数学分析方法及例题

李德本　杨　旭　倪宝汉　编著

吉林教育出版社

数学分析方法及例题

李德本　杨　旭　倪宝汉　编著

吉 林 教 育 出 版 社

数学分析方法及例题　　李德本　杨　旭　倪宝汉

责任编辑：王铁义　　封面设计：田立辉

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米 32开本 15.125印张 336,000字

1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷

发行：吉林教育出版社　　印数：1——800册　　定价：4.30元

印刷：四平师院印刷厂　　ISBN 7—5383—0791—5／G·735

前　言

数学分析的基本思想和基本方法对现代数学的学习有重大影响。在高师院校开设一门对其进行专门研究的课程无疑是必要而又亟需的。面对浩瀚的分析材料，这门课程的教材应该选择哪些内容呢？自然，散见于各种资料上的研究生入学试题必当考虑在内，而且应该作为主体，这是由于这部分试题一方面反映了近年来分析学发展的趋势及其特点。另一方面，这部分试题大都围绕分析的核心内容，具有方法的典型性，技巧的相对集中性。

当前，国内国外分析教材版本很多，各具特色。经典分析中的结果又在不断丰富和完善，从中择取部分素材作为这本教材的内容当然也不容忽视。这样，对研究分析的基本思想和基本方法必会有所启迪。

除此之外，这本教材还要顾及师范性。注意不超越经典分析的范畴。因此，内容的适度性，结构的完整性，推理的严密性都要加以考虑。

基于上述想法，编者结合自己的教学实践，参阅了有关参考书及资料，而编写了这本适于高师院校作为选修课的教材。定名为《数学分析方法及例题》。

正是由于本书是为学完数学分析的读者所编写，因而在内容的编排上，材料的处理中，所受约束相对减少。比如，用分析方法证明不等式可以独立成章，以及，极限内容中可

用到微分学，积分学知识，等等。我们想，这样的编排方式有益于对分析方法的深刻理解和很好的掌握。从而使其既是一门选修课的教材，又可供报考研究生的学生作为复习指导书，同时，教师作为参考书也会适宜。

由于编者水平所限，加之仓促成书。疏漏之处，实恐难免，诚望读者指教。

编 著 者

一九八八年八月于四平师院

目　　录

第一章 实数理论

一 实数理论的产生

早在古代，人们就对长度，面积、体积的度量问题感兴趣。古希腊的欧多克斯）引入量的观念来考虑连续变动的东西，并完全依据几何来严格处理连续量。这造成数与量的长期脱离，古希腊的数学中除了整数之外，并没有无理数的概念。连有理数的运算也没有，可是却有量的比例。他们对于连续与离散的关系很有兴趣。尤其是芝诺提出四个著名的悖论：第一个悖论是说运动不存在，理由是运动物体到达目的地之前必须到达半路，而到达半路之前又必须到达半路的半路，……，如此下去，它必须通过无限多个点，这在有限长时间内是无法办到的。第二个悖论是跑得很快的阿希里赶不上在他前面的乌龟。因为乌龟在他前面时，他必须首先到达乌龟的起点，然后用第一个悖论的逻辑，乌龟老在它的前面。这两个悖论是反对空间，时间由不可分的间隔组成。第三个悖论是说“飞矢不动”，因为在某一时间间隔，飞矢总是在某个空间间隔中确定的位置上，因而是静止的。第四个悖论是游行队伍悖论，内容大体相似。这说明希腊人已经看到“无穷小”与“很小很小”的矛盾。然而他们却没有解决这些矛盾。

相对于自然数系来说，有理数系已是比较完美的数系。由于有理数系具有稠密性，因此古希腊人曾想象它是同一条无限直线上的点相对应的，一个从小到大的量的连续排列的

长河。但是这种关于数的连续性的设想，被这样一个事实：一个正方形的对角线与其一边的长是不可公度的！而毁灭了。这就向人们揭示了有理数系的缺陷，表明它不能同连续的无限直线等量齐观。它告诉人们，有理数并没有铺满数轴，在数轴上存在着不能为有理数所表示的“孔隙”，而这种“孔隙”，经后来人证明，简直多得“不可胜数”。

到了十六、十七世纪，除了求曲线长度和曲线所包围的面积等类问题外，还产生了许多新问题，如求速度，求切线，以及求极大，极小值等问题。经过许多人多年的努力，经于在十七世纪晚期，形成了无穷小演算——微积分这门学科。这也就是数学分析的开端。

微积分创建伊始，由于缺乏一个完备的数域作为其论域，因此只好将其演算体系建立在以直观为基础的几何学与运动学的连续性上，这就形成了方法上有效但逻辑上不能自园其说的矛盾局面。这主要表现在：

1、以求速度为例，瞬时速度是当变成零时的值。是零，是很小的量，还是什么东西。这个无穷小量究竟是不是零。引起很大的争论。

2、由于没有清楚的无穷小概念，从而导数，微分、积分等概念不清楚。

3、对无穷大概念不清楚。

4、发散级数求和的任意性，如 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 可等于1，0，$\frac{1}{2}$；以及 $1+2+4+8\cdots=-1$

$$\left(\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\cdots,\ x=2\right)$$

5、符号的不严格使用，如高阶微分，$\int d^2x = dx$等。

6、不考虑连续性就进行微分。不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等。

正是由于上述这些微积分学逻辑基础上的严重问题，而使得在微积分创立后近两个世纪的时间内，一直遭到各种怀疑和非议。特别是英国主教贝克莱（B·Berkeley）在1734年的攻击。他将牛顿（Newton）的“流数”讥笑为“逝去了量的鬼魂。”而十七、十八两个世纪的数学家们，在数学的拓荒工作中，正取得前所未有的成果，因而他们更热衷于向前走，没有感到需要回过头来，整理一下自己的基础。正如达兰贝尔（D'Alembert）所说的那样，现在是“把房子盖得更高些，而不是把基础打得更加牢固。”从而造成第二次数学危机。

一直到十九世纪二十年代，一些数学家才比较关注于微积分的严格基础，它们从波尔查诺（Bolzano）、阿贝尔（Abel）、柯西（Cauchy）、狄里赫列（Dirichlet）等人的工作开始，而到威尔斯特拉斯（Weierstrass）、戴德金（Dedekind）和康托尔（Cantor）彻底完成实数理论，中间经历半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。

实数理论大体可以分为两类，一类是Cantor的“基本序列”学说，一类是Dedekind的“分割”学说。（亦称“分划”学说）。

二、实数的定义

定义 1、称无限不循环小数为无理数，称有理数和无理数的全体为实数集

定义 2。（Dedekind）

设Q为有理数集，将Q分为两部分Q_1和Q_2，满足：

（1）$Q_1 \neq \phi$，$Q_2 \neq \phi$，$Q_1 \cup Q_2 = Q$。

（2）Q_1中任何数小于Q_2中任何数。称这样的分法为分划（或分割），记作（$Q_1 | Q_2$）。

若Q_1中有最大数或者Q_2中有最小数，称这样的分划为有端分划。这个最大数或最小数叫分划的端。（注意，由有理数的稠密性，不可能出现Q_1中有最大的且Q_2中有最小的这种情形）

若Q_1中没有最大数，Q_2中没有最小数，称这样的分划为无端分划。

每个分划称为一个实数。有端分划叫有理数，无端分划叫无理数。所有分划的全体叫实数集。

当我们在这样的实数集内定义了大小顺序，定义四则运算后，可证明实数集为完备的阿基米德（Archimedes）有序体。且可证明实数具有稠密性，从而可以证明下述的Dedekind定理。

定理：对于实数集内任一分划（A|A′），则或者A中有最大数，或者A′中有最小数。

Dedekind 定理表明：如果用全体实数作分划，那就不可能再得到无端分划，从而不会再引出新的数。

为给出Cantor实数定义，先介绍下列概念。设$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$是有理数所组成的数列，若对任给的正有理数$\varepsilon$，总存在正整数N，使得当m，n>N时，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称$\{a_n\}$是有理数所构成的基本数列。简称基本有理数列。

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个基本有理数列。若对任意的有理数$\varepsilon > 0$，都存在正整数N，使得当n>N时，总有，$|a_n - b_n| < \varepsilon$，则称$\{a_n\}$与$\{b_n\}$等价。记作$\{a_n\} \sim \{b_n\}$。

容易验证，关系"～"具有性质

（1）$\{a_n\} \sim \{a_n\}$（自反性）

（2）若$\{a_n\} \sim \{b_n\}$，则$\{b_n\} \sim \{a_n\}$（对称性）

（3）若$\{a_n\} \sim \{b_n\}$，$\{b_n\} \sim \{c_n\}$，则$\{a_n\} \sim \{c_n\}$，（传递性）

定义3 （Cantor）考虑基本有理数列的全体。把彼此等价的基本有理数列归为一类，每一类称为一个实数。记号$\alpha = [a_n]$表示与$\{a_n\}$等价的基本有理数列类构成的实数是α、$\{a_n\}$叫作α的一个代表。凡和任一有理数a组成的常数列$\{a, a, \cdots, a, \cdots\}$等价的类称为有理数，不能和任一有理数常数列等价的类称为无理数。等价类的全体叫实数集。

定义4 满足域公理、序公理、完备公理的非空集合称为实数集。实数集中的元素叫实数。

在辛钦所著《数学分析简明教程》中，实数是以下述方式定义的。

定义5。每当我们遇着一个有理数的有界递增序列，即 r_1，r_2，$\cdots r_n\cdots$ （$r_{n+1}\geqslant r_n$）

其中r_n（$n=1$，2，$\cdots$）为有理数。且存在有理数$M>0$使$|r_n|\leqslant M$（$n=1$，2，$\cdots$）

而其没有有理的极限时，我们就添加一个新的数来作为它的极限。称此新数为无理数。

（这样就建立起一个产生无理数的一般原则。按照这个原则，就确定了所有的无理数）

一切有理数与一切根据我们的原则产生的无理数总称为实数。

在上述五个定义中，目前广泛采用定义3，即Cantor的“基本序列”学说。而且一般距离空间的完备化思想均发源于此。

三、康托尔的实数理论

在Cantor的实数定义中，其基本思想，简单地说，就是要定义实数为有理数的极限，但又要避免循环定义。这里对Cantor实数理论作扼要的叙述。

1、扩充有理数的原则

有理数全体所组成的集合Q，构成一个阿基米德（Archimedes）有序体，我们希望有理数扩充到实数之后，全体实数的集合也构成阿基米德有序体。

所谓数集F构成一个阿基米德有序体，是说它满足以下三个条件：

（1）、F是体：在中定义了加法“十”与乘法“·”

两个运算，使得对于F中任意元素a、b、c成立：

加法的结合律 $(a+b)=a+(b+c)$

加法的交换律 $a+b=b+a$

乘法的交换律 $a\cdot b=b\cdot a$

乘法关于加法的分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

在F存在零元素和负元素：在F中存在唯一一个元素“0”，使得对F中任一元素a，有$a+0=a$；对每一个元素，$a\in F$，有一个且只有一个元素$(-a)\in F$，使得$a+(-a)=0$

在F存在单位元素和逆元素：在F中存在唯一一个元素e，使得对F中任一元素a，有$a\cdot e=a$；对每一个元素$a\in F$，有一个且只有一个元素$a^{-1}\in F$，使得$a\cdot a^{-1}=e$。

（2）F是有序体。在F中定义了大小顺序关系$<$，$=$，和$>$。对于F任意两个元素a、b，下列三个关系中有一个且只有一个成立：

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

对于F中的元素a、b、c，若成立$a<b$，$b<c$，则有$a<c$。

当序和加法、乘法运算结合起来进行时，具有下列性质：

加法保序性：若$a<b$，则对任何$c\in F$，有$a+c<b+c$；

乘正数保序性：若$a<b$及$c>0$，则$a\cdot c<b\cdot c$

这种关于加法和乘正数保序的体称为有序体。

（3）F中的元素满足阿基米德公理，对F中任意两个正数a、b，必存在正整数N，使得$Na>b$。

有理数集Q适合上述有所条件，所以它是一个阿基米德有序体。我们现在的目标是：利用有理数作材料，构造出一种足以建立圆满极限理论的新的数，而把有理数作为它的一部分。而且使得新数全体仍然构成阿基米德有序体（而且是最大的）。特别当有理数作为新数进行运算时，仍保持其原来的运算规律。这种新数就称为实数。上面五种定义实数的方式都是遵循这样的原则而建立的。下面我们在Cantor定义的实数集R中引入序和四则运算。进而证明它构成阿基米德有序体。

2、实数的有序性

有理数之间可比较大小，这种大小关系是一种“序”，它按前面所说具备以下两条性质：

（1）设a和b是任意两个有理数，则$a<b$，$a=b$，$a>b$三个关系中，必有一个且只有一个成立。

（2）若$a<b$，$b<c$，必有$a<c$。

现在我们设法在R中规定一种大小关系，证明这种关系也满足上述（1），（2）两条性质。这一大小关系就称为R的序。当然这个序对有理数而言，必须正好就是有理数原来的大小。

定义1（实数的大小）。设$\alpha=[a_n]$和$\beta=[b_n]$是两个实数，若$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，则称α和β相等，记为$\alpha=\beta$。若存在正有理数δ和自然数N，使得当$n>N$时总有$a_n-b_n>\delta$，则称$[a_n]$类大于$[b_n]$类即α大于β，记为$\alpha>\beta$。也称为$[b_n]$类小于$[a_n]$类，即β小于α，记为$\beta<\alpha$。

我们这样定义相等是有意义的。因为等价关系有对称性与传递性，所以α和β中只要有一组代表$\{a_n\}$和$\{b_n\}$等

价，则任何两个代表之间也都彼此等价，就是说两实数相等不依赖于代表的选择。

此外，我们这样定义的“大于”和“小于”也是有意义的。这是因为设$\{a_n'\}$和$\{b_n'\}$是α和β的另一代表，则$\{a_n'\}\sim\{a_n\}$，$\{b_n'\}\sim\{b_n\}$，从而存在$\delta>0$和N，当$n>N$时，总有

$$a_n-b_n>\delta \qquad (\text{由}\alpha\text{大于}\beta)$$

以及存在N_1，当$n>N_1$时，有

$$|a_n'-a_n|<\frac{\delta}{3} \qquad |b_n'-b_n|<\frac{\delta}{3}$$

故当$n>\max\{N, N_1\}$时，就有

$$\begin{aligned}a_n'-b_n'&=a_n'-a_n+a_n-b_n+b_n-b_n'\\&\geqslant a_n-b_n-|a_n'-a_n|-|b_n'-b_n|\\&>\delta-\frac{\delta}{3}-\frac{\delta}{3}=\frac{\delta}{3}\end{aligned}$$

由此可知只须取$\delta_1=\frac{\delta}{3}$，$N_2=\max\{N, N_1\}$，则当$n>N_2$时，总有

$$a_n'-b_n'>\delta_1$$

即$\alpha>\beta$不依赖于代表的选择，对于$\alpha<\beta$当然也是如此。

定理1　设$\alpha=[a_n]$和$\beta=[b_n]$是两个实数，则下列三个关系式

$$\alpha=\beta,\ \alpha<\beta,\ \alpha>\beta$$

中必有一个且只有一个成立

证明：若$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，则按定义$\alpha=\beta$。

若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$不等价。按等价的否定叙述可知，必

存在某一正有理数ε_0，和无限多个下标n_k（$k=1、2,\cdots$），使得$|a_{n_k}-b_{n_k}|\geqslant\varepsilon_0$。下面分几种情形来讨论：

（1）有无限多个下标n_k，适合$a_{n_k}-b_{n_k}\geqslant\varepsilon_0>0$，由于$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是基本数列，所以对$\frac{\varepsilon_0}{3}$，总存在自然数N，当P，q>N时，有

$$|a_p-a_q|<\frac{\varepsilon_0}{3},\qquad |b_p-b_q|<\frac{\varepsilon_0}{3}。$$

取$n_{k_0}>N$，使$a_{n_{k_0}}-b_{n_{k_0}}\geqslant\varepsilon_0$，则对任意的$n>N$，便有

$$\begin{aligned}a_n-b_n&=a_n-a_{n_{k_0}}+a_{n_{k_0}}-b_{n_{k_0}}+b_{n_{k_0}}-b_n\\&\geqslant(a_{n_{k_0}}-b_{n_{k_0}})-|a_n-a_{n_{k_0}}|-|b_n-b_{n_{k_0}}|\\&>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{3}-\frac{\varepsilon_0}{3}=\frac{\varepsilon_0}{3}\end{aligned}$$

取$\delta=\frac{\varepsilon_0}{3}$，我们已证明对$\delta>0$，存在N，当$n>N$时都有$a_n-b_n>\delta$，按实数大小的定义，即得$a>b$。

（2）假定有无限多个下标n_k，使得

$$b_{n_k}-a_{n_k}\geqslant\varepsilon_0>0$$

仿（1）同理可证得对$\delta=\frac{\varepsilon_0}{3}$，存在N，当$n>N$时，有$b_n-a_n>\delta$，即$b>a$。

（3）有无限多个下标n_k，使得$a_{n_k}-b_{n_k}\geqslant\varepsilon_0$，而又有无限多个下标$n_m$，使得$b_{n_m}-a_{n_m}\geqslant\varepsilon_0$的情形是不可能出现的。因为由（1）和（2），这时将存在$\delta>0$，和N，当$n>N$时，同时有

$$a_n-b_n>\delta,\qquad b_n-a_n>\delta$$

两式相加即得，