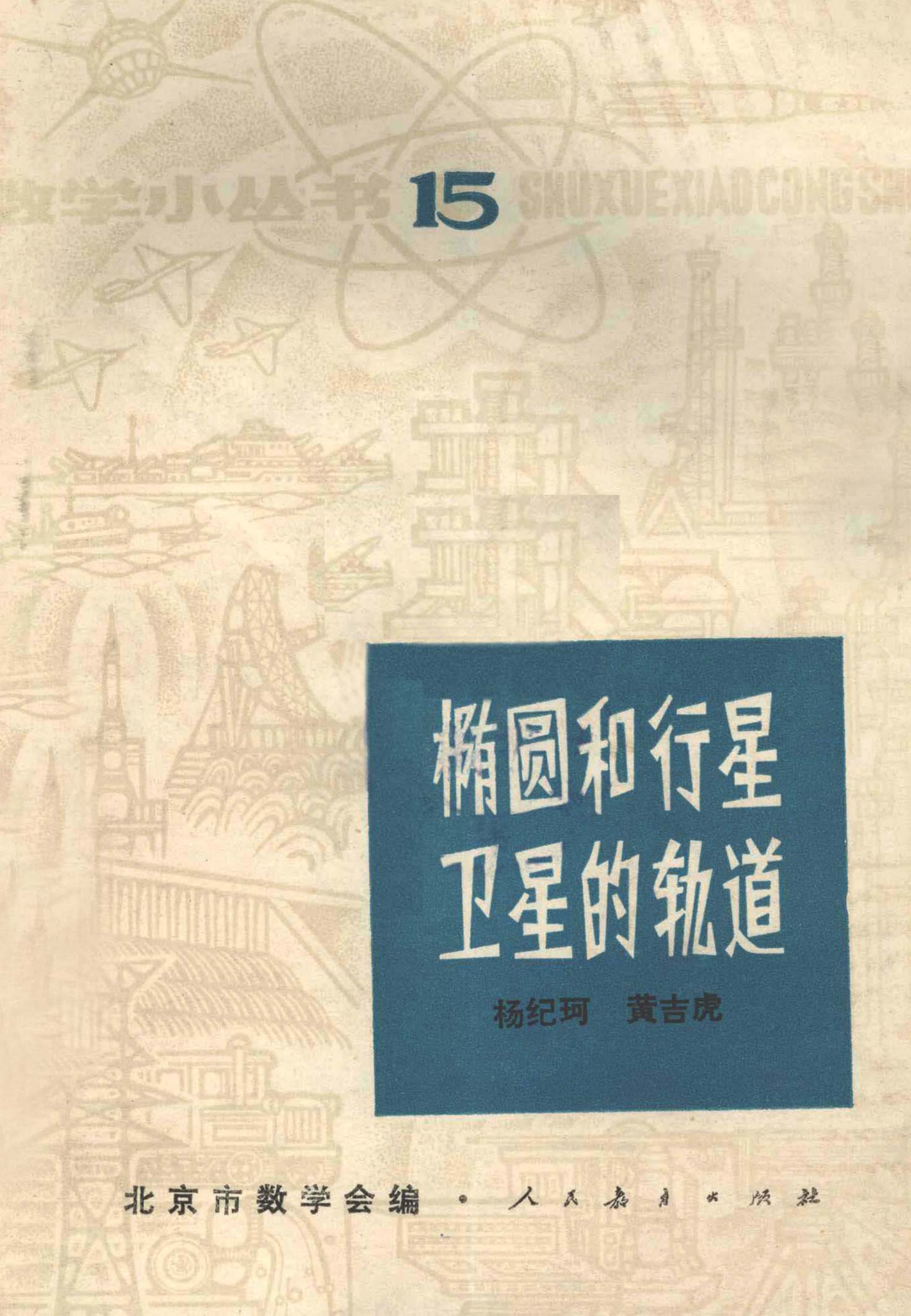

数学小丛书 15 SHUXUEXIAOCONGSH

椭圆和行星卫星的轨道

杨纪珂 黄吉虎

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数 学 小 丛 书

(15)

椭圆和行星卫星的轨道

杨纪珂 黄志虎

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

椭圆是几何轨迹的一种。可以在纸上用各种作图方法画出椭圆的曲线来，可以用数学的方法按不同的坐标写出它的方程来；可以推导出有关它的典型线段间的关系，也可以寻求出表示它的形状的特征参数来。如果把椭圆与自然界的现象相结合，那么最好的例子就是用它来描述一个较小的天体绕行另一个较大天体的轨道。在这本小册子里在通俗易懂地把有关椭圆的一些基本知识介绍给大家之后，再介绍一种简易的行星卫星轨道的计算方法。只须具有高中程度的数学和力学知识，就能够用这种方法来计算一切行星、卫星或人造卫星的轨道；能够算出它们的运行周期；能够确定它们在任何位置上的运行速度。读了这本小册子后，就可以体会到计算行星卫星轨道并不如想象的那样困难。凡具有高中文化程度的科学爱好者都不妨一试。

杨纪珂　黄吉虎

1980.3.31于合肥

椭圆和行星卫星的轨道
杨纪珂　黄吉虎 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 1.375　字数 27,000
1984年4月第1版　1985年3月第1次印刷
印数　1--9,000
书号 7012·0691　　定价 0.17元

目　录

临江仙

欢呼我国第一颗人造地球卫星

杨纪珂

1970年4月25日

（一）

昨日轰雷平地起，华星已过长空。瑶池玉殿挂灯红。安排庆祝宴，迎客广寒宫。

喜见中华科学界，冲天魄力无穷。银河迢递竟相通。东方红乐曲，响彻月轮中。

（二）

春日梅花才放过，一声霹雳临空。星驰电激射流红。银光摇眩处，飞入斗牛宫。

人定胜天天伏首，掀天事业无穷。牛郎织女把书通。商量今岁约，河汉小舟中。

一　怎样画一个椭圆

画椭圆最普通的方法有四种．第一种方法用两只钉、一根绳、一支笔就行；第二种方法是使用椭圆规画；第三种和第四种方法是用一个圆规、一根尺和一块曲线板．现在把这四种方法分述于下．

钉绳法　如图1所示，在一张纸或板上钉上两个钉子，钉子间的距离是 $2c$．再取一根长度为 $2a$ 的绳子，两端固着在钉上．$2a$ 的长度要求大于 $2c$．然后用一支笔，绷紧那根绳子，就可以绕着这两个钉子画出一根椭圆曲线．

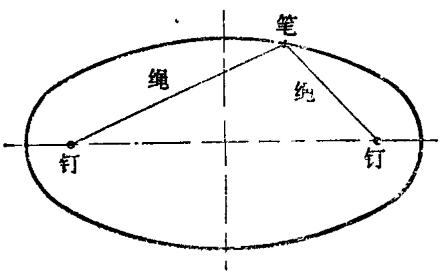

图1　用钉绳法画椭圆

椭圆规法　如图2所示，一个十字形的槽，槽内安置了两块可以滑动的滑块，一块能左右滑动，另一块能上下滑动．在每个滑块上连一只可以在滑块上转动的另件，上面有一个横的穿洞，穿洞上面装一只固定画杆用的固定螺丝．把画杆穿在这两个穿洞中，就可以用固定螺丝把它固定在任意点上．在画杆的另一头装上一支笔，也可以固定在杆的任意点上，但不

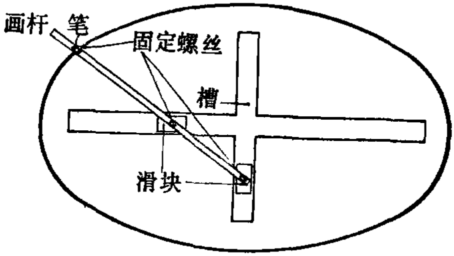

图 2 用椭圆规画椭圆

能把它放在两滑块之间. 固定好后，就可以画出一条椭圆曲线. 如果要求椭圆的长半轴的长度是 a，短半轴的长度是 b，只需依画杆上的刻度把纵槽内滑块中心和笔的中心间的距离固定为 a，把横槽内滑块中心和笔的中心距离固定为 b，就可以画出你所要求的椭圆.

作图法一 这种方法是钉绳法的普通作图法. 以相距 $2c$ 的两定点 O 和 O' 为中心，以差距相等的许多距离为半径，作出如图 3 所示的两套同心圆. 这些同心圆变成许多小的弧边四边形. 如连续地将这些四边形的对顶点用曲线板联结描画出来，就可以画成一个椭圆. 我们如果把各半径间的差距定得很小，同心圆画得很多，则形成的弧边四边形也都很小；它们如小到两对顶点差不多相碰时，就自动地可以联成一个椭圆. 这里 O 和 O' 称为**焦点**，也就是在钉绳法中钉钉子的地方. 不难看出，在椭圆上各弧边四边形的交点距两焦点距离之和都是相等的. 因为从一点反钟向移动到相邻的一点上时，距 O 点虽远了一个差距，但距 O' 却近了一个差距；如从一点顺钟向移动到相邻的一点上时，距 O 虽近了一个差距，但距

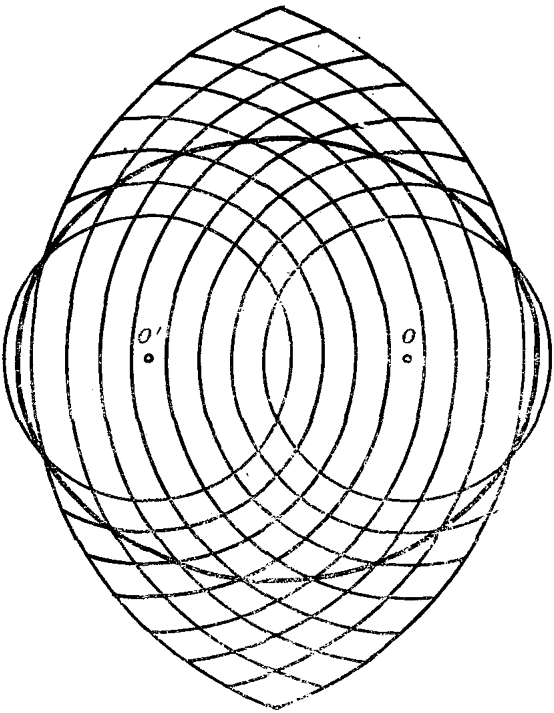

图 3 椭圆作图法一

O' 却远了一个差距；由于差距都相同，所以即使交点移遍一周，两个距离之和总是一个常数. 这和钉绳法中绳子的总长 $2a$ 保持不变有相同的意义.

作图法二 如图 4 所示，以 C 为中心，以 a 和 b 为半径，作两个同心圆. 通过 C 作任意直线 CA 交两圆于 A、B 两点上. 从 A 作直线 AP 平行于纵轴，从 B 作直线 BP 平行于横轴，两线交于 P 点. 以同样的步骤从 C 点向不同方向作许多辐向直线，依样得出许多 P 点. 用曲线板把这些 P 点联画起

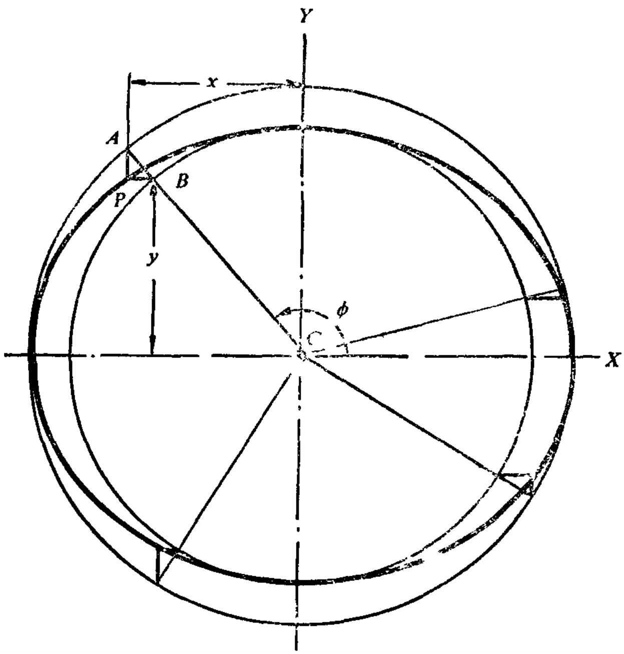

图 4　椭圆的作图法二

来，就成为一个椭圆. 关于作椭圆的证明留在下文中.

二　椭圆上各参数间的关系

请参阅图 5，椭圆是 P 点的轨迹，其定义是 P 点距定点 O 和 O' 的距离之和为常数 $2a$. 当 P 点画到 A 或 A' 点上时，两线重合，此时

$$\overline{AO'}+\overline{AO}=\overline{A'O'}+\overline{A'O}=2a. \tag{1}$$

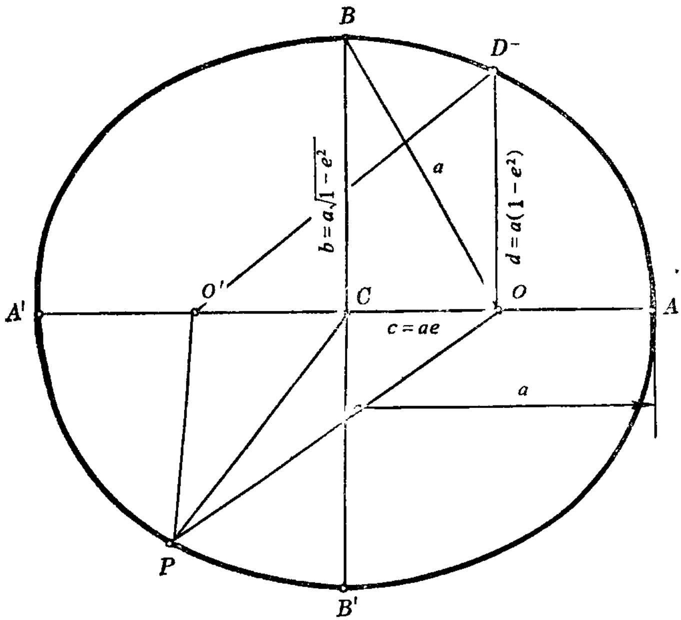

图 5 椭圆上的一些典型线段

因为 $\overline{AO'}=\overline{AO}+\overline{OO'}$, $\overline{A'O}=\overline{A'O'}+\overline{OO'}$, 代入(1)式得:

$$(\overline{AO}+\overline{OO'})+\overline{AO}=\overline{A'O'}+(\overline{A'O'}+\overline{OO'}),$$

或

$$2\overline{AO}=2\overline{A'O'},$$

所以

$$\overline{AO}=\overline{A'O'}.$$

再代入(1)式得

$$\overline{AO'}+\overline{A'O'}=\overline{AO}+\overline{A'O}=2a. \qquad (2)$$

所以在两线相重合的两种情况下，所得两个端点间的距离正好是 OP 和 $O'P$之和，即 $2a$.

对椭圆上的任意一点 P 来说，在三角形 OPO' 中，从三角

形任意两边之和大于第三边的定理得不等式:

$$OO'+PO>PO'. \tag{3}$$

仅当 P 点达于 A 或 A'，使 PO 和 PO' 两线重合，即使三角形消失时，才有:

$$OO'+AO=AO'. \tag{4}$$

但是 $\qquad PO+PO'=AO+AO'=2a,$

故(3)、(4)两式分别成为:

$$OO'+(2a-PO')>PO',$$

$$OO'+(2a-AO')=AO';$$

或

$$OO'+2a>2PO',$$

$$OO'+2a=2AO'.$$

因此得不等式:

$$AO'>PO'.$$

同理，$\qquad AO<PO.$

换言之，P 点循曲线轨迹如图，从 A 点开始不论顺钟向或反钟向划过去时，PO 逐渐放长，PO' 逐渐缩短。等到它们为等长时，$\triangle O'PO$ 成为一个底长为 $OO'=2c$ 的等腰三角形，此时 P 点与 B' 或 B 点重合。过了 B' 或 B 点后，PO 还是逐渐放长，PO' 还是逐渐缩短。在 P 到达 A' 点时，PO 的长度达到极限。再看 OO' 的中心点 C 和 P 点联成的 CP 线，它是 $\triangle O'PO$ 的中线。从平面几何中三角形中线长度比两夹边的平均长度为短的定理，得不等式:

$$\overline{PC}<\frac{1}{2}(\overline{PO'}+\overline{PO}).$$

故 $\qquad \overline{PC}<a.$

但是 $$\overline{AC}=a,$$
故 $$\overline{PC}<\overline{AC}.$$

P 点在离开 A 或 A' 点时，和中点 C 间的距离都比 a 短，所以我们称 AA' 为**长轴**，AC 或 $A'C$ 为**长半轴**，长度为 a．长轴是通过中心 C 点与椭圆相交两点间距离最大的轴线．同样可以证明，如果三角形两边之和不变，底长也不变，那么当两边相等时底边上的中线的长度为最短．因此 $\overline{BC}$ 或 $B'C$ 为最短，我们称 BB' 为**短轴**，BC 或 $B'C$ 为**短半轴**，长度为 b．BB' 是通过 C 点和椭圆以最短距离交截的轴线．此外，我们还把椭圆上一点 P 距焦点 O 或 O' 的距离称为**焦距**.

从图 5 可以看到，$\triangle OCB$ 形成一个直角三角形，所以

$$c^2=a^2-b^2. \tag{5}$$

c 和 a 之比称为**离心率**，记为 e：

$$e=\frac{c}{a}. \tag{6}$$

离心率 e 是椭圆的形状参数．e 等于零时，O、O' 两点重合，椭圆成为圆；不妨说圆是离心率为零的椭圆．随着 e 的增大，椭圆逐渐变扁．直到 e 等于 1 时，$c=a$，此时 O、O' 两点分别和 A、A' 两点相重合，$b=\sqrt{a^2-c^2}=0$，因此短轴消失，椭圆变成长度为 $2a$ 或 $2c$ 的一段直线；不妨说任何直线段是一个离心率为 1 的椭圆．由于 O、O' 不可能越出 AA' 以外，c 不可能大于 a，它如大于 a，曲线就不成其为椭圆，所以

$$0\leqslant e\leqslant 1. \tag{7}$$

于是可以把 c 和 b 都写成为 a 和 e 的函数：

$$c=ae, \tag{8}$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-e^2}. \tag{9}$$

如以两焦点中之一，譬如说取 O 点，作为计量的基点，称 AO 为**近焦距**，$A'O$为**远焦距**. 它们分别为:

$$\overline{AO}=\overline{AC}-\overline{CO}=a-ae=a(1-e), \tag{10}$$

$$\overline{A'O}=\overline{A'C}+\overline{CO}=a+ae=a(1+e). \tag{11}$$

消去 a 得近焦距和远焦距间的关系:

$$\overline{A'O}=\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\overline{AO}. \tag{12}$$

在实际应用上，如太阳位于 O 点，而环绕太阳的行星都在各自的椭圆轨道上运行. 则当行星到达 A 或A'点时，我们称它到达**近日点**或**远日点**. 若地球中心位于 O 点，而环绕地球的卫星在各自的椭圆轨道上运行，则在卫星到达 A 或 A' 点时，我们称它到达**近地点**或**远地点**. 以人造卫星而论，除同步卫星等特殊用途的卫星外，一般距地面的高度不超过地球的直径. 在这里需要注意的是，对人造地球卫星来说，需要把 AO 和$A'O$ 两个距离各减去地球的平均半径以算得近地点和远地点的高度. 如果我们在报上看到如下的新闻:“我国第一颗人造地球卫星轨道的近地点是 439 公里，远地点是 2384 公里.”，所指的高度就是把 AO 和 $A'O$ 分别减去地球平均半径 6371 公里所得到的高度. 所以该人造地球卫星的 AO 和 $A'O$ 应分别为 6810 公里和 8755 公里(以地球中心为 O 点).

椭圆的面积 A 可用积分法算得:

$$A=\pi ab, \tag{13}$$

其中 $\pi=3.1416$，a 和 b 分别为长半轴和短半轴的长度. 这个公式的证明，等大家学习微积分的时候就会知道. 现在暂且

承认它是准确的就行，就象我们承认圆的面积为 πr^2 一样. 实际上，当 $e=0$ 即两焦点重合时，$a=b=$ 半径 r，此时椭圆就变成了圆，它的面积也就由 πab 变成 πr^2. 这再一次说明了圆不过是个特殊的椭圆而已.

还有一条线段 d，也需要求出它和 a、e 的关系. d 是焦点 O 到垂直于长轴的直线与椭圆的交点 D 之间的距离(图5). 显然，在直角三角形 $O'OD$ 中，

$$d=\overline{DO}=\sqrt{\overline{DO'}^2-\overline{OO'}^2}=\sqrt{\overline{DO'}^2-(2c)^2}. \qquad (14)$$

根据椭圆的定义，

$$\overline{DO}+\overline{DO'}=2a,$$

所以

$$\overline{DO'}=2a-d.$$

于是(14)式成为

$$d=\sqrt{(2a-d)^2-(2c)^2}.$$

用代数法解上式，并代入 $c=ae$，得出：

$$d=a(1-e^2). \qquad (15)$$

这个关系式在后面有用.

三　在直角坐标系中的椭圆方程

现在让我们来考虑怎样用代数方程来表示一个椭圆的轨迹. 先在直角坐标中来讨论它. 如图 6 所示，X 和 Y 是两条互相垂直的坐标轴. 以它们为基线，在纸面上任意一点都可以用距两轴的垂直距离的一对数据来表示. 例如，O 点距 X 轴的距离为零，距 Y 轴的距离为 c，所以这一点可以用 $O(c,0)$

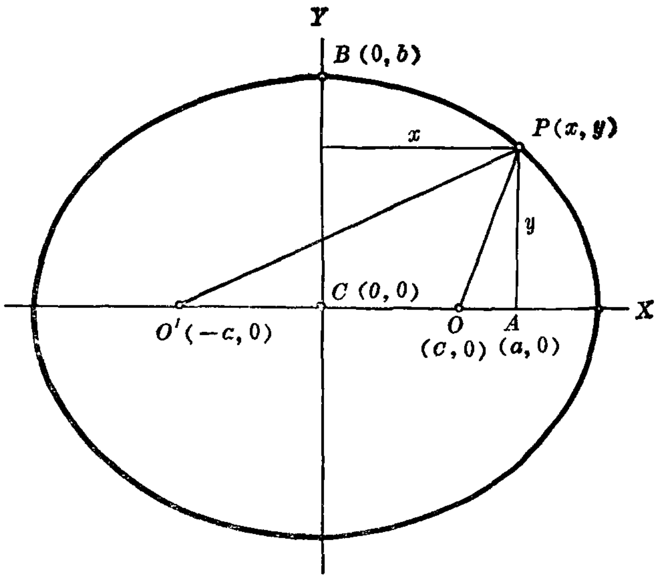

图 6　在直角坐标中的椭圆

表示．同理，A 点为 $A(a, 0)$，C 点为 $C(0, 0)$，P 点则用 $P(x, y)$表示，注意P点距Y轴的距离为x，距X轴的距离为y．当点的位置在Y轴的左边时，称x为负的；在X轴的下边时，称y为负的．所以O'点记为$O'(-c, 0)$．

通过直角三角形的关系，不难算出:

$$PO=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$PO'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

根据椭圆轨迹的定义，它们的和应为常数 $2a$，所以

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

为了简化这个方程，移项、平方、合并同类项得:

$$(x-c)^2-(x+c)^2-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

化简得:

$$xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

再一次平方、合并同类项、移项得:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{16}$$

(16)式就是当两坐标轴的交点刚好位于椭圆的中心点时椭圆的标准方程. 在椭圆上任意一点的 x、y 值都满足(16)式. 例如把 A 点的 $x=a$, $y=0$ 代入(16)式, 得出左边为 $\frac{a^2}{a^2}+0$, 等于右边的 1.

如果我们引入一个新的参数 φ, 令

$$x=a\cos\varphi, \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi$$

代入(16)式, 并用代数和三角法解出 y, 得

$$y=b\sin\varphi. \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi$$

于是得联立方程组:

$$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi.\end{cases} \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi \tag{17}$$

这是椭圆的参数方程. 对应于任何在 0、2π 区间内的 φ 值有一对(x、y)的值, 代表它的点子位于长半轴 a、短半轴 b、中心在坐标原点上的椭圆轨迹上. 如果我们把(17)中两式平方相加, 消去 φ 后, 两边同除以 a^2b^2, 就可以导出(16)式. 可见它们不过是相同方程的两种不同写法而已. 任何轨迹, 能满足(16)或(17)式, 它就是一个椭圆.

前面的图 2 中, 如以笔的着纸点为 $P(x、y)$, P 和纵向滑块中心点间的距离为 a, 和横向的为 b, 以十字形槽的中心点

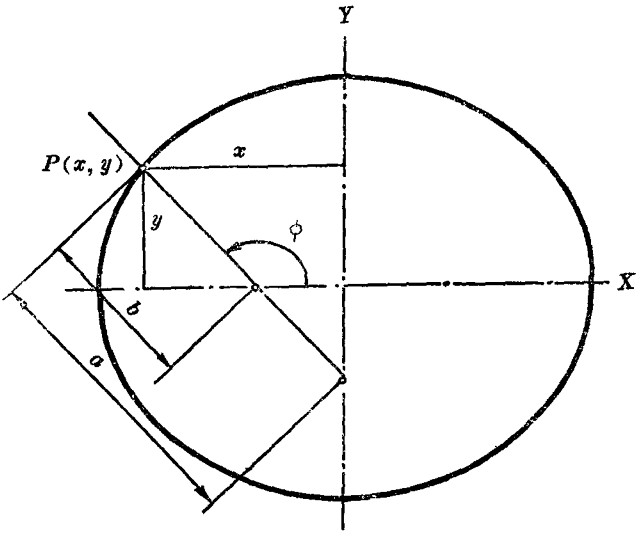

图 7　图 2 的简化图

为原点，以槽的中线分别为 X 和 Y 坐标，以画杆和横槽间形成的角度为 φ，作成图 7. 可以看出：

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

正好与(17)式完全相同. 这就说明了笔头画出的 P 点的轨迹是个椭圆.

再看图 4，如果设

$$AC = a,$$
$$BC = b,$$

并设 P 点的坐标为 $P(x, y)$，同样可以看出：

$$x = a\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$
$$y = b\sin\varphi.$$