SHUXUE JIETI TONGLUN

数学解题通论

顾越岭 著

广西教育出版社

SHUXUE JIETI TONGLUN

数学解题通论

SHUXUE JIETI TONGLUN

数学解题通论

顾越岭 著

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学解题通论/顾越岭著．—南宁:广西教育出版社，2000.12

ISBN 7-5435-3144-5

Ⅰ.数…　Ⅱ.顾…　Ⅲ.数学问题－研究　Ⅳ.01－0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 85162 号

数学解题通论

顾越岭　著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码:530022　电话:5850219

本社网址　http://www.gep.com.cn

读者电子信箱　master@gep.com.cn

全国新华书店经销　广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　6.5 印张　193 千字

2000 年 12 月第 1 版　　2000 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5 000(册)

ISBN 7-5435-3144-5/G·2362　定价:11.00 元

前　言

在数学发展的历史上，解题研究曾是数学研究的一个重要组成部分，很多数学新概念的产生、新学科的创立都与解题有着密切的联系。如“捷线问题”的研究与解决就曾导致“变分”概念的产生与“变分学”的创立，“七桥问题”的研究与解决也曾导致“拓扑”概念的产生与“拓扑学”的创立等。不仅如此，解题对于数学教学、教育更是举足轻重。它不仅可以帮助学生巩固概念、深化认识、掌握知识和技能，而且还是培养学生思维能力、推行素质教育的重要手段。正因为如此，人们历来重视解题研究，并相继取得了大量的研究成果。其中特别值得一提的是美国数学教育家G. 波利亚，他所撰写的《怎样解题》一书现已成为传世之作。不过，波利亚的成功并不意味解题研究的终结，恰恰相反，他的成功更激励后人继承他的事业，将解题研究继续推向前进。我认为目前我们所要做的工作就是将解题研究由经验型提升为理论型，并尝试建立科学而系统的解题理论，直至将解题研究发展成为一门独立的数学分支——“数学解题学”，以便用理论来指导与规范解题活动，使其有章可循、有法可依，从而提高自觉性、克服盲目性，提高解题效率，减轻解题负担，使解题成为人们喜闻乐见的事情，从而切实推进数学研究与数学大众化的进程。

正是基于这种想法，作者从数学问题的矛盾内涵入手，运用辩证唯物主义的观点与方法潜心研究，经过近15年的探索，终于以“矛盾转化论”、“思维定向论”与“矛盾分析法”等两“论”一“法”为理论构件，以对立统一法则为自明公理，用公理化方法初步构建了解题理论的逻辑体系，并出版了这本《数学解题通论》。

本书连同绪论共十章，其中绪论介绍了全书的概貌；其他各章分别讨论了数学问题的内涵、数学转换及数学思维的规律，介绍了根据思维规律所制定的思维原则与矛盾分析法，以及应用矛盾分析法实施

解题优化、激发灵感顿悟等问题，最后系统讨论了数学方法，并进行了逻辑分类，构建了数学方法的逻辑体系。

全书力求融理论性、创新性、实用性、示范性与可操作性为一体，并力求立意新颖、结构严谨、选材精炼、叙述简明、通俗易懂。通篇重在启发引导，不仅教之以法，而且晓之以理，让读者不仅“知其然”，而且“知其所以然”。读者从中不仅可以领悟到解题的真谛，掌握解题规律，学会思考方法，而且可以学到辩证唯物主义的思想方法，科学的思维品质与革命的创新精神，从而有助于提高自身综合素质，促进未来的可持续发展。

本书既是一本解题研究的论著，又是一本关于数学思维与数学方法论的研究著述。它是作者在解题研究中的一个大胆尝试，作者愿以此抛砖引玉，希望由此引来对解题研究的关注。由于本人的水平有限，因而错误与不足在所难免，恳请专家学者与广大读者对本书提出宝贵意见，以便作者在再版时补充、修订。

在本书的写作过程中，作者参阅、引用了大量的文献资料，对此谨向有关作者表示谢忱！虽然不少引文已注明出处，但对所选用的大量例题，却难以一一注明，在此谨向有关作者表示谦意。

本书的出版得到了广西教育出版社的大力支持，在此也表示衷心的感谢！特别要感谢责任编辑高春同志，他为本书的出版做了大量的工作，在此表示谢意。

作者

2000 年 10 月

绪　论

一　“数学思维论”与“数学方法论”的研究概况

翻开数学史，不难发现，一部数学发展史，简直就是一部数学方法的发明史与数学思维的研究史. 这个历史可以追溯到很远. 在古代朴素唯物主义思想的指引下，人类很早就开始了对数学方法与数学思维的研究. 早在公元前5世纪，在希腊数学家、唯物主义哲学家德谟克利特（Democritus，约前460—前370）“原子论”思想的指引下，德谟克利特本人发明了著名的“无穷小分析”法，并成功地求出了某些空间图形的体积；另一位希腊数学家、诡辩论者安提丰（Antiphon）则发明了著名的“穷竭法”，并成功地求出了圆面积. “穷竭法”在数学史上是一个极其重要的数学方法，很多几何定理都是由于它的应用而得到了证明，从而极大地推动了几何学的研究，并使几何学的研究日趋完善. 这个方法后来还被阿基米德（约前287—前212）运用得出神入化，以至于早在定积分出现前两千年，他就用“穷竭法”求得了抛物线的弓形面积，从而成为发明定积分的先驱[①]. 事实上，如今的定积分方法与“穷竭法”乃是一脉相承的.

在我国，早在春秋战国时期，古代数学家就已萌发了极限思想，并开始运用它来解决数学问题. 到了公元3世纪，我国著名数学家刘徽已能将极限方法广泛地应用于数学研究. 如他用倍增圆内接正六边形的边数，以正 3×2^n 边形当 $n\rightarrow\infty$ 时面积的极限来定义圆的面积就是一例. 另外，他还将极限方法用于研究体积和进行开方运算，并用

---

① ［苏］Б·В鲍尔加尔斯基著. 潘德松、沈金钊译. 数学简史. 上海：知识出版社，1984.

极限方法定义弓形面积，所用方法与阿基米德求抛物线弓形面积的方法极为相似．他说："割之又割，使之极细，但举弦矢相乘之数，则必近密率矣．"可见，刘徽当时已经有了微积分思想的萌芽．此外，为了求圆周率，他还发明了著名的"割圆术"，并由此求出了较为精确的"徽率"——3.14 或 $\frac{157}{50}$[①]．刘徽的"割圆术"就是中国式的"穷竭法"，因为它与"穷竭法"的精神是一致的．

公元前 4 世纪，著名哲学家、逻辑学家亚里士多德（Aristotle，前 384—前 322）创立了形式逻辑，从而带动了数学思维的研究，其中成功地将形式逻辑应用于数学论证的当推欧几里得（约前 330—前 275）．在他所著的《几何原本》里，对所有的几何问题，他都作出了较为严格的逻辑论证．公元 3 世纪，希腊数学家帕朴斯（Pappus）创造了"探索法"[②]，给出了分析与综合的程序，从而对数学思维的研究又进一步作出了贡献．

公元 5 世纪，印度学者在数学方法的研究中发明了"反求法"与"假定法"[③]．不过他们的方法较为奇特，与希腊学者迥然不同．如关于"反求法"，印度数学家阿利耶毗陀（Āryabhata，公元 476—？）写道："乘法变为除法，除法变为乘法．利润转化成亏损，亏损转化成利润．这就是反求法．"再如"假定法"，为求未知数，先假定未知数为一任意值，然后根据所给条件进行试算，如果所赋之值正好与所论问题吻合，则该值即为待求答案．如果大于或小于这一答案，则对未知数增加或减少多少倍，答案也就增加或减少多少倍．

将数学方法与数学思维结合起来加以系统研究并取得突出成就的当推后来的法国数学家列涅·笛卡儿（Descartes，René，1596—1650）．1637 年，笛卡儿匿名出版了《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》，提出了指导思维的四个法则：

（1）只有明显地被看出是真的东西，才能当做是真的；

（2）为了更好地解决研究中的每一个困难，需要把困难分成几个小的难点；

---

① 李迪编．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．

② G．波利亚．怎样解题．北京：科学出版社，1984．

③ ［苏］Б·В 鲍尔加尔斯基著．潘德松、沈金钊译．数学简史．上海：知识出版社，1984．

(3) 研究通常应该从最简单和最容易认识的事物开始，依次进行，直到认识最复杂的事物为止；

(4) 对事实、发现、假设、方法，需要作出足够详尽的记载，并审查推理的步骤，使之确信无所遗漏.

尽管笛卡儿的上述"法则"还不完善，但他却为我们指出了研究数学思维的正确方向．那就是，只有制定出用于指导思维活动的科学原则，才能使思维活动有所遵循．从而提高自觉性，克服盲目性，并以尽量少的思维活动换取尽量大的思维效果.

关于数学方法的研究，笛卡儿提出了"万能方法"：将所给问题化为数学问题，将数学问题化为代数问题，将代数问题化为方程式的求解．"万能方法"虽然比较片面，但它所蕴含的转化策略却具有重要意义，因此对后人产生了深远的影响.

继笛卡儿之后，莱布尼兹等人也曾开展过对思维规律的研究．莱布尼兹是继亚里士多德之后的著名逻辑学家、哲学家与数学家，他对完善形式逻辑作出了重要贡献．他还曾打算写一本关于"发明的艺术"的书，他说："没有什么比看到发明的源泉更重要的了，据我看来，它比发明本身更有趣."① 然而他的计划未能实现.

20 世纪 40 年代，美国数学教育家 G. 波利亚（1887—1985）继承了笛卡儿与莱布尼兹等前辈的未竟事业，对数学思维与数学方法的研究作出了重要贡献，先后出版了《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等重要著作．其中《怎样解题》一书曾经风靡世界．在《怎样解题》一书中，波利亚继承了笛卡儿的转化策略，提出了著名的"化归"思想与"构造辅助问题"的解题策略．他指出，面对所给的问题，首先应想到与此有关且较易解决的问题，然后再设法将所给问题化归为这个较易解决的问题．当直接化归有困难时，可以考虑构造相应的辅助问题．波利亚主张恢复"探索法"．为了与古代帕朴斯的"探索法"相区别，他的"探索法"叫做"现代探索法"．帕朴斯的"探索法"没有超出演绎的范围，而"现代探索法"则包含有归纳与类比等手段，因而比古典探索法更能发现问题、解决问题.

我国是个数学大国，历来又有重视应用的传统，因此关于数学方法的研究就是我国的一个传统强项．远的不谈，单就"文革"以来，

---

① G. 波利亚. 怎样解题. 北京：科学出版社，1984.

以《数学通报》为代表的数学杂志就在初等数学领域内掀起过好几次研究热潮，如对探索法、解析法、图象法、代入法的研究等；20世纪80年代波利亚的《怎样解题》一书在我国再版后，又相继掀起了对化归法与构造法的研究热潮．总之，每当有人提出一种新观点与新方法，立即就会掀起一个相应的研究热潮．它反映了我国数学工作者，特别是数学教育工作者对研究数学方法的巨大热情．

在研究数学方法的同时，有组织、有领导的关于数学思维的研究也如火如荼地开展了起来．1985年，"全国数学教学研究会"发起并成立了"思维与数学教学"专题协作组，并于同年在广州召开了第一次学术讨论会．自此之后，一场全面讨论逻辑思维、直觉思维、形象思维、逆向思维、发散思维及其在数学教学中的应用的学术讨论便在全国范围内开展起来，并很快形成了高潮．其讨论内容之广、范围之大、成果之多，都是前所未有的．

通过以上的研究，我国逐步形成了关于数学方法与数学思维两支研究队伍，其成员有大、中、小学数学教师、数学教研员、数学科研人员以及少数哲学科研人员．其中一支队伍专攻"数学思维论"，一支队伍专攻"数学方法论"．

经过一段时间的努力，两"论"的研究均已取得了丰硕的成果．如"数学思维论"在大讨论的推动下，不仅发表了大量的研究论文，而且还出版了不少的研究论著．一些教学研究人员还结合中学教学的实际，开展了"思维与数学教学"的教改试验，少数高等师范院校还开设了关于数学思维研究的选修课．

近几年，数学思维论的研究热有所降温，但数学方法论的研究却方兴未艾．自从1989年徐利治、郑毓信两位教授出版了《关系映射反演方法》一书之后，一向对"数学方法论"不甚热心的高校数学教师，特别是高等师范院校的数学教师，也纷纷研究起方法论来，同时还相继在师范院校开设了"数学方法论"的选修课或必修课．一些知名学者、教授也纷纷"以身试法"，又是发表演讲，又是著书立说，一时竟形成了"百花齐放，百家争鸣"的局面．

二　数学解题的理论探索与建构

我们知道，客观世界是充满矛盾的，没有矛盾就没有世界．而数学问题乃是客观世界数量关系与空间形式的反映，因此，数学问题也

就必然充满了矛盾，从而没有矛盾也就没有数学问题．所以矛盾性就是数学问题的根本属性．这种矛盾性通常表现为条件与条件、条件与结论之间的各种差异，如："已知"与"未知"的差异、"一般"与"特殊"的差异、"整体"与"局部"的差异、"数"与"形"的差异、"动"与"静"的差异、"曲"与"直"的差异、"高"与"低"的差异、"多"与"少"的差异等．另一方面，矛盾着的双方既对立又统一．因此，"数学问题"中除了差异之外还有差异间的联系．从而，"数学问题"就是差异与联系的统一体．

对立统一法则告诉我们，事物发展过程中的矛盾双方，一方面以其对立面作为自己存在的前提，双方共处于一个统一体之中；另一方面，依据一定的条件，又各自向其对立面转化直到与对立面完全同一．这就是矛盾转化的规律．而由数学解题可知，解题的过程就是消除条件与条件、条件与结论之间的各种差异，直至将条件转化为结论的过程．这个过程与矛盾转化的过程是完全一致的，所以数学解题的过程就是矛盾转化的过程，从而矛盾转化的规律也就是数学解题的规律．由于解题的过程又是数学思维的过程，所以，矛盾转化的规律也就是数学思维的规律．因此，数学思维的本质属性就是矛盾转化．不仅如此，由于数学方法是在解决矛盾的过程中产生的，因此数学方法的本质属性也就是矛盾转化．从而矛盾转化就是两"论"的本质属性．我们将这个观点叫做"矛盾转化论"．

以"矛盾转化论"为基础，我们就可将"数学方法论"与"数学思维论"统一起来，这就是本书后面所要深入讨论的内容．

首先从研究数学思维的问题入手．

我们以为，研究数学思维，重在解决如何进行科学的思维以及如何提高思维的自觉性、克服盲目性的问题．为此必须设法使思维活动变得有章可循、有法可依．而要做到这一点，关键就在于要像笛卡儿所做的那样，首先制定出一些科学的思维原则，再用思维原则来指导人们进行科学的思维．

所谓思维原则，就是笛卡儿所说的用以指导推理和寻求科学真理的一些"法则"．它能帮助人们作出正确的选择，指引人们沿着正确的方向前进，因而具有重要的方法论意义．

由于思维规律乃是矛盾转化的规律，因此，要制定思维原则，理所当然地应以矛盾转化的规律为依据．

剖析矛盾转化的规律，可以发现，其核心乃是"逆向转化"与

"化异为同"两点．所谓"逆向转化"，就是差异双方各自向其对立面转化；所谓"化异为同"，就是消除矛盾双方的差异以化为同一．为了简明易记，我们不妨将"逆向转化"概括为"逆反"原则，将"化异为同"概括为"化同"原则．由于"逆向转化"与"化异为同"乃是矛盾转化规律的核心，所以这两个原则乃是数学思维最根本的指导原则．

以"逆反"原则、"化同"原则为前提，又可推出另外的一些派生原则．如"化归"原则——将新问题化为已经解决了的问题去处理；"化简"原则——将复杂的问题化为简单的问题去处理；"直观"原则——将抽象的问题具体化，并借助其直观意义考虑问题；"整体"原则——从整体出发考虑问题，注重抓主要矛盾与主要方面，不为局部细节所左右；"有序"原则——对所论问题进行有序思维与有序化处理．

上述原则都带有宏观性，因此可称之为宏观的思维原则．以宏观原则为前提，又可以推出更加具体的一些思维原则，叫做微观原则．如"数形结合"的原则——考虑问题时兼顾数、形两方面；"形似类比"的原则——借助形似的特点进行类比转换；"整零转换"的原则——当整体问题不便下手时，先化整为零，待各个击破后，再积零为整；"和积转换"的原则——遇到和差时想到化积，遇到积时想到化和差；"动静转换"的原则——遇到动态的问题想到化为静态，遇到静态的问题想到化为动态；"化高为低"的原则——将高次的化为低次的，高阶的化为低阶的，高维的化为低维的，超越式化为代数式，无理式化为有理式，分式化为整式等；"化曲为直"的原则——将曲线型问题化为直线型问题去处理；"化多为少"的原则——设法减少数与式的个数，以求化繁为简；"一般特殊转换"的原则——当特殊问题不便下手时，设法化特殊为一般，当一般问题不便下手时，设法化一般为特殊；"定与不定转换"的原则——对于确定的问题，当其不便下手时，可化确定为不定，对于不确定的问题，当其不便下手时，可化不定为确定；"等与不等转换"的原则——遇到相等可想到化为不等，遇到不等可想到化为相等；"直接间接转换"的原则——当直接下手不易时，可改直接下手为间接下手，如此等等．

以思维原则为指针，可以创造出一种解题通法，叫做"矛盾分析法"．它是以思维原则为指针，以矛盾分析为手段，对具体问题进行具体分析的一种解题方法．它的要点有两个，一是"思维定向"，二

是“矛盾分析”，两者相辅相成，缺一不可.

所谓“矛盾分析”，就是从分析所给问题中的矛盾差异入手，揭示矛盾差异间的内在联系，并利用这个联系进行差异间的互逆转化；所谓“思维定向”，就是根据思维原则确定探索方向．我们知道，思维原则是指引我们进行科学思维的灯塔，它能指引我们按照矛盾转化的规律办事，使我们始终保持正确的探索方向，从而少走或不走弯路，大大提高思维效率．这样，我们就建立了一种解题理论，叫做“定向”理论．因此“矛盾分析法”又可叫做“定向分析法”.

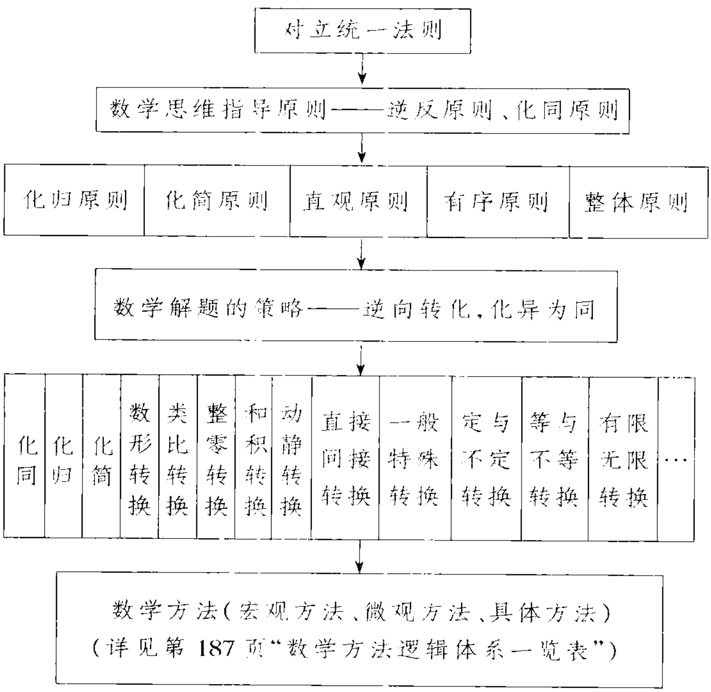
由于“矛盾转化论”是建立在辩证唯物主义对立统一法则基础之上的，而对立统一法则又是颠扑不破的真理，因此，若以对立统一法则为自明公理，运用公理化方法就可以构建起数学解题的理论体系来．下面我们就来构建这个理论体系.

首先，以对立统一法则为基础，可以揭示出若干思维原则，包括宏观原则与微观原则．以思维原则为基础，又可以制订出相应的解题策略，其中最根本的策略就是“逆向转化”与“化异为同”，它们乃是解决问题所需遵循的根本策略．具体的策略有：“化同”策略、“化归”策略、“化简”策略、“因果转换”策略、“数形结合”策略、“形似类比”策略、“整零转换”策略、“和积转换”策略、“动静转换”策略、“一般特殊转换”策略、“有限无限转换”策略以及“定与不定转换”策略、“等与不等转换”策略、“直接间接转换”策略、“已知未知转换”策略等.

方法是策略的伴生物，一定的策略必然导致一定的数学方法的产生．对这些数学方法进行分类，可分为宏观方法、微观方法与具体方法三种．其中宏观方法有：联想类比、归纳演绎、抽象概括、分析综合、公理化、结构主义方法、数学模型方法、关系映射反演方法、数学美学方法、数学矛盾分析方法等；微观方法有：因果转换法、数形结合法、形似类比法、整零转换法、动静转换法、和积转换法、繁简转换法、一般特殊转换法、有限无限转换法、定与不定转换法、等与不等转换法、直接间接转换法、已知未知转换法等；具体方法则包括一般方法与特殊方法和技巧．其中一般方法有：分析法、综合法、反证法、同一法、构造法、比较法、公式法、归纳法、类比法、数形结合法、逐次逼近法等；特殊方法与技巧有：移项合并、通分约分、去分母、设辅助元、三角法、代数法、面积法、体积法、图象法、解析

法、换元降次法、数学归纳法、待定系数法、构造辅助函数法、构造辅助模式法、构造辅助图形法、分类讨论法、配方法、判别式法、平均值法、基本不等式法等.

这样，我们就以对立统一法则为自明公理，用公理化方法建立了较为系统而完整的数学解题的理论体系. 下面将其用框图表示出来：



尽管上述理论体系尚有待于进一步的充实与完善，但是我们有理由相信，这是一个科学的理论体系. 它对促进数学教学，规范解题活动，发展智力，培养能力，推动数学素质教育与数学大众化的进程，必将发挥积极的作用. 同时，对“数学思维论”与“数学方法论”的研究也可望产生积极的影响.

三 “数学解题通论”的研究内容与方法

为了建立科学的学科理论，必须采用科学的研究方法与结构形式，为此，本书采用公理化方法与公理化结构，并以演绎法为主要的论述方法．例如，我们以对立统一法则为大前提，以数学问题中存在矛盾差异为小前提，即可演绎推出解题的本质就是矛盾转化的结论．毫无疑问，这是一个科学的结论．再如，我们以矛盾转化的规律为大前提，以数学转换是矛盾转化的表现形式为小前提，又可演绎推出矛盾转化是数学转换的根本规律的结论．无疑，这又是一个科学的结论，如此等等．对于本书的非核心部分，则根据具体情况，采用其他一些相应的方法，如“移植法”就是一例．所谓“移植法”，就是将有关资料直接加以引用．如关于辩证唯物主义、数学哲学、数学美学、逻辑思维与直觉思维等的研究成果，以及波利亚的“化归”思想、解题方法、对解题过程的划分等．另外，本书还移植了大量的数学问题，其中一些精妙解法为本书的理论与方法作了绝妙的佐证，为此，我们谨向有关作者表示衷心的感谢．

目　录