FUZZY INTEGRAL THEORY

⊙ 张德利 郭彩梅 著

模糊积分论

MOHU JIFENLUN

东北师范大学出版社

模糊积分论

张德利　郭彩梅　著

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（CIP）数据

模糊积分论/张德利，郭彩梅著．—长春：东北师范大学出版社，2004.7
ISBN 7-5602-1244-1

Ⅰ．模…　Ⅱ．①张…　②郭…　Ⅲ．模糊数学：积分-研究生-教材　Ⅳ．O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 058698 号

□责任编辑：张　恰　□封面设计：李冰彬
□责任校对：李　阳　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
销售热线：0431—5687213
传真：0431—5691969
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春人民印业有限公司印装
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
幅面尺寸：148mm×210mm　印张：6　字数：138 千
印数：0 001—1 000 册

定价：12.00 元

序

自日本学者Sugeno于1974年提出模糊测度与模糊积分的概念以来，一种不同于Zadeh模糊集论的研究模糊现象的理论——模糊测度论诞生，并得到了迅速的发展和广泛的应用。模糊测度区别于经典测度的本质特征是以“单调性”代经典测度的“可加性”，因而也被称为“非可加测度”，是经典测度的推广。以模糊测度为基础建立的积分即为模糊积分，是一种区别于Lebesgue积分的非可加积分，本书即是一部关于这一领域的研究著作。

张德利同志自1987年攻读硕士学位开始，就跟随王子孝教授进入这一领域，又于1995至1998年跟我做博士，所完成的题为“单值模糊积分、集值模糊积分与模糊值模糊积分”的博士论文包含了多方面的创新性成果，如模糊积分的广义收敛定理、水平收敛定理、表示定理，拟可加积分的Fubini定理，格值广义模糊积分，集值模糊积分等，尤其是所建立的集值函数的模糊积分，实现了模糊积分的被积函数由“单值”向“集值”的拓展，从而开辟了模糊积分论研究的新方向。因为出色的工作，其博士论文被哈尔滨工业大学学位委员会评为优秀博士论文，并曾作为全国百篇优秀博士论文的候选论文上报。从我这毕业后，张德利同志又进入吉林大学计算机软件博士后流动站，跟随刘大有教授，在模

糊推理和模糊逻辑领域作了进一步的研究，也取得一定的成果。通读全书，我更系统地了解了张德利和郭彩梅同志的更多研究领域和研究脉络。全书思路清晰，语言流畅，体系完整，富于创新，是值得一读的著作。

我接触的两位作者，为人谦虚，为学严谨，为事踏实，为业刻苦。今闻其著作出版，愿为此序，以慰师生之情，也以此祝愿其研究工作再上台阶！

吴从炘于哈尔滨工业大学

2003 年 11 月

Fuzzy Integral Theory

An Introduction To The Content

The present book includes two parts: the first is about fuzzy integral theory and the second is about L—fuzzy reasoning.

The theory of fuzzy integrals is an important part of fuzzy analysis. In this book, fuzzy integrals of single — valued functions, set—valued functions and fuzzy—valued functions are investigated in details.

1. The generalized fuzzy integral of number — valued functions is studied. Various kinds of generalized convergence theorems are obtained. The problem of weak convergence of fuzzy measures with respect to generalized fuzzy integrals is dealt with. Meanwhile, the level convergence theorem, Riesz representation theorem and some other results of generalized fuzzy integrals are shown, and it is pointed out that a fuzzy measure can be defined by the generalized fuzzy integral.

2. The pseudo—additive measure and integral—a particular fuzzy measure and fuzzy integral, which makes the Lebesgue measure and integral as special, is studied in deep, its various kinds of convergence theorems are given. Meanwhile, the product g — additive measure space is built up, and Fubini theorem is obtained.

3. Based on bringing out the generalized triangular norm operations on a complete lattice L, the theory of TS — L

generalized fuzzy integrals of lattice valued functions with respect to lattice valued fuzzy measures is established, and two kind of representations of VS－L generalized fuzzy integrals are shown. Viewing $\overline{R}^n_+$ as a special complete lattice, the generalized fuzzy integral of m－dim vector－valued functions with respect to m－dim vector－valued fuzzy measures is obtained, and convergence theorems are given through an m－dim generalized fuzzy integral theorem.

4. The fuzzy integral of set－valued function is defined based on the fuzzy integral of single－valued measurable selections of F, the results which make the properties of fuzzy integral as special and is similar to Aumann integral are given, these include convexity, closeness, Fatou's lemmas, etc. Based on this, the theory of fuzzy integrals of fuzzy set－valued functions is established by using its level set－valued functions. A concept of set－valued fuzzy measures is brought out and discussed; the Radon Nikodym theorem with respect to a special pseudo－additive set－valued measure is obtained.

5. The fuzzy number fuzzy measure with values in the space of normal, closed convex fuzzy numbers is defined, and the relationship between it and interval－number fuzzy measure is dealt with. Based on fuzzy integrals of interval－valued functions with respect to interval－number fuzzy measures, the theory of fuzzy integrals of fuzzy－valued functions with respect to fuzzy number fuzzy measures is built up.

On the other hand, in this book, we will state several questions that we were studying. First, triangular norm on a lattice L is considered, some results on its infinite operations are shown, and meanwhile interval－valued triangular norm is discussed. Secondly, inclusion degree valued in lattice L is studied, such that the results on [0, 1] valued inclusion degree are extended. Thirdly, fuzzy reasoning is investigated further, and [0, 1] −valued fuzzy reasoning is extended to the case of lattice L, it becomes L−fuzzy reasoning, some results on L−possibility reasoning and L micro−fuzzy reasoning are obtained. At last, several problems on fuzzy logic are dealt with, the [0, 1] −valued fuzzy logic based on triangular norm is generalized to the case of lattice L, and the L−fuzzy logic based on triangular norm is established, a compact theorem is given. Otherwise, interval−valued operator fuzzy logic is built up, so as to it is the generalization of [0, 1] −valued operator fuzzy logic.

前 言

现实世界中的现象纷繁复杂，但至关重要的至少有如下三类：一、确定性现象；二、随机现象；三、模糊现象。对于前两种现象，人们是比较熟悉的，如自由落体运动，其规律是确定的，而为一种确定性现象，与之相应的数学即为确定性数学；又如投掷一枚硬币，出现的结果是确定的，即只能是正面或反面，但就每一次投掷的结果究竟是正面还是反面事先却无法预料，这就是随机现象，它是一种“非此即彼”的不确定性现象，符合概率规律，与之相应的数学即为随机数学，也就是概率论与数理统计。除了上述不确定的随机现象外，现实世界中更多地存在着一种“亦此亦彼”的不确定性现象，它无法用通常的二值逻辑来表达，这就是模糊现象。如自然语言，它是在人们共同经验的基础上，以一种非数学语言进行思想和行为交流的工具。由于信息革命的需要，人们不可避免地要处理大量的模糊现象，而传统方法和已有工具面对模糊现象又显得十分不足，精确性和模糊性越发冲突。人脑所形成的概念几乎都是模糊的，如何使计算机对模糊概念具有识别、判断能力，以便使其具备人脑的智能，迫切需要对模糊现象建立数学语言。正是基于这样的背景，美国控制论专家Zadeh[1]教授于1965年提出了模糊集的概念，从而标志模糊数学的诞生。

模糊数学一经产生，便显示了异常旺盛的生命力，其应用遍及聚类分析、图像识别、数据结构、系统评价、自动控制、决策、优化、人文科学、社会科学等诸多领域，它在处理广泛存在的模糊性方面已体现出了巨大的优越性[2~5]。

在短短的三十几年中，模糊数学理论本身已得到迅猛的发展，它与经典数学中的分支相渗透的结果，便形成了对应的模糊数学

分支，如模糊拓扑学[6]，模糊代数学[7]，模糊分析学[8~10]就是其中典型的代表。我国刘应明院士等学者的工作享有国际声誉。

本书对近年来作者所涉猎的模糊积分及模糊推理等领域的发展及现状作了概述，主要介绍作者自己的研究成果，其中包括单值模糊积分、集值模糊积分，模糊值模糊积分，L 三角模、L 包含度、L 模糊推理、L 模糊逻辑等内容。这些成果有的是公开发表的，有的尚未发表。全书分十章，除第一章绪论外，其余九章可分为如下几个部分：第二、三章为单值模糊积分，研究了吴从炘先生的广义模糊积分及 Sugeno 的拟可加积分；第四章为格值模糊积分，研究了 L 广义模糊积分，包括向量值广义模糊积分；第五章为集值模糊积分，研究了集值函数及模糊值函数的模糊积分，包括集值模糊测度的成果；第六章为模糊值模糊积分，研究了模糊值函数关于模糊数模糊测度的模糊积分；第七章研究了 L 三角模的无限运算；第八章推广了张文修先生的包含度概念；第九章、第十章研究了 L 模糊推理与 L 模糊逻辑。

为了本书的系统性和简明性，本书不加证明地引用了吴从炘教授、张文修教授、王国俊教授等的部分成果，在此向上述诸位先生及参考文献中的作者表示感谢！

感谢作者的导师吴从炘教授、王子孝教授、刘大有教授等对作者多年来的悉心指导和帮助，感谢薛小平博士、宋士吉博士、哈明虎博士、陈德刚博士等的支持与帮助，感谢吉林省教育厅科研基金、吉林省教育学院青年基金、长春大学青年骨干教师基金等组织的支持。

感谢东北师范大学出版社的编辑同志为本书所付出的努力。

由于作者学识和水平所限，书中不妥及错误之处在所难免，敬请同仁及读者批评指正，不吝赐教。

本书得到国家自然科学基金资助。（项目号：10271035）

作者 2003 年冬于长春

目　录

第一章　绪　论

Ⅰ　模糊积分…………………………………………… 1
1.1　数值模糊测度与模糊积分 ……………………… 1
1.2　格值模糊测度与格值模糊积分 ………………… 6
1.3　集值函数的模糊积分 …………………………… 7
1.4　模糊值函数的积分 ……………………………… 8
1.5　模糊积分的应用…………………………………… 10
Ⅱ　模糊推理 ………………………………………… 11
1.6　三角模与三角余模………………………………… 11
1.7　包含度……………………………………………… 12
1.8　模糊推理…………………………………………… 13
1.9　模糊逻辑…………………………………………… 14

第二章　广义模糊积分

2.1　广义三角模与广义模糊积分……………………… 16
2.2　广义模糊积分的广义收敛定理…………………… 21
2.3　广义模糊积分的水平收敛定理…………………… 35
2.4　广义模糊积分的表示……………………………… 37
2.5　由广义模糊积分定义的模糊测度………………… 43

第三章　拟可加测度与积分

3.1　拟可加测度与积分的基本概念…………………… 46

3.2 拟可加积分的收敛定理………………………………… 50
3.3 乘积拟可加测度空间与 Fubini 定理 ……………… 55

第四章 格值广义模糊积分

4.1 格 L 上的广义三角模与 TS-L 广义模糊积分 …… 62
4.2 VS-L 广义模糊积分 ……………………………… 70
4.3 $\bar{R}^n$-值广义模糊积分 ……………………………… 76

第五章 集值函数与模糊集值函数的模糊积分

5.1 预备知识………………………………………………… 82
5.2 集值函数的模糊积分…………………………………… 84
5.3 模糊集值函数的模糊积分……………………………… 91
5.4 集值模糊测度与拟可加集值测度……………………… 95

第六章 模糊数模糊测度与模糊积分

6.1 预备知识………………………………………………… 99
6.2 区间数模糊测度与模糊数模糊测度 ………………… 102
6.3 区间值函数关于区间数模糊测度的模糊积分 …… 105
6.4 模糊值函数关于模糊数模糊测度的模糊积分 …… 107

第七章 L 上的三角模

7.1 格的概念 ……………………………………………… 114
7.2 L 上的三角模及无穷运算 ………………………… 115
7.3 [0, 1] 上区间数格上的三角模 …………………… 122

第八章 L 包含度及应用

8.1 L 包含度的定义及例子 …………………………… 127
8.2 L 包含度的构造方法 ……………………………… 130

8.3　L 包含度的应用 ………………………………… 132

第九章　L 模糊推理

9.1　引　言 ………………………………………… 137
9.2　$L-CRI$ 模糊推理 ………………………………… 140
9.3　L 可能性推理 ………………………………… 144

第十章　基于三角模的 L 模糊逻辑初探

10.1　引　言………………………………………… 151
10.2　预备知识……………………………………… 152
10.3　TL 模糊逻辑与 SL 模糊逻辑的紧性 …………… 153
10.4　关于算子模糊逻辑的补充……………………… 157

参考文献……………………………………………… 159

后　记………………………………………………… 176

第一章 绪 论

I 模糊积分

1.1 数值模糊测度与模糊积分

“模糊集”是模糊数学的基础概念，为了刻画它，1965 年 Zadeh 引入了这样的定义：所谓论域 U 上的模糊集 A，是指对每个 $u\in U$，都确定了一个数 $\mu_A(u)\in[0,1]$ 与之对应，叫作 μ 对 A 的隶属程度，映射 μ_A: $U\to[0,1]$ 就叫作模糊集 A 的隶属函数. 当 μ_A 取值于 $\{0,1\}$ 时，即为特征函数，A 就蜕化为普通集合. 按照 Zadeh 的定义，模糊集即为普通集的推广，Zadeh 的模糊集概念是成功的. 从另一个角度看，模糊性和随机性同属于不确定性，而随机性能用概率测度来刻画，那么模糊性能否用一种所谓的“模糊测度”来刻画呢？

1.1.1 Sugeno 的模糊测度与模糊积分

考虑论域 X 中的任意对象 x，对 X 中每一个非模糊子集 A 给定一个值 $g_x(A)\in[0,1]$，它表示了语句“x 属于 A”的模糊性程度，也就是一种猜测“$x\in A$”的主观相信程度或可能性. 可以明显地看出 $g_x(A)$ 具有下述性质：① 正规性，若 $A=\varnothing$，则 $g_x(A)=0$，若 $A=X$，则 $g_x(A)=1$；② 单调性，若 $A\subset B$，则 $g_x(A)\leqslant g_x(B)$. 正是基于此，日本学者 Sugeno[11]于 1974 年在

他的博士论文中提出了模糊测度的概念，即一个正规的、单调的、连续的集函数被称为模糊测度.把模糊测度与概率测度相比较，可以看出模糊测度就是放弃了概率测度的可加性，而代之以更广泛的单调性，因而它以概率测度为特款，且更符合人类日常的推断活动. 事实上，客观实际当中不可加的情形是更多的. 如抬一件物品，单个人就抬不动，记为 $p(A)=0$，$p(B)=0$，但是两个人就可以抬得动，这就是 $p(A\cup B)=1$. 再如，在刚体平面上掷骰子时，符合概率规律，但在非刚体平面上掷骰子时，就不符合概率的可加性了. 而恰符合模糊测度的单调性. 利用模糊测度，Sugeno 还定义了一种相应的泛函，被称为模糊积分，具体如下：

设 $(X, \mathscr{A})$ 是一可测空间，μ: $\mathscr{A}\to[0,1]$ 是模糊测度，f: $X\to[0,1]$ 是 $\mathscr{A}$-可测函数，$A\in\mathscr{A}$，则 f 在 A 上关于 μ 的模糊积分为

$$\int_A f\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha\cap A)]$$

其中 $F_\alpha=\{x\in X\,|\,f(x)\geqslant\alpha\}$，$\vee=\sup$，$\wedge=\inf$.

将模糊积分与 Lebesgue 积分作比较，不难发现二者已有本质差别. 主要模糊积分在于把 Lebesgue 积分中的运算"+，·"取代为"∨，∧"，因而积分性质也就失去了可加性. Sugeno 最早把模糊积分应用于主观评判过程，取得了较好的效果，因而这一理论也就倍受人们重视. Ralescu[12] 率先把模糊测度与模糊积分的值域推广到整个的正半轴$[0,\infty]$，并且利用简单函数重新定义了模糊积分，证明了它与 Sugeno 模糊积分的等价性，同时给出了模糊积分转化定理. 为了讨论模糊积分收敛定理，Ralescu 给模糊测度附加了一个"次可加性"的条件，而"次可加"无疑是太强了. 为了进一步探讨模糊积分的收敛理论，王震源[13] 于 1984 年引入了一个重要的概念 —— 集函数的自连续，把它加于模糊测度上，是一个较弱的条件，但可得到各种有效的积分收敛定理. 与此相关，后来王

震源又引入了"伪自连续"、"一致自连续"、"伪一致自连续"、"零可加,伪零可加"等概念.利用这些概念,他还讨论了模糊测度空间上的函数列的收敛问题,把经典测度论中著名的Lebesgue定理、Riesz定理以及Egoroff定理等推广到模糊测度.这些工作被总结在王震源与Klir[14]的专著《Fuzzy Measure Theory》中.

因为由经典的Lebesgue积分可以定义可加测度,那么由模糊积分是否可以定义模糊测度呢?这一问题被Suzuki[15]发现并解决.他指出由模糊积分可以定义模糊测度,并且所定义的模糊测度关于各种结构特征对原来的模糊测度具有遗传性.Suzuki[16]还对模糊测度的原子作了探讨.模糊测度与模糊积分的收敛问题始终是一个核心问题,与此相关的还有张德利[17],哈明虎[18],Greco and Bassanezi[19],Roman-Flores、Flores-Franulic[20]等人的工作.类似于函数空间上的有关线性泛函在一定条件下可以表示成Lebesgue积分的Riesz表示定理[21],那么函数空间上的单调泛函在一定条件下能否表为模糊积分?这一问题Ralescu[22]作了探讨,得到了一个表示定理.同时,关于模糊积分还有其他形式的表示定理[23].此外,类似于经典乘积测度,王子孝[24]、张广全[25]、何家儒[26]对乘积模糊测度进行了研究,得到了Fubin定理;Mesiar与Sipos[27]、Sugeno[11][28]、Ralescu[22]还研究了模糊测度的Radon-Nikodym导数问题,给出了一些特殊的Radon-Nikodym like定理.关于Sugeno的模糊积分,尚有一些其他人所做的工作,如乔忠[29]的模糊集上的模糊积分等.

1.1.2 广义模糊积分

仍然考虑Sugeno的模糊测度,观察其模糊积分的定义,不难看出,它主要是选用了两种不同于Lebesgue积分的运算,即逻辑加"∨"与逻辑乘"∧".而这两种运算的局限性是明显的,按此运算有时则会失掉很多信息.考虑实际问题的需要自然可以选取其

他类型的运算. 按此思路,赵汝怀[30]把"∧"代之以普通乘法"·",于 1981 年给出(N)模糊积分,张文修[19,31]给出(T)模糊积分,即用三角模"T"代替"∧",Suarez 与 Alvarez[32][33]又用"三角半模"代替"∧",于 1986 得到半模模糊积分. 吴从炘[34]研究了模糊积分运算的特点,于 1990 年提出了一种称之为"广义三角模"的运算,即

一个二元函数 $S:[0,\infty]\times[0,\infty]\backslash\{(0,\infty),(\infty,0)\}\to[0,\infty]$,如果满足下述条件:

(1) $S[x,0]=0,\forall\ x\in[0,\infty)$,且 $\exists\ e\in(0,\infty]$,使得 $S[x,e]=x,\forall\ x\in(0,\infty]$,

(2) $S[x,y]=S[y,x]$,

(3) $x_1\leqslant x_2,y_1\leqslant y_2$ 蕴含 $S[x_1,y_1]\leqslant S[x_2,y_2]$,

(4) $x_n\uparrow x,y_n\downarrow y$ 蕴含 $S(x_n,y_n]\to S[x,y]$,

则称此二元函数为广义三角模.

用广义三角模"S"去代替 Sugeno 模糊积分中的运算"∧",就得到了广义模糊积分,因而它是 Sugeno 模糊积分的推广. 对于一种新的积分来说,其收敛定理的建立是至关重要的,广义模糊积分能否有类似于王震源的收敛定理呢?这一问题被吴从炘、马明与宋士吉[35]所解决,并总结在宋士吉[36]的博士论文中. 这些收敛定理还是在模糊测度自连续的条件下,把王震源的相应收敛定理作了本质的深化. 与 Sugeno 的模糊积分理论相对照,广义模糊积分在很多方面仍须进一步完善和发展.

1.1.3 拟可加测度与积分

Sugeno 的模糊测度是经典可加测度的推广,但模糊积分却不是 Lebesgue 积分的推广,即使是广义模糊积分仍不能以 Lebesgue 积分为特款. 事实上,沿着减弱经典测度的可加性条件且能推广 Lebesgue 积分的思路,人们也有了相应的工作.