数学名著译丛

代数学 I

〔荷〕B.L. 范德瓦尔登 著
丁石孙 曾肯成 郝锅新 译
万哲先 校

科学出版社
www.sciencep.com

数学名著译丛

代数学 I

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

丁石孙 曾肯成 郝钢新 译

万哲先 校

科学出版社

北京

图字：01-2007-3527 号

内 容 简 介

全书共分两卷，涉及的面很广，可以说概括了 1920—1940 年代数学的主要成就，也包括了 1940 年以后代数学的新进展，是代数学的经典著作之一．本书是第一卷，分成 11 章：前 5 章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知识，即有关集合、群、环、域、向量空间和多项式的最基本的概念；其余各章主要讲述交换域的理论，包括 Galois 理论和实域．

图书在版编目（CIP）数据

代数学. I /（荷）范德瓦尔登著；丁石孙等译. —北京：科学出版社，2009
（数学名著译丛）
ISBN 978-7-03-024562-5
I. 代… II. ① 范… ②丁… III. 代数 IV. O15
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 072337 号

责任编辑：赵彦超 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 5 月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2009 年 5 月第一次印刷　印张：17
印数：1—3 000　字数：320 000
定价：48.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

出 版 说 明

范德瓦尔登的《代数学》是现代数学的一部奠基之作, 这部书不仅对提高数学家的学识修养有很大意义, 对现代数学如扑拓学、泛函分析等以及一些其他科学领域也有重要影响.

我社分别于 1963 年和 1976 年出版了该书的中译本上册 (第五版, 丁石孙, 曾肯成, 郝钢新译, 万哲先校) 和下册 (第四版, 曹锡华, 曾肯成, 郝钢新译, 万哲先校). 2003 年, Springer 出版了该书上册 (第七版) 和下册 (第五版). 在丁石孙先生的支持下, 我社委托陈志杰、赵春来两位教授对原中译本进行审校, 修改了一些现在已不常用的名词术语, 如亏数; 纠正了英文版和原中译本中的部分疏漏和错误; 原书第 I 和 II 卷的 "全书综览图" 不同, 这次也按第 II 卷综览图作了统一处理, 等等. 根据 Springer 出版的英译版本补充翻译了部分章节，如第 4 章、第 7.7 节、第 12.7 节、第 19.9 节以及第 20.10–20.14 节.

同时, 我们也积极进行寻找原译者的工作, 但是遗憾的是, 我们只与丁石孙和郝钢新先生及曹锡华先生的夫人陈希伦女士取得了联系, 并得到了他们的大力支持和热情帮助, 请其他译者见到本书后与我们联系.

在此谨向所有译者和审校者表示诚挚的谢意!

中译本再版序言

本书的第七版 (德文版) 于 1966 年由 Springer-Verlag 出版, 1970 年被译成英文出版. 第七版在内容安排上有较大的改动, 还增添了少量内容. 科学出版社的同志认为应当重新翻译本书, 这个想法是好的. 现在的中译本是陈志杰教授在德文第四版的中译本的基础上, 依据 2003 年由 Springer-Verlag 出版的英文平装本整理、翻译而成, 赵春来教授作了校对.

丁石孙

2008 年 12 月

中译本序言

代数学是数学的一个重要的基础的分支, 历史悠久. 我国古代在代数学方面有光辉的成就. 一百多年来, 尤其是 20 世纪以来, 随着数学的发展以及应用的需要, 代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革. 一系列的新的代数领域被建立起来, 大大地扩充了代数学的研究范围, 形成了所谓近世代数学. 它与以代数方程的根的计算与分布为研究中心的古典代数学有所不同, 它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构 —— 群、环、代数、域、格等的性质为其中心问题的. 由于代数运算贯穿在任何数学理论和应用问题里, 也由于代数结构及其中元素的一般性, 近世代数学的研究在数学中是具有基本性的. 它的方法和结果渗透到那些与它相接近的各个不同的数学分支中, 成为一些有着新面貌和新内容的数学领域 —— 代数数论、代数几何、拓扑代数、Lie 群和 Lie 代数、代数拓扑、泛函分析等. 这样, 近世代数学就对于全部现代数学的发展有着显著的影响, 并且对于一些其他的科学领域 (如理论物理学、计算机原理等) 也有较直接的应用。

历史上, 近世代数学可以说是从 19 世纪之初发生的, Galois 应用群的概念对于高次代数方程是否可以用根式来解的问题进行了研究并给出彻底的解答, 他可以说是近世代数学的创始者. 从那时起, 近世代数学由萌芽而成长而发达. 大概由 19 世纪的末叶开始, 群以及紧相联系着的不变量的概念, 在几何上、在分析上以及在理论物理上, 都产生了重大的影响. 深刻研究群以及其他相关的概念, 如环、理想、线性空间、代数等, 应用于代数学各个部分, 这就形成近世代数学更进一步的演进, 完成了以前独立发展着的三个主要方面 —— 代数数论、线性代数及代数、群论的综合. 对于这一步统一的工作, 近代德国代数学派起了主要的作用. 由 Dedekind 及 Hilbert 于 19 世纪末叶的工作开始, Steinitz 于 1911 年发表的论文对于代数学抽象化工作贡献很大, 其后自 1920 年左右起以 Noether 和 Artin 及她和他的学生们为中心, 近世代数学的发展极为灿烂.

Van der Waerden 根据 Noether 和 Artin 的讲稿写成《近世代数学》(*Moderne Algebra*), 综合近世代数学各方面工作于一书. 全书分上、下两册, 第一版于 1930—1931 年分别出版. 自出版后, 这本书对于近世代数学的传播和发展起了巨大的推动作用. 到 1959—1960 年, 上、下两册已分别出到第五版和第四版. 时至今日, 这本书仍然是在近世代数学方面进行学习和开展科学研究的一部好书.

当然, 近世代数学是不断向前发展的. 20 世纪 30 年代, 当时所谓近世代数学的一些基本内容已经逐渐成为每个近代数学工作者必备的理论知识, 所以本书从

50 年代第四版起就去掉“近世”两字而改名为《代数学》, 同时做了较大的增补和改写, 但仍保持着原来的基本内容和风格. 至于 Jacobson 的《抽象代数学讲义》和 Bourbaki 的《代数学》等书, 则出版较后而风格和内容亦有异.

本书的第二版曾有武汉大学故教授萧君绛先生译本, 流传不广, 文字亦较艰涩. 华罗庚先生于 1938—1939 年在昆明西南联合大学讲授近世代数课程时, 曾以本书上册为参考编写讲义, 变动较大而非全文照译. 1961 年 9 月国内代数学工作者于北京颐和园举行座谈会时, 皆认为此书新版有迅速译出之必要. 经过一年, 由曹锡华、万哲先、丁石孙、曾肯成、郝锛新诸同志集体合作译出第一、二卷. 今后当能对代数学的教学及科学研究起较大的推动作用. 更希望国内代数学工作者在教学和科学研究实践中有自著的书籍写成出版.

段学复

1962 年 10 月 11 日

于北京大学数学力学系

第七版前言

原先写第一版只是想作为新抽象代数的导引，而且假设经典代数的部分内容，特别是行列式理论，已为大家熟知. 不过这本书现在已经被学生作为学习代数的入门，因而有必要加入一章“向量空间与张量空间”，以讨论线性代数的基本思想，包括行列式的理论.

缩短了第 1 章“数与集合”，把序与良序放到新的一章 (第 9 章). Zorn 引理直接从选择公理导出. 良序定理的证明采用了 Kneser 的方法.

在 Galois 理论里吸收了 Artin 名著的一些思想，一些读者向我指出的循环域理论的证明中的一个漏洞已在 8.5 节补上. 8.11 节证明了正规基的存在性.

现在的第一卷结束于“实域”. 赋值论放到了第二卷.

B. L. 范德瓦尔登

苏黎世, 1966 年 2 月

第四版前言

最近完全出乎意外去世的代数学家与数论专家 Brandt 在德国数学会的协会年报 55 卷中对本书第三版写了如下的评论:“关于书名, 如果在第四版能够改为更简单的, 但是更确切的书名‘代数学’, 我将感到很高兴. 像这样一部过去、现在以及将来都是最好的数学书, 书名不应该引起人们如此的疑惑, 似乎它是追随一种时髦的式样, 它在昨天还不被人们知道, 可是明天可能将被忘掉.”

根据这个意见, 我把书名改成了“代数学”.

按照 Deuring 的建议, “超复数”概念的定义改得更为合适, 同时分圆域的 Galois 理论在它对于循环域理论的应用中显得更加完整.

基于各地来信, 还作了许多小的修改, 我在这里对所有来信的人表示感谢.

B. L. 范德瓦尔登

苏黎世, 1955 年 3 月

第三版前言的一部分

在第二版中，我已经严格地建立了赋值论. 赋值论在数论与代数几何中日益表现了它的重要性, 因之我把赋值论的一章写得更加详细与清楚了.

根据许多人的要求, 我把在第二版去掉了的关于良序与超限归纳的两节又加了进来, 在这个基础之上, 又把 Steinitz 的域论以最一般的形式写了出来.

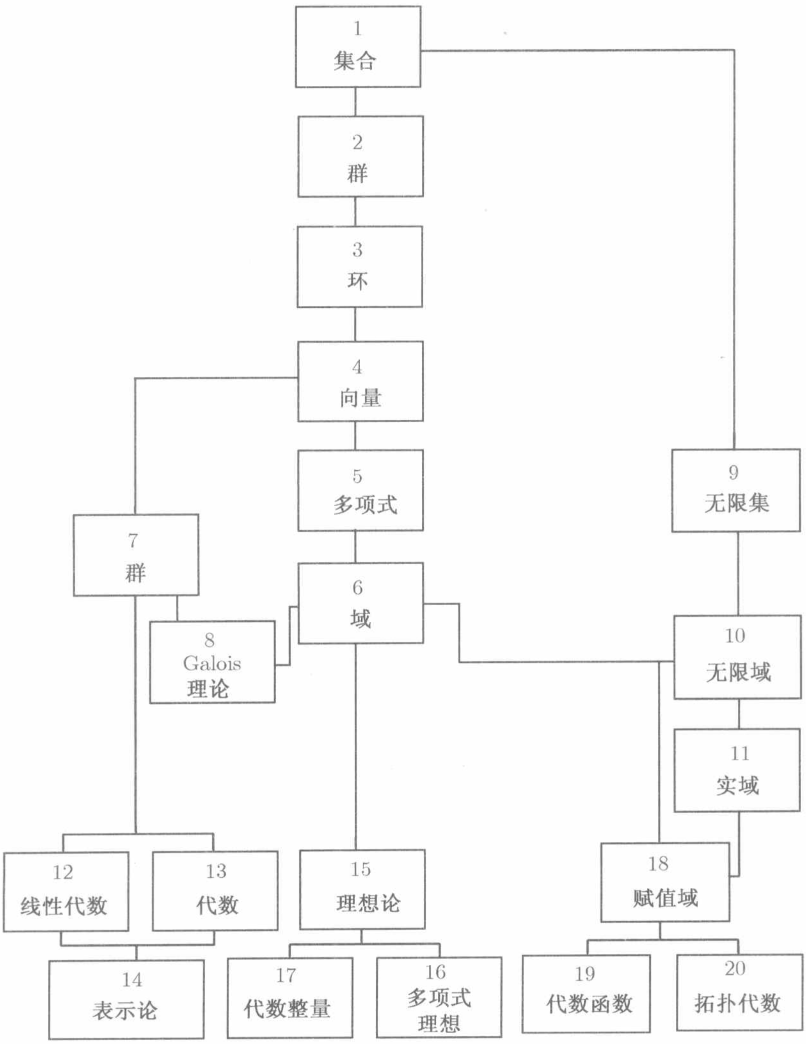
按照 Zariski 的意见, 多项式概念的引入变得容易理解了. 范数与迹的理论也有改进之必要, 这是 Peremans 先生向我友好地指出的.

B. L. 范德瓦尔登

拉伦 (北荷兰), 1950 年 7 月

全书综览图

I, II 两卷中各章总览及其逻辑关系



目　录

引　言

本书的目的

“抽象的”、“形式的”或“公理化的”方向在代数学的领域中造成了新的高涨，特别在群论、域论、赋值论、理想论和超复系理论等学科分支中形成了一系列新的概念，建立了许多新的联系，并导致了一系列深远的结果. 本书的主要目的就是要将读者引入整个这一概念世界.

以这样一些一般的概念和方法作为前导，古典代数学中的个别结果也将要在近世代数的范围之内获得适当的地位.

材料的分配和说明

为了充分明晰地展示统治着抽象代数的许多普遍观点，有必要在开头将群论和初等代数中的基本知识重新作一叙述.

由于最近一个时期出现了群论、古典代数和域论方面的许多出色的表述，现在已有可能将这些导引性的部分紧凑地 (但是完整地) 写出来①.

另外一个指导原则，就是希望尽可能地做到使每个个别的部分都能独立地读懂. 只希望了解一般理想论或超复数理论的读者，就没有必要去读 Galois 理论，反之亦然; 想要参考消去法或线性代数的读者，就可以不必被许多复杂的理想论的概念所吓倒.

材料的分配是这样安排的：最初三章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知识，即有关 (1) 集合; (2) 群; (3) 环、理想和域的最基本的概念. 第一卷中其余各章主要讲述交换域的理论，且主要以 Steinitz 在*Crelles Journal*, 1910, 137 发表的奠基性著作为基础. 第二卷在尽可能地做到彼此不相依赖的各章中讨论了模、环和理想的理论，以及对代数函数、初等因子、超复数和群表示的应用.

Abel 积分和连续群的理论不得不从本书中略去，因为对此二者作适当的讨论都有必要用到一些超越的概念和方法. 其次，由于内容庞大之故，不变量理论也被

---

① 群论方面：Speiser A. *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 2. Aufl. Berlin: Springer, 1927.

域论方面：Hasse H. *Höhere Algebra* I, II 及*Aufgabensammlung zur Höheren Algebra*. Sammlung Göschen, 1926/27.

古典代数方面：Perron O. *Algebra* I, II, 1927.

线性代数方面：Dickson L E. *Modern algebraic Theories*. Chicago, 1926.

略去. 行列式假定是已知的, 并且只用到很少几次.

为了对本书内容作更进一步的了解, 可以查看目录, 特别是前面所附的那个综览图. 从这个图中可以清楚地看到, 每一章要用到前面哪些章节.

分插在全书中的许多习题是这样选择的, 就是要使读者能够通过它们来检验自己是否懂得正文的内容. 它们之中也包括了一些在后面有时要用到的例子和补充. 解这些习题不需要特别的技巧, 要用到的在方括号内也作了提示.

取材来源

这本书部分地是由几次讲演发展而成的, 这就是:

Artin 的代数学讲演 (汉堡, 1926 年夏季).

Artin, Blaschke, Schreier 和作者所主持的理想论讨论班 (汉堡, 1926/27 冬季).

Noether 关于群论和超复数理论的两次演讲 (哥廷根, 1924/25 冬季, 1926/27 冬季)①.

本书中的一些新的证明或证明的新的安排, 大部分都来自这些讲演和讨论班, 即使没有明确指出其来源者也是如此.

① Noether E 的后一讲演的整理稿发表在*Math. Zeitschrift*, 1929, 30: 641–692.

第1章　数与集合

因为在这本书里要用到某些逻辑的和一般数学的概念, 对于这些概念初学数学的人很可能还不熟悉, 所以在前面我们用较短的一章来介绍一下. 在这里我们不打算接触数学基础中的困难问题: 我们一直采取“朴素的观点”, 当然, 我们避免引起悖论的循环定义. 有经验的读者在这一章只要了解一下符号 $\in, \subset, \supset, \cap, \cup$ 与 $\{\cdots\}$ 的意义, 可以略去其余的部分.

1.1　集　　合

作为所有数学讨论的起点, 我们总是考虑某些确定的对象, 譬如数字、字母或者它们的组合. 每个单个元素具有或者不具有的性质就定义一个*集合*或者*类*; 这个*集合的元素*就是全体具有这个性质的对象. 记号

$$a \in \mathfrak{M}$$

表示 a 是 $\mathfrak{M}$ 的元素. 我们也几何形象地说: a 在 $\mathfrak{M}$ 中, 一个集合称为*空的*, 如果它不包含任何元素.

我们也可以把数 (或者字母等) 的序列和集合看作对象和集合 (我们有时称为第二层集合) 的元素. 第二层集合又可以是更高层集合的元素, 等等. 但是在概念形成中, 如“所有集合的集合”这类概念是不允许的, 因为它们是造成矛盾的原因; 我们常常只从一类预先规定的对象中来造新的集合 (新的集合本身不属于这一类对象).

如果集合 $\mathfrak{N}$ 的全部元素同时是 $\mathfrak{M}$ 的元素, 那么 $\mathfrak{N}$ 就称为 $\mathfrak{M}$ 的*子集合*, 记为

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}.$$

这时, $\mathfrak{M}$ 也称为 $\mathfrak{N}$ 的*包集合*, 记为

$$\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}.$$

由 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ 推出 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

空集合包含在每个集合之中.