（九年级）

AOSAI GAOSHOU TIANTIANLIAN

奥赛高手天天练

数学

时爱荣 李 强 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ 奥赛高手天天练　数学　七年级
★ 奥赛高手天天练　数学　八年级
★ 奥赛高手天天练　数学　九年级

★ 奥赛高手天天练　英语　七年级
★ 奥赛高手天天练　英语　八年级
★ 奥赛高手天天练　英语　九年级

AOSAI GAOSHOU TIANTIANLIAN

ISBN 978-7-308-06813-0
9 787308 068130 >
定价：25.00元

通向金牌之路

奥赛高手天天练

数学(九年级)

主　编　时爱荣　李　强

编　委　张国良　邵玉良　李惠娟
陈小春　吴玥霞　许世兵
倪雄词　吕　英　朱玉萍
李校明　程　莉

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥赛高手天天练. 数学. 九年级/时爱荣，李强主编.
杭州：浙江大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-308-06813-0

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①时…②李… Ⅲ. 数学课—初中—习题
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 086284 号

奥赛高手天天练数学(九年级)

主编 时爱荣 李 强

责任编辑 石国华
文字编辑 张 鸽
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 19.25
字 数 397 千
版 印 次 2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06813-0
定 价 25.00 元

前　　言

美国航天之父冯·卡门在《航空航天时代的科学奇才》一书中写道："据我所知，目前在国外的匈牙利著名科学家当中，有一半以上都是数学竞赛的优胜者.在美国的匈牙利科学家，如爱德华、泰勒、列夫·西拉得、乔治·波利亚、冯·牛曼等几乎都是数学竞赛的优胜者。我衷心希望美国和其他国家都能大力倡导这种数学竞赛。"

1894年，世界上第一次中学生数学竞赛在匈牙利举行；1956年，我国第一届数学竞赛在北京、上海、天津、武汉四大城市举办，并延续至今；1985年，中国中学生数学奥林匹克队第一次参加了在芬兰举行的第26届国际数学奥林匹克；1986年，第27届国际数学奥林匹克中，中国中学生数学奥林匹克竞赛成绩跃居世界领先，从此进入了世界强队之列。

数学新课程标准告诉我们，不同的人应在数学上得到不同的发展！而良好的数学思维训练能使孩子们更聪明！

那么，如何让学有余力的孩子在数学上得到更好的发展？这正是本书想要告诉你的主要内容，看完本书你就会知道奥赛高手是如何练就的。

本书主要有以下几方面的特点：

1. 按照数学新课程标准和全国数学竞赛大纲要求，结合浙教版教材进度，以中考内容为起点，通过分析全国中学数学奥林匹克竞赛（全国数学联合竞赛、华罗庚金杯赛、希望杯数学邀请赛等）的备考要求、重点热点、复习策略等进行编写，丛书分七年级、八年级、九年级共三册。

2. 每册按知识板块分成30讲，每讲分"知识要点与能力要求"、"解题示范"、"能力测试"三个栏目。

知识要点与能力要求：从重点、难点、内容、结构等方面进行针对性的分析，归纳要点，建构知识体系，并提出了相应的数学能力要求。

解题示范：精选有一定层次和梯度的典型例题，在思想方法、解题策略、解题技巧和重要知识点的关键处进行点拨，提示审题技巧、揭示解题规律、反思解题过程，有助于学生举一反三，掌握解题思路和解题规律，提高解题能力。

能力测试：每个专题分基础训练、能力测试和冲击金牌三组，试题体现典型

性、新颖性和前瞻性，有利于学生强化知识，开阔视野，培养综合运用知识解决问题的能力。

3. 数学思想方法渗透于各个知识块中，并指导我们分析、解决数学问题，激发学生探索、尝试、分析的兴趣，找到解决问题的思路和方法，提高思维的独立性、创造性、批判性和灵活性，从而提升自身数学素养。

丛书邀请来自名校的有丰富教育实践经验的40多位优秀数学教师和奥数教练进行编写。但由于时间匆促可能难免有一些疏漏，敬请各位读者指正。

《奥赛高手天天练数学》编写组

2009年4月于乌镇

目　　录

第 1 讲

反比例函数的图象和性质

知识要点与能力要求

1. 函数的定义：形如 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 的函数叫做反比例函数.

2. 反比例函数的图象为双曲线.

3. 性质：(1) 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，当 $k>0$ 时，图象在第一、三象限. 在每一个象限内 y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，图象在第二、四象限，在每一个象限内 y 随 x 的增大而增大.

(2) 双曲线上的点关于原点 O 成中心对称，当 $k>0$ 时，函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称；当 $k<0$ 时，函数的图象关于直线 $y=-x$ 成轴对称(如图 1-1).

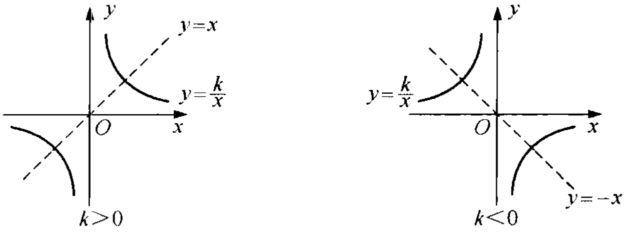


图 1-1

解题示范

例 1 如图 1-2，一次函数 $y=ax+b$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象交于 A，B 两点，与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D，已知 $OA=\sqrt{5}$，$\tan\angle AOC=\dfrac{1}{2}$，点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\ m\right)$.

(1) 求反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

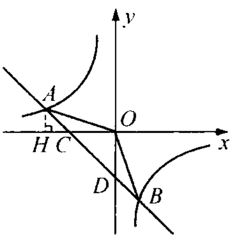


图 1-2

分析 要求两个函数解析式，只要求出 A，B 两点的坐标. 要求点 A 坐标，只要求出点 A 到坐标轴的距离，由解直角三角形的相关知识可求.

解 (1) 过点 A 作 $AH\perp x$ 轴于点 H，在 Rt$\triangle OHA$ 中，

$\because$ $\tan\angle AOC=\dfrac{AH}{OH}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 2AH = OH$.

$\because OA^2 = AH^2 + OH^2$, $\therefore (\sqrt{5})^2 = 5AH^2$,

$\therefore AH = 1$, $OH = 2$. $\therefore$ 点 $A(-2, 1)$.

把点 $A(-2, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = -2$, 于是反比例函数的解析式为 $y = -\frac{2}{x}$, 将 $B\left(\frac{1}{2}, m\right)$ 代入 $y = -\frac{2}{x}$, 得 $m = -4$, $\therefore B\left(\frac{1}{2}, -4\right)$.

把 $A(-2, 1)$, $B\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ 分别代入 $y = ax + b$ 中, 得 $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ \frac{1}{2}a + b = -4 \end{cases}$,

解得 $a = -2$, $b = -3$. $\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -2x - 3$.

(2) $\because OD = |b| = 3$,

$\therefore$

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= S_{\triangle AOD} + S_{\triangle DOB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot OD \cdot |x_A| + \frac{1}{2} \cdot OD \cdot |x_B| \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

点评 本题给出了求函数解析式和图形面积的基本方法, 关键在于求交点坐标.

例 2 如图 1-3, 正比例函数 $y = 3x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ 的图象交于点 A. 若 k 取 1, 2, 3, …, 20, 对应的 Rt$\triangle AOB$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3, …, S_{20}, 求 $S_1 + S_2 + \cdots + S_{20}$ 的值.

分析 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0)$ 的图象上的点, 则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|k|.$$

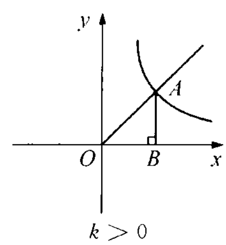


图 1-3

解 $\because$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|k|,$$

$\therefore$ 当 k 取 1, 2, 3, …, 20 时,

$$S_1 = \frac{1}{2}|1|, S_2 = \frac{1}{2}|2|, S_3 = \frac{1}{2}|3|, \cdots, S_{20} = \frac{1}{2}|20|.$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{20} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{20}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + 10\right) \times 20}{2} \\ &= 21 \times 5 = 105. \end{aligned}$$

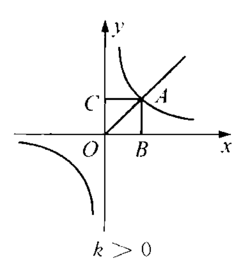


图 1-4

点评 如图 1-4, 设点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ 的图象上一点, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B, 过 A 作 $AC \perp y$ 轴于 C, 则 $S_{\triangle AOB} =$

$\frac{1}{2}|k|$，$S_{矩形OBAC}=|k|$.

能力测试

基础训练

1. 下列函数：① $y=\frac{1}{x+1}$，② $y=\frac{1}{x^2}$，③ $y=-\frac{1}{2x}$，④ $y=-\frac{x}{2}$，⑤ $y=\frac{1}{5x}$ 中，属于 y 关于 x 的反比例函数的有________.

2. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$，当 $x=-3$ 时，$y=\frac{4}{3}$，则函数的解析式是________.

3. 点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是函数 $y=-\frac{5}{x}$ 的图象在第二象限内的两个点，若 $x_1>x_2$，则 y_2 与 y_1 的关系是________.（比较 y_1 和 y_2 的大小）

4. 已知反比例函数 $y=\frac{k-2}{x}$，其图象在第一、三象限内，则 k 的值可为________.（写出满足条件的一个 k 值即可）

5. 已知反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$，当 $y\leqslant\frac{4}{3}$ 时，自变量 x 的取值范围是________.

6. 如果点(m, n)在某反比例函数的图象上，则下列各点中也在这个图象上的是　（　　）

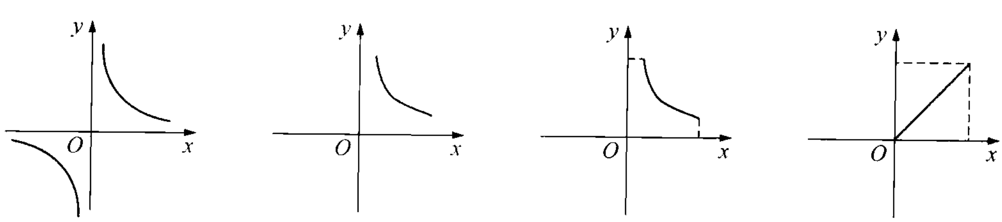
A. $(-m, n)$　　B. $(m, -n)$　　C. $(-n, -m)$　　D. $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$

7. 已知 $y=(m+1)x^{m\ \ 2}$ 是反比例函数，则函数的图象在　（　　）

A. 第一、三象限　　B. 第二、四象限

C. 第一、二象限　　D. 第三、四象限

8. 面积为 2 的 $\triangle ABC$，一边长为 x，这边上的高为 y，则 y 与 x 的变化规律用图象表示大致是　（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

9. 如图 1-5 所示，点 P 是反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 上的一点，$PD\perp x$ 轴于点 D，则 $\triangle POD$ 的面积为________.

10. 请你写出一个反比例函数的解析式，使它的图象在第二、四象限.

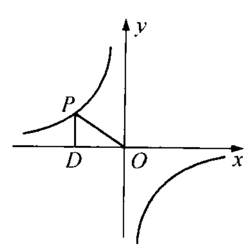
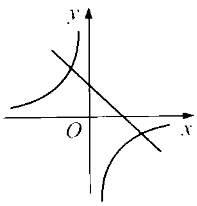


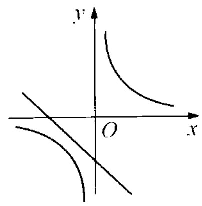
图 1－5

能力测试

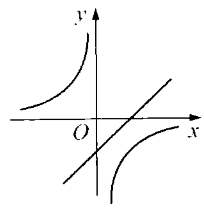
11. 函数 $y=-ax+a$ 与 $y=-\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 在同一坐标系中的图象可能是　　(　　)



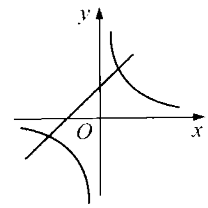
A.



B.



C.



D.

12. 如图 1－6 所示，动点 P 在函数 $y=\frac{1}{2x}(x>0)$ 的图象上运动，$PM\perp x$ 轴于点 M，$PN\perp y$ 轴于点 N，线段 PM，PN 分别与直线 $AB:y=-x+1$ 交于点 E，F，则 $AF\cdot BE$ 的值是　　(　　)

A. 4　　　　B. 2

C. 1　　　　D. $\frac{1}{2}$

13. 如图 1－7 所示，A，B 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上的点，且 A，B 关于原点 O 对称，$AC\perp x$ 轴于点 C，$BD\perp x$ 轴于点 D，如果四边形 $ACBD$ 的面积为 S，那么　　(　　)

A. $S=1$　　　　B. $1<S<2$

C. $S>2$　　　　D. $S=2$

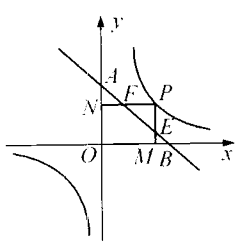


图 1－6

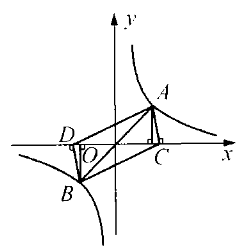


图 1－7

14. 如图 1－8 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，点 P 在 BC 边上运动，连接 DP，过点 A 作 $AE\perp DP$，垂足为点 E，设 $DP=x$，$AE=y$，则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图象是　　(　　)

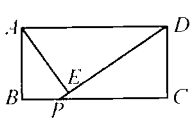
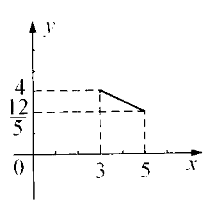
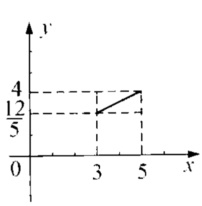


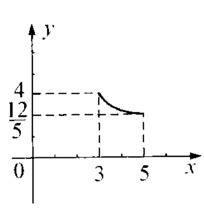
图 1－8



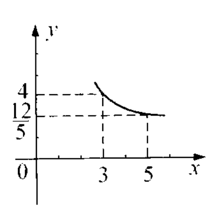
A.



B.

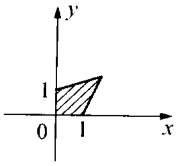


C.

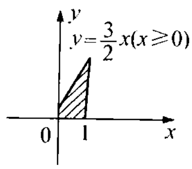


D.

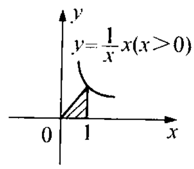
15. 下列图形中，阴影部分面积为 1 的是　　　　（　　）



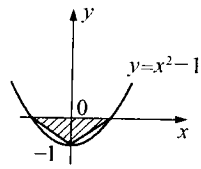
A.



B.



C.



D.

16. 如图 1－9 所示，已知矩形 $OABC$ 的面积为$\frac{100}{3}$，它的对角线 OB 与双曲线$y=\frac{k}{x}$相交于点 D，且 $OB:OD=5:3$，则 $k=$ ________.

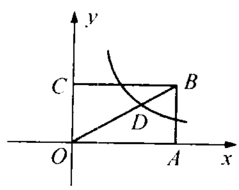


图 1－9

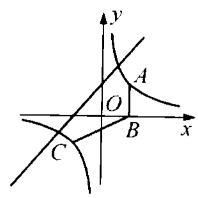


图 1－10

17. 直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，则 $2x_1y_2-7x_2y_1=$ ________.

18. 如图 1－10 所示，若正比例函数 $y=kx(k>0)$ 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象相交于 A，C 两点，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，连接 BC，若 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则 $S=$ ________.

19. 若点(3，4)是反比例函数 $y=\frac{m^2+2m-1}{x}$ 图象上一点，则此函数图象必经过点　　　　（　　）

A. (2，6)　　B. (2，－6)

C. (4，－3)　　D. (3，－4)

20. 如图 1－11 所示，正方形 $OABC$ 和正方形 $ADEF$ 的顶点 A，D，C 在坐标轴上，点 F 在 AB 上，点 B，E 在函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象上，则点 E 的坐标是　　　　（　　）

A. $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

B. $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

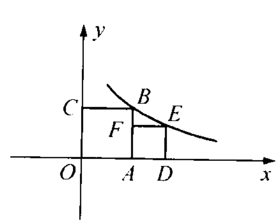


图 1－11

21. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq\pm1$) 的图象是轴对称图形,它的一条对称轴是下列哪个正比例函数的图象 ( )

A. $y=-kx$　　B. $y=|k|x$　　C. $y=\frac{k}{|k|}x$　　D. $y=kx$

22. 如图 1-12,已知 Rt△AOB 的顶点 A 是直线 $y=x+m$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第一象限内的交点,而且 $S_{\triangle AOB}=1$, C 是直线 $y=x+m$ 和 x 轴的交点,求 △ACB 的面积.

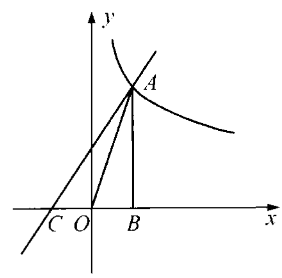


图 1-12

23. 如图 1-13 所示,已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(-\sqrt{3}, b)$,过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B,△AOB 的面积为$\sqrt{3}$.

(1) 求 k 和 b 的值.

(2) 若一次函数 $y=ax+1$ 的图象经过点 A,并且与 x 轴相交于点M. 求 $AO:AM$ 的值.

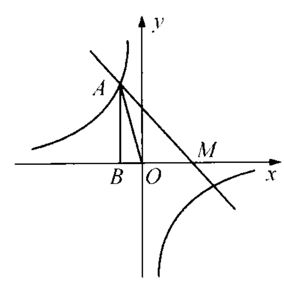


图 1-13

第 2 讲

反比例函数的应用

知识要点与能力要求

1. 根据反比例函数的图象和解析式 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，探索理解其性质（当 $k>0$ 或 $k<0$ 时，图象的变化）.

2. 用反比例函数解决实际问题时，常常运用数形结合及分类讨论的思想方法. 待定系数法是研究函数表达式的基本方法. 另外，紧密结合图象寻求思路，是处理这类问题的基本要求.

解题示范

例 1 如图 2 - 1，将一块直角三角板的直角顶点放在点 $C(1,\frac{1}{2})$ 处，两直线边分别与 x 轴、y 轴平行. 纸板的另两个顶点 A，B 恰好为直线 $y=kx+\frac{9}{2}$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}(m>0)$ 的交点.

(1) 求 m 与 k 的值；

(2) 设双曲线 $y=\frac{m}{x}(m>0)$ 在 A，B 之间的部分为 l，让一把三角尺的直角顶点 P 在 l 上滑动，两条直角边始终与坐标轴平行，且与线段 AB 交于 M，N 两点，请探究是否存在点 P，使得 $MN=\frac{1}{2}AB$，并写出你的探究过程和结论.

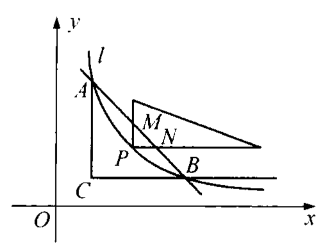


图 2 - 1

分析 由于 A，B 两点在反比例函数图象上，所以可以把 A，B 两点的坐标用 m 表示出来，再将两个点的坐标代入直线 $y=kx+\frac{9}{2}$ 即可求出 m 和 k 的值. 问题(2) 等价于是否存在于点 P，使得 $MP=\frac{1}{2}AC$（或 $NP=\frac{1}{2}BC$）. 设出 P 点坐标，是否存在点 P 其实就看构造的方程是否有解.

解 (1) 因为 C 点坐标为 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$A$，$B$ 两点在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 上，所以 A 点坐标为 $(1,m)$、B 点坐标为 $\left(2m,\frac{1}{2}\right)$.

将 A、B 两点的坐标代入直线 $y=kx+\frac{9}{2}$,得:

$$\begin{cases} k+\frac{9}{2}=m \\ 2mk+\frac{9}{2}=\frac{1}{2} \end{cases},$$

解方程组得 $m_1=4,m_2=\frac{1}{2}$. 因为 $m>\frac{1}{2}$,所以 $m=4,k=-\frac{1}{2}$.

(2) 假设存在点 P 使得 $$MN=\frac{1}{2}AB,$$

由 $$\mathrm{Rt}\triangle MPN\backsim\mathrm{Rt}\triangle ACB,$$

可得 $$\frac{MP}{AC}=\frac{NP}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{2}.$$

设 P 点坐标为 $\left(x,\frac{4}{x}\right)$ $(1<x<8)$,

则 M 点坐标为 $\left(x,-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\right)$,

所以 $$MP=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}-\frac{4}{x}=\frac{7}{4},$$

即 $$2x^2-11x+16=0,$$

因为 $$\Delta=(-11)^2-4\times2\times16=121-128<0,$$

所以此方程没有实数根,即不存在点 P 使得 $MN=\frac{1}{2}AB$.

点评 本题是将存在性问题转化为方程是否有解问题来解,给出了解决存在性问题的基本方法.

例 2 制作一种产品,需先将材料加热达到 60℃ 后,再进行操作. 设该材料温度为 y℃,从加热开始计算的时间为 x(min). 据了解,该材料加热停止后,温度 y 与时间 x 成反比例函数关系(如图 2-2). 已知该材料在操作加工前的温度为 15℃,加热 5 min 后温度达到 60℃.

(1) 分别求出将材料加热和停止加热进行操作时,y 与 x 的函数关系式.

(2) 根据工艺要求,当材料的温度低于 15℃ 时,须停止操作,那么从开始加热到停止操作,共经历了多少时间?

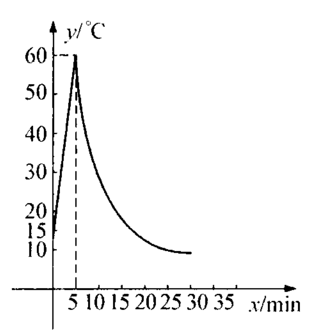


图 2-2

分析 这是一个分段函数的问题,在自变量不同的取值范围内,对应不同的函数.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant5$ 时,设 $y=kx+b(k\neq0)$,将 $(0,15)$,$(5,60)$ 代入 $y=kx+b$

得$\begin{cases} b = 15 \\ 5k + b = 60 \end{cases}$，所以 $k = 9$，$b = 15$，即 $y = 9x + 15$.

当 $x \geqslant 5$ 时，设 $y = \dfrac{k}{x}(k \neq 0)$，将(5，60)代入 $y = \dfrac{k}{x}$ 得 $k = 300$，所以 $y = \dfrac{300}{x}$，

即
$$y = \begin{cases} 9x + 15 & (0 \leqslant x \leqslant 5) \\ \dfrac{300}{x} & (x \geqslant 5) \end{cases}.$$

(2) 当 $y = 15$ 时，$\dfrac{300}{x} = 15$，$x = 20$.

所以共经历了 20min.

点评　解决此类问题，一定要运用数形结合的思想.

能力测试

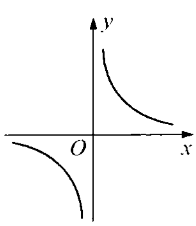
基础训练

1. 函数 $y = \dfrac{1}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是________.

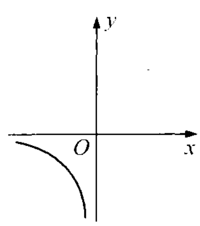
2. 若函数 $y = (m^2 - 1)x^{3m^2+m-5}$ 为反比例函数，则 $m =$ ________.

3. 近 1 亿人眼镜的度数 y(度)与镜片焦距 x(m)成反比例. 已知 400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25m，则眼镜度数 y 与镜片焦距 x 之间的函数关系式为________.

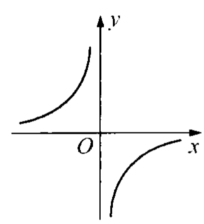
4. 已知一个矩形的面积为 12cm²，其长为 $y$cm，宽为 $x$cm，则 y 与 x 之间的函数关系的图象大致是　　　　(　　)



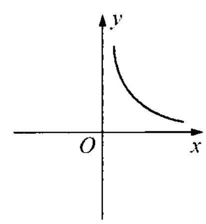
A.



B.



C.



D.

5. 反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图象经过点(2，5)，若点(1，n)也在反比例函数的图象上，则 n 等于　　　　(　　)

A. 10　　　　B. 5　　　　C. 2　　　　D. $\dfrac{1}{10}$

6. 某闭合电路中，电源的电压是定值，电流 I(A)与电阻 R(Ω)成反比例关系，图 2－3 表示的是该电路中电流 I 与电阻 R 之间的图象，则用电阻 R 表示电流 I 的函数解析式为　　　　(　　)

A. $I = \dfrac{4}{R}$　　　　B. $I = \dfrac{3}{R}$

C. $I = \dfrac{12}{R}$　　　　D. $I = -\dfrac{12}{R}$

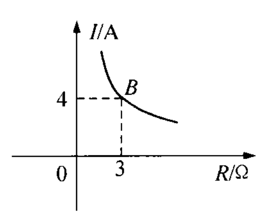


图 2－3