞成的学生人数为 x , 则由题设知对 A 、 B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3} + 1$, 赞成 A



而不赞成 B 的人数为 $30 - x$, 赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33 - x$, 于是可得方程:

图 1-1

$$(30 - x) + (33 - x) + x + \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 50.$$

解之得 $x = 21$, $\frac{x}{3} + 1 = 8$.

所以, 对 A 、 B 都赞成的学生有 21 人, 对 A 、 B 都不赞成的学生有 8 人.

4. 映射与一一映射

例 4 已知集合 X 、 Y 和对应法则 f :

$$(1) X = \mathbb{R}, Y = \left\{ y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}, f: x \mapsto y = \arctg x;$$

$$(2) X = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{N}\}, Y = \{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{Z}\}, f: x \mapsto y = x^2 - 2x + 2;$$

$$(3) X = \mathbb{Z}, Y = \{y \mid y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}, f: x \mapsto y = 2x;$$

$$(4) X = \{\text{矩形}\}, Y = \{y \mid y > 0\}, f: x \mapsto y = x \text{ 的面积}.$$

试指出哪些对应是映射? 哪些是一一映射? 为什么?

解: (1) 对任一实数 x , $y = \arctg x$ 唯一确定, 故 f 是映射; 又对于 X 中的不同元素, 在 Y 中有不同的象, 而且 Y 中的每一个元素都有原象, 所以 f 是一一映射。

(2) 对每个不小于 2 的自然数 x , 由 $y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, Y 中有唯一的值和它对应, 故 f 是映射。因为 Y 中的元素 0 无原象, 所以 f 不是一一映射。

(3) f 是一一映射, 因为 $2x_1 = 2x_2$ 及 y 为偶数的充要条件分别是 $x_1 = x_2$ 及 $\frac{y}{2} \in Z$ 。

(4) 每个矩形有一个确定的面积, 故 f 是映射。但 f 不是一一映射, 因为不同的矩形可能有相同的面积。

例 5 (1) 求一个闭区间 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 上的一一映射;

(2) 求一个开区间 $(0, 1)$ 到整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的一一映射。

解: (1) 考虑线性变换 $f(x) = kx + m$, 使 $f(0) = a$, $f(1) = b$ 。由此可求得 $m = a$, $k = b - a$ 。

$\therefore f: [0, 1] \rightarrow [a, b], x \mapsto (b-a)x + a$
是一个 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 上的一一映射。

(2) 因为线性变换 $h(t) = \pi t$ 将 $(0, 1)$ 一一映射到 $(0, \pi)$, $g(x) = \text{ctg } x$ 将 $(0, \pi)$ 一一映射到 $(-\infty, +\infty)$, 所以

$f: (0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty), t \mapsto \text{ctg } \pi t$
将 $(0, 1)$ 一一映射到 $(-\infty, +\infty)$ 。

说明: 所求的一一映射都不是唯一的。

5. 函数的三要素与符号 $f(x)$

例 6 下面各组中的两个函数是不是同一函数? 如果不

是, 试指出在自变量的哪一个集合内可视为同一个函数?

$$(1) f_1(x) = \lg x^2, f_2(x) = 2\lg x;$$

$$(2) g_1(x) = |x| + |x-1|, g_2(x) = 2x-1.$$

解: (1) 函数 $f_1(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f_2(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 它们的定义域不同, 所以不是同一个函数.

如果限定 $f_1(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 这时 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 就是同一个函数.

(2) 函数 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 但对应法则并不相同, 例如在 $(0, 1)$ 上, $g_1(x) = 1$ 而 $g_2(x) = 2x-1$, 就不是同一个函数.

如果限定 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的定义域是 $[1, +\infty)$, 这时 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 就是同一个函数.

说明: 两个函数只有当它们的定义域、对应法则与值域完全相同时, 才可视为同一个函数.

例7 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 同时又存在实数 x_1, x_2 , $x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 求证: (1) $f(0) = 1$; (2) $f(x) > 0$ 对任何实数 x 都成立.

证明: (1) 设 $x = 1, y = 0$, 则 $f(1) = f(0) \cdot f(1)$; ①

设 $x = 0, y = 0$, 则 $f(0) = f(0) \cdot f(0)$. ②

由②得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$;

若 $f(0) = 0$, 代入①得 $f(1) = 0$. 这时出现 $0 \neq 1$ 但 $f(0) = f(1)$, 与已知矛盾;

若 $f(0) = 1$, 代入①得 $f(1) = f(1)$, $\therefore f(0) = 1$.

(2) 令 $x = y = m (m \in R)$, 有 $f(2m) = f(m) \cdot f(m)$. 这时

如果 $f(m) = 0$ } 由已知必须 $m = 2m$, 即 $m = 0$. 于是有 $f(0)$
 则必 $f(2m) = 0$ }
 $= 0$, 这与 (1) 中的 $f(0) = 1$ 相矛盾.

可见, 对 $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 均非零, 即 $f(x)$ 的图象与 x 轴无交点, 而 $f(0) = 1$, 因此 $f(x)$ 的图象在 x 轴的上方, 即 $f(x) > 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

6. 求二次函数

例8 设方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的两根为 α, β , 试求满足条件 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, f(1) = 1$ 的二次函数 $f(x)$.

分析: 可先解出 α, β , 然后利用题设的三个独立条件求得 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中的 a, b, c ; 也可以不求 α, β , 而由韦达定理求 a, b, c ; 如果整体使用条件 $x^2 - x + 1 = 0$, 设 $f(x) = a(x^2 - x + 1) + dx + e$, 则可使解法更简捷.

解法一: 由 $x^2 - x + 1 = 0$,

$$\text{易得 } \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

$$\text{于是 } \alpha^2 = \alpha - 1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \text{同理 } \beta^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则由题设知

$$a\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) + b\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) + c = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad (1)$$

$$a\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + b\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + c = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad (2)$$

$$a + b + c = 1. \quad (3)$$

$$(1) + (2), \text{ 得 } -a + b + 2c = 1, \quad (4)$$

$$(1) - (2), \text{ 得 } a + b = -1. \quad (5)$$

由③、④、⑤可解得 $a=1, b=-2, c=2$.

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

解法二：据韦达定理得 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$ (且 $\alpha \neq \beta$). 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则由题设有

$$aa^2 + ba + c = \beta, \quad (6)$$

$$a\beta^2 + b\beta + c = \alpha, \quad (7)$$

$$a + b + c = 1. \quad (8)$$

⑥ + ⑦ 并应用 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1, \alpha + \beta = 1$, 可得④.

⑥ - ⑦, 并从两边约去 $\alpha - \beta$, 可得⑤.

其余同解法一.

解法三：设 $f(x) = a(x^2 - x + 1) + dx + e$, 则由题设可知

$$f(\alpha) = a(\alpha^2 - \alpha + 1) + d\alpha + e = d\alpha + e = \beta,$$

$$\text{即 } f(\alpha) = d\alpha + e = \beta, \quad (8)$$

$$\text{同样 } f(\beta) = d\beta + e = \alpha, \quad (9)$$

$$\text{又 } f(1) = a + d + e = 1. \quad (10)$$

$$\text{⑧} - \text{⑨}, \text{得 } d(\alpha - \beta) = \beta - \alpha,$$

$$\because \alpha \neq \beta, \therefore d = -1.$$

$$\text{⑧} + \text{⑨}, \text{得 } d(\alpha + \beta) + 2e = \alpha + \beta,$$

$$\because \alpha + \beta = 1, d = -1, \therefore e = 1.$$

进而由⑩得 $a = 1$,

$$\therefore f(x) = (x^2 - x + 1) - x + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

7. 函数的定义域、值域与反函数

例9 求下列各函数的定义域:

$$(1) f_1(x) = \frac{1}{x^2 - |x|},$$

$$(2) f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{64-x^2}} + \lg \sin x.$$

解: (1) 由 $x^2 - |x| \neq 0$, 得 $|x|(|x| - 1) \neq 0$, 即 $|x| \neq 0$ 且 $|x| \neq 1$, $\therefore x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$. 即函数 $f_1(x)$ 的定义域是

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

说明: 方程 $|x|(|x| - 1) = 0$ 的解是 $|x| = 0$ 或 $|x| = 1$, 而使 $|x|(|x| - 1) \neq 0$ 成立的值却是 $|x| \neq 0$ 且 $|x| \neq 1$, 要注意正确使用“或”与“且”.

(2) $f_2(x)$ 含有分式, $\sqrt{64-x^2} \neq 0$; 对偶次根式, $64-x^2 \geq 0$; 由对数定义, $\sin x > 0$. 综合起来应满足

$$\begin{cases} 64-x^2 > 0, \\ \sin x > 0. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -8 < x < 8, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $f_2(x)$ 的定义域是

$$(-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 8).$$

说明: 求函数定义域时要考虑到: (1) 对分式, 分母 $\neq 0$; (2) 对偶次根式, 被开方数 ≥ 0 ; (3) 关于对数: 真数 > 0 , 底数 > 0 , 底数 $\neq 1$; (4) 对正切 $\operatorname{tg} x$: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$; 对余切 $\operatorname{ctg} x$: $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$; (5) 对反正弦、反余弦 $\arcsin x, \arccos x$: $|x| \leq 1$; (6) 各类实际问题对变量的要求.

例 10 求函数 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的反函数及它们的定义域、值域.

解: 从 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$, 可得 $y = \frac{10^{2x} - 1}{10^{2x} + 1}$,

解出 10^{2x} , 有 $10^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$, $\therefore x = \frac{1}{2} \lg \frac{1+y}{1-y}$.

$\therefore y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的反函数为 $y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$.

原函数的定义域是 R , 反函数的定义域是

$$\left\{x \mid \frac{1+x}{1-x} > 0\right\} = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-1} < 0\right\} = \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

$\therefore$ 原函数的定义域为 R , 值域为 $(-1, 1)$; 它的反函数的定义域为 $(-1, 1)$, 值域为 R .

说明: 在函数 $y = f(x)$ 是一一映射时, 通过求其反函数的定义域来确定函数的值域, 是求函数值域的常用方法之一. 求函数值域 (包括最大值、最小值) 的初等方法还有: 观察法、判别式法 (见例 11)、换元法、不等式法、图象法等.

例 11 当 $x > 0, y > 0, xy^{1+\lg x} = 1$ 时, xy 的取值范围是什么?

解: 在 $xy^{1+\lg x} = 1$ 的两边取对数, 得

$$\lg x + (1 + \lg x) \cdot \lg y = 0.$$

设 $\lg x = t$, 则 $t \neq -1$, ($\because xy^{1+\lg x} = 1$),

$$\text{于是 } \lg y = \frac{-t}{1+t}.$$

$$\therefore \lg(xy) = \lg x + \lg y = t - \frac{t}{1+t} = \frac{t^2}{1+t},$$

$$\text{即 } t^2 - t \cdot \lg(xy) - \lg(xy) = 0.$$

$$\because t \in R, \therefore \Delta = [\lg(xy)]^2 + 4\lg(xy) \geq 0,$$

$$\therefore \lg(xy) \geq 0, \text{ 或 } \lg(xy) \leq -4.$$

$\therefore xy$ 的取值范围是 $xy \geq 1$ 或 $0 < xy \leq 10^{-4}$.

8. 含对数符号的方程与不等式

例 12 设 c, d, x 为实数, $c \neq 0$, x 为未知数, 讨论方程 $\log\left(cx + \frac{d}{x}\right)x = -1$ 在什么情形下有解, 有解时求出它的解.

解: 实数 x 是原方程的解的充要条件是

$$\begin{cases} x > 0 & \text{①} \\ cx + \frac{d}{x} > 0 & \text{②} \\ cx + \frac{d}{x} \neq 1 & \text{③} \\ \left(cx + \frac{d}{x}\right)^{-1} = x & \text{④} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 & \text{①} \\ x \neq 1 & \text{③}' \\ x\left(cx + \frac{d}{x}\right) = 1 & \text{④}' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 & \text{①} \\ x \neq 1 & \text{③}' \\ x^2 = \frac{1-d}{c} & \text{④}'' \end{cases}$$

为使方程④''有异于 1 的正数解, 必须

$$\frac{1-d}{c} > 0, \text{ 且 } \frac{1-d}{c} \neq 1.$$

即当 $c > 0, d < 1, c+d \neq 1$, 或 $c < 0, d > 1, c+d \neq 1$ 时, 原方程有解 $x = \sqrt{\frac{1-d}{c}}$.

说明: 解含有对数符号的方程与不等式, 一定要讨论对数的定义域, 注意变形的同解性.

例 13 设 $0 < x < 1, a > 0, a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与