谢明文 ● 编著

普通高等经济类院校系列教材

微积分简明教程

WEIJIFEN JIANMING JIAOCHENG

西南财经大学出版社

普通高等经济类院校系列教材

微积分简明教程

WEIJIFEN JIANMING JIAOCHENG

谢明文●编著

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程/谢明文编著.—成都:西南财经大学出版社,2009.1
ISBN 978-7-81138-181-8

Ⅰ.微…　Ⅱ.谢…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 198804 号

微积分简明教程
谢明文　编著

责任编辑:于海生
封面设计:杨红鹰
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	19
字　　数:	375 千字
版　　次:	2009 年 1 月第 1 版
印　　次:	2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:	1—5000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-181-8
定　　价:	35.00 元

前 言

为了适应我国普通高等学校发展的新形势,根据教育部颁布的《经济数学基础教学大纲》的最新要求,编写了一套经济数学系列教材.这套教材共分《微积分简明教程》、《线性代数简明教程》和《概率统计简明教程》三个分册.本书是第一分册.

鉴于文科学生的数学基础和财经专业的实际需要,作者在编写这本教材时,自始至终贯彻大纲要求与学生实际相结合,把抽象概念与直观描述相结合的基本意图.

基于上述考虑,在编写本分册时,作者力求使之具有以下特点:

(1) 可读性.本分册力求内容全面、深广适中,言简意赅、思路清晰,着眼基础、略有创意.例题分析片言中的,解题思路简明清晰.旨在调动读者的阅读兴趣,培养读者的分析能力,使读者轻松完成学业.

(2) 科学性.本分册大胆地采用了以实际例子引入基本概念,以几何说明代替理论证明的方法.这种方法,不仅没有失去数学本身的科学性,而且也没有改变学科本身的基本理念和降低基本深度及广度,以求实现作者阐之有理、述之有据的初衷.

(3) 实践性.本分册配备例题的原则是:由浅到深、层次分明、题型全面、分析细腻.旨在培养学生对问题的理解能力和应用能力.为此,在每节后面,配有一定数量的习题;在每章后面,还配有一定数量的综合习题,以供师生选用.

(4)创新性.在本分册的编写过程中,既继承了传统理念的精华,又发扬了与时俱进的精神,在以下几个问题的处理上,体现了作者有别于传统教材的一些思考:

①在微分学中,根据作者多年的教学经验以及一般财经专业的要求,对于极限理论,只给出“描述性定义”,而没有提出严格的数学定义;对于无穷小量替换原理,不仅突出了它在极限计算中的作用,而且还十分强调这种方法的具体应用.

②在积分学中,为了讲清有理函数的积分理念,作者提出了一种浅显易懂的分析方法;为了突出积分学的应用思想,作者给出了“微元法”的基本思想,并以它为主线,推导出了定积分中的所有应用公式和二重积分的计算公式.

③在差分方程中,作者避开了差分算子的概念,把所有“常系数线性差分方程”的求解问题,归结为普通代数方程的求根问题,使差分方程的求解问题变得比微分方程更为简单,彻底消灭了差分方程公式成堆的现象.

为了方便教学，作者建议："三本"学生可选用没有＊号的内容，估计需要94学时；"二本"学生可选用本书全部内容（带有＊号的内容亦可适当选择），估计最多需要128学时；跳过＊号内容，亦不影响本书的体系.

由于时间仓促、水平有限，缺点错误在所难免，敬请同仁、读者，不吝赐教. 无论顺逆，感激至诚.

联系方式：(1)电子邮箱：xiemw@swufe.edu.cn
(2)联系电话：(028)87354242

编者

2008年11月　于成都

目 录

第一章　函数

函数是微积分的一个重要概念，也是高等数学的一个基本研究对象．本章的宗旨，就是要建立函数的基本概念，并给出函数的简单性质．

§1.1　函数的概念

科学的概念，不仅是建立一门学科的理论基础，也是学习这门学科的思维依据．因此，为了研究函数的性质就必须建立函数及与它相关的一些概念．

一、邻域的概念

在初等数学中，为了描述变量的变化范围，我们引入了集合和区间的概念．在微积分中，由于经常需要考虑变量在“某点附近”的变化，因此还需引入一个过去的集合和区间无法取代的特殊的集合或区间——邻域．

在数学上，常用的邻域有下面几种；

(1)若a、δ为实数且$\delta > 0$，则称开区间$(a-\delta, a+\delta)$为点a的δ有心邻域，并记为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta,\ a+\delta).$$

其几何直观，如图1－1所示．

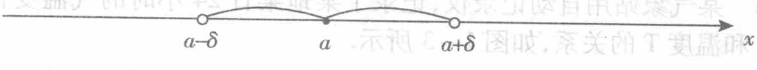

图1－1

(2)若a、δ为实数且$\delta > 0$，则称开区间$(a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta)$为点$a$的$\delta$去心邻域，并记为$\overset{0}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{0}{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta).$$

其几何直观，如图1－2所示．

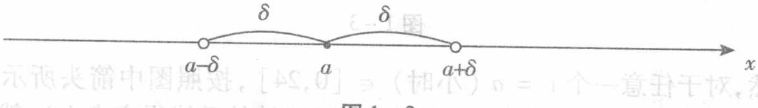

图1－2

(3)同理，我们可以定义：点a的δ左邻域与右邻域，分别为

$$U_-(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a\}\triangleq(a-\delta,a),$$

与 $$U_+(a,\delta)=\{x|a<x<a+\delta\}\triangleq(a,a+\delta).$$

我们约定:今后,凡是变量 x"在点 a 的某一侧"取值,就用邻域 $U_-(a)$ 或 $U_+(a)$ 来描述;凡是变量 x"在点 a 的某个邻域内"取值,就用邻域 $U(a)$、$\overset{0}{U}(a)$、$U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 等来描述.

二、函数的概念

为了建立函数的概念,我们先来考察几个实际例子.

例 1　某工厂每天最多生产某种产品 100 件,固定成本为 1000 元,单位变动成本为 15 元,则每日的产量 x 与每日的总成本 y 之间的关系为

$$y=15x+1000, x\in[0,100]$$

当 x 在区间 $[0,100]$ 内任取一个值时,均可通过规则"15 倍 x +100"得到一个 y 值与之对应.

例 2　某洗衣机厂记录了某种型号洗衣机的销售情况,并将销售量 y(单位:台)与销售价格 x(单位:元/台)列表如下:

表 1－1

价格 x	50	80	100	150
销售量 y	12500	10500	8500	6500

显然,当 x 在价格集合 $\{50,80,100,150\}$ 中任取一个值(如 $x=80$)时,均可按表 1－1 所示的对应规则(价格下方的数字是该价格下的销售量)唯一地确定一个销售量 y 的值($y=10500$)与之对应.

例 3　某气象站用自动记录仪,记录了某地某日 24 小时的气温变化情况.其时间 t 和温度 T 的关系,如图 1－3 所示.

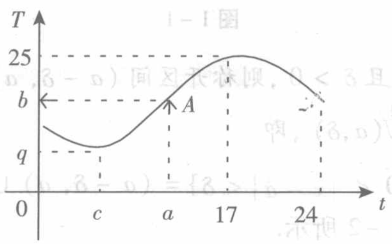

图 1－3

显然,对于任意一个 $t=a$(小时)$\in[0,24]$,按照图中箭头所示的规则(过点 a 作 Ot 轴之垂线得交点 A,再过 A 作 OT 轴的垂线得交点 b),就有一个唯一确定的 $T=b$ 与之对应.

上述三个例子,有一个共同的特点:就是当变量 x(或 t)在其取值集合内任

取一个值时，按照某一对应规则，变量 y 总有一个确定的值与之对应. 将这种现象加以抽象，就得到下面的

定义 1.1 设在某一过程中，有两个变量 x 与 y，且 x 的取值集合为 D. 若对于 D 中的每一个 x，按照某个确定的对应规则 f，都有一个唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，并记为

$$y = f(x) \quad x \in D.$$

并称 x 为自变量，y 为因变量或函数；自变量 x 的取值集合 D 称为函数的定义域. 为了指明它是函数 $f(x)$ 的定义域，也可记为 $D(f)$. 因变量或函数 y 的取值集合，叫做函数的值域，通常记作 $Z(f)$.

为了更好地理解函数的定义，现特作如下说明：

(1) 定义中的对应规则"f"，实质上就是把定义域 $D(f)$ 中的元素 x 变为值域 $Z(f)$ 中的元素 y 的一个运算法则. 例如，在函数 $y = f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ 中，对应规则"f"就是把"[自变量]"变为"3·[自变量]^2 +2·[自变量] −5".

当 $x = \sqrt{3}$ 时，函数值为 $f(\sqrt{3}) = 3 \cdot (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} - 5 = 4 + 2\sqrt{3}$.

当 $x = a - 1$ 时，函数值 $f(a-1) = 3(a-1)^2 + 2(a-1) - 5 = 3a^2 - 4a - 4$.

为了某种方便，有时也可把某个具体函数 $y = f(x)$，简单地写成 $y(x)$.

(2) 由于定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 确定以后，其值域 $Z(f)$ 也随之而定，因此定义域和对应规则是决定函数的**两个要素**，而与变量的字母名称毫无关系.

正是由于上述原因，数学上常把函数 $f(x)$、$f(z)$ 等均称为函数 f，而把 $f(a)$ 或 $f(x)\Big|_{x=a}$，称为函数 f 在 $x = a$ 时的值.

例 4 下列函数是否为同一个函数?

(1) $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x}$ 与 $\varphi(x) = x + 1$；

(2) $f(x) = x$ 与 $\varphi(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

解 (1) 因为 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

而 $D(\varphi) = (-\infty, +\infty)$

所以由 $D(f) \neq D(\varphi)$ 可知，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不是同一个函数.

(2) 因为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$，$D(\varphi) = (-\infty, +\infty)$，即 $D(f) = D(\varphi)$

而 $f(x) = x$，$\varphi(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x) = x$（即对应规则相同）

所以函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为同一函数，即 $f = \varphi$.

由定义 1.1 可知，函数 $f(x)$ 的定义域，实质上就是能使 $f(x)$ 有意义的 x 的取值集合；而在实际问题中，其定义域应由问题的实际意义来确定.

例 5 求函数 $f(x) = \lg \dfrac{x}{x-2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的定义域.

解 因为要使函数 f 有意义，必须对数函数的真数大于 0 且偶次方根的被开方式不为负，所以 x 必须满足 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$ 即满足

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ (x-1)(x-2) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x - 2 < 0, \\ (x-1)(x-2) \geqslant 0. \end{cases}$$

解之,得

$$x > 2 \text{ 或 } x < 0.$$

于是,该函数 f 的定义域 $D_2 = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

例 6　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,5]$,求函数 $f(2x-1)$ 的定义域

解　由 $f(x)$ 的定义域为 $(1,5]$ 知,在规则 f 下,变量必须在区间 $(1,5]$ 内取值,即 $2x-1$ 必须满足:

$$1 < 2x - 1 \leqslant 5, \text{即 } 1 < x \leqslant 3.$$

于是,函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $D = (1,3]$.

(3) 由于变量之间的对应规则 f 的形式,定义并没加以限制,所以函数的表示法并不唯一. 在习惯上,人们常用公式法(如例 1 中的 $y = 15x + 1000\ (x \in [0, 100])$)、列表法(如例 2 中的表 1-1)和图像法(如例 3 中的图 1-3)来表示函数.

(4) 在用公式法表示函数时,并不局限于只用一个表达式. 在必要时,也可用两个或两个以上的表达式来表示一个函数. 这种函数我们称之为**分段函数**.

例如,下面两个函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1, & -2 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leqslant 6 \end{cases} \quad \text{与} \quad y = \varphi(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

就是分别由三个与两个不同式子来表示的分段函数.

在分段函数中,各表达式的定义域,称为函数 f 的子定义域;两个相邻子定义域的分界点,称为函数 f 的**分段点**;各子定义域的并集,称为分段函数的定义域. 例如,在上面的两个函数中,$D(f) = (-2,0) \cup \{0\} \cup (0,6] = (-2,6]$,$D(\varphi) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$.

例 7　设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ x - 1, & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$. 求 $f(x)$ 的定义域,并计算 $f(-0.5)$、$f(0)$ 和 $f(3)$ 的值.

解　因为 $f(x)$ 的定义域为三个子定义域之并集,所以

$$D(f) = (-1,0) \cup [0,1) \cup [1,3] = (-1,3].$$

又　$-0.5 \in (-1,0)$, $0 \in [0,1)$, $3 \in [1,3]$

故　$f(-0.5) = 2^{-0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,　$f(0) = x\big|_{x=0} = 0$, $f(3) = (x-1)\big|_{x=3} = 2$.

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称.

若 $\forall x \in D(f)$,均有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 在 $D(f)$ 内为奇函数;

若 $\forall x \in D(f)$,均有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 在 $D(f)$ 内为偶函数.

由定义 1.2 可知:

(1)若点 $A(x,y)$ 在奇函数 $y = f(x)$ 的图形上,则点 $A'(-x,-y)$ 也在该函数的图形上(见图 1-4).因此,奇函数的图像关于坐标原点对称.

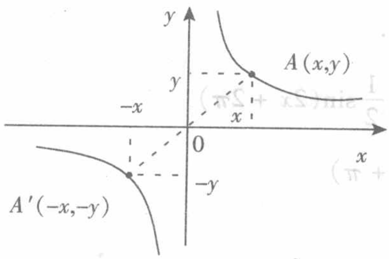

图 1-4

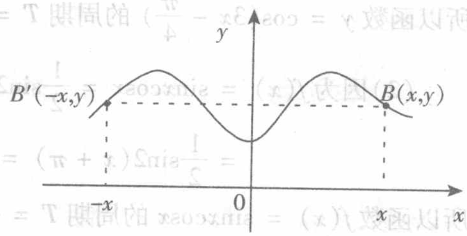

图 1-5

(2)若点 $B(x,y)$ 在偶函数 $y = f(x)$ 的图形上,则点 $B'(-x,y)$ 也在该函数的图形上(见图 1-5).因此,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 + 2\cos x - 3$;　　　(2) $y = x^2,\quad x \in [0,2]$;

解 (1)因为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$ 关于原点对称

而 $f(-x) = (-x)^2 + 2\cos(-x) - 3 = x^2 + 2\cos x - 3 = f(x)$

所以由定义 1.2 知,函数 $f(x) = x^2 + 2\cos x - 3$ 为偶函数.

(2)因为 $y = x^2$ 的定义域 $[0,2]$ 关于原点不对称,所以 $y = x^2$ 为非奇非偶函数.

2. 函数的周期性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义.若存在一个常数 $T \neq 0$,使得 $\forall x \in D$,均有 $(x \pm T) \in D$,且

$$f(x + T) = f(x) \tag{1-1}$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,并称满足(1-1)式的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

显然, $\sin x$ 与 $\cos x$ 是 $T = 2\pi$ 的周期函数; $\tan x$ 与 $\cot x$ 是 $T = \pi$ 的周期函数.但是,并非所有周期函数都存在最小正周期.例如,$f(x) = c$ 就是这种函数.

由定义可知:若 $f(x)$ 是区间 I 上的周期函数,则区间 I 必为 $(-\infty, +\infty)$.反之,若 $f(x)$ 的定义域是一个区间,但非 $(-\infty, +\infty)$,则 $f(x)$ 不可能为周期函数.

例如,函数 $f(x) = \cos\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$,而不为 $(-\infty, +\infty)$,因

此该函数就不是一个周期函数.

例 9　求下列函数的周期:

(1) $y=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;　　　(2) $f(x)=\sin x\cos x$.

解　(1)因为$y(x)=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(3x+2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\left[(3x+2\pi)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=y\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

所以函数 $y=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)因为$f(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin(2x+2\pi)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)=f(x+\pi)$$

所以函数$f(x)=\sin x\cos x$ 的周期 $T=\pi$.

(3) 函数的单调性

定义 1.4　设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,若对于(a,b)内的任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在(a,b)内单调增加(见图1-6)(或单调减少(见图1-7)).

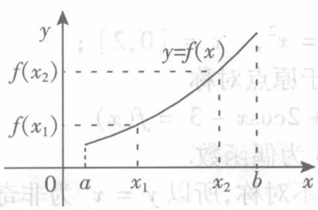

图 1-6

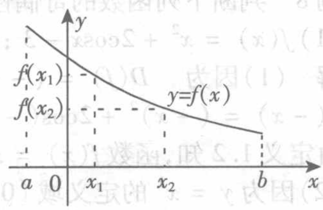

图 1-7

上述两种函数,统称为**单调函数**;区间(a,b)称为$f(x)$的**单调区间**.

例 10　讨论下列函数$f(x)=x^2$的单调性.

解　显然,此函数的定义域为$D(f)=(-\infty,+\infty)$.

设x_1,x_2为$D(f)$中的任意两点且$x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

由于因子$(x_1-x_2)<0$,因子(x_1+x_2)符号不定,而要使其符号确定,就必须x_1,x_2同号,所以应分为两种情况予以讨论:

(ⅰ)当$x_1,x_2\in(-\infty,0)$时,则由$x_1-x_2<0$和$x_1+x_2<0$,得

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$$

即　$$f(x_1)>f(x_2)$$

于是，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少；

（ⅱ）当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，则由 $x_1-x_2<0$ 和 $x_1+x_2>0$，得

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$$

即

$$f(x_1)<f(x_2)$$

于是，函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x ①上有定义.

若存在常数 M，使得 $\forall x\in I_x$，均有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I_x 上有上界.

若存在常数 m，使得 $\forall x\in I_x$，均有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 I_x 上有下界.

若 $f(x)$ 在区间 I_x 上既有下界又有上界（即存在常数 m 与 M，使得 $\forall x\in I_x$，均有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$），则称 $f(x)$ 在区间 I_x 上有界.

不难证明，函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上有界的充分必要条件是存在一个正数 K，使得 $\forall x\in I_x$，均有

$$|f(x)|\leqslant K \tag{1-2}$$

例如，函数 $y=\sin x$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，由于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

但是，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内就不是一个有界函数.

因为由 $0<x<1$，知 $f(x)=\dfrac{1}{x}>1$，即 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有下界

而 对于无论多么大的正数 M，可以找到一个 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，使得

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M\text{，即 }f(x)\text{ 无上界}$$

所以由定义 1.5 知，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

由(1-2)式可知：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界与曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的那一部分总是被夹在平行于 x 轴的直线 $y=-K$ 与 $y=K$ 之间等价（见图 1-8）.

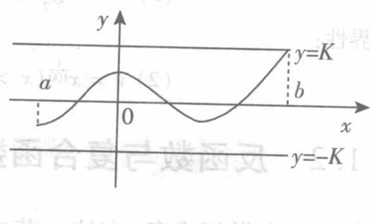

图 1-8

例 11 试用几何或分析的方法，判断下列函数的有界性：

① 若把区间 I_x 换成一般数集 D，则此定义仍然成立.

(1) $y = \ln x, \quad x \in (0,2]$；　　　　(2) $y = a^x, x \in (-\infty, 0]$ 且 $a > 1$.

解　(1)因为在区间 $(0,2]$ 内,曲线 $y = \ln x$ 的图形不可能完全被夹在两条平行直线 $y = \pm M$（定值）之间,所以 $y = \ln x$ 在区间 $(0,2]$ 内无界.

(2)因为当 $a > 1$ 时, $\forall x \in (-\infty, 0]$,均有 $0 < a^x \leqslant 1$,即 a^x 既有下界、又有上界,所以 $y = a^x (a > 1)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内有界.

习题 1.1

1. 按照要求解下列各题:

(1)已知 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(2)已知 $f(x) = x^2\ln(1+x)$,求 $f(e^{-x})$.

2. 下列函数是否相同? 为什么?

(1) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$；　　　　(2) $y = \ln\sqrt{x-2}$ 与 $y = \dfrac{1}{2}\ln(x-2)$；

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y = c$（常数）；　　　　(2) $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$；　　　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

4. 已知 $f(x)$ 的定义域为 (a,b) ,求 $f(2x-1)$ 的定义域.

5. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$,求 $F(x) = f(x+a) + f(x-a)\ (a > 0)$ 的定义域.

6. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = ex^2 + \cos x$；　　　　(2) $y = 3x^2 - x^3$；

(3) $f(x) = x(x-1)(x+1)$；　　　　(4) $y(x) = \sin x - \cos x + 1$.

7. 下列函数中哪些是周期函数? 若是周期函数,试求出周期:

(1) $y = \sin(x+1)$；　　　　(2) $y = \cos 3x$；

(3) $y = 1 - \sin\pi x$；　　　　(4) $y = x\cos x$.

8. 试证明下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = x^2 (-1,0)$；　　　　(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x\ (x > 0)$.

9. 试判断下列函数的有界性:

(1) $y = 2\sin 3x + 1$；　　　　(2) $y = x^{\frac{1}{100}}\ (x > 0)$

§1.2　反函数与复合函数

为了给今后研究函数的性态做好准备,在这一节中,我们将介绍函数这个“家族”中的两个重要成员——反函数和复合函数的概念.

一、反函数

在函数的定义中有两个变量,一个为自变量,另一个为因变量. 然而,在一

定的条件下，这两个变量的地位也可以相互转化.

例如，某种价格为 $p>0$ 的商品，其销售量 x 与销售收入 y 之间的函数关系为

$$y = px \quad (x \geqslant 0).$$

按照定义 1.1，在 $[0, +\infty)$ 内任给一个 x 的值，均可由这个关系式确定一个 y 值.

但是，要想通过销售收入 y 去确定销售量 x，就需要从上式中将 x 解出来，得到一个新的函数关系

$$x = \frac{y}{p}.$$

由于这个新的函数 $x = \frac{y}{p}$，是从原来函数 $y = px$ 中把 x 反解出来而得到的，因此人们称它为 $y = px$ 的反函数.

1. 反函数的定义

把以上分析的思维形式严格化，就得到下面的

定义 1.6 设 $y = f(x)$ 为已知函数. 若从 $y = f(x)$ 解出的关系式

$$x = \varphi(y) \tag{1-3}$$

也是一个函数，则称它为 $y = f(x)$ 的反函数，并称 $y = f(x)$ 为"直接函数".

对于定义 1.6，我们尚需作如下说明：

(1) 为了在函数符号上体现出誰是谁的反函数，习惯上总是把函数 f 的反函数 φ 记为 f^{-1}，即把函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 记为 $x = f^{-1}(y)$，并称它为函数 $y = f(x)$ 的**定义形式的反函数**.

(2) 因为关系式 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 等价，凡是满足 $y = f(x)$ 的点 (x, y) 也满足 $x = f^{-1}(y)$（反之亦然），所以在 xoy 平面上它们的图形完全重合（见图 1-9）. 其重合的原因，就在于坐标轴的方向不统一. 在作 $y = f(x)$ 的图形时，x 轴为水平轴；在作 $x = f^{-1}(y)$ 时，y 轴为水平轴.

(3) 因为 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 具有相同的对应规则 f^{-1} 和定义域 $D(f^{-1})$，所以它们必为同一函数. 根据定义 1.1 的说明(3)，把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 交换变量写成 $y = f^{-1}(x)$，仍为 $y = f(x)$ 的反函数，人们称之为函数 $y = f(x)$ 的**习惯形式的反函数**. 这一做法，不仅解决了坐标轴方向的统一问题，而且也解决了直接函数与其反函数图形的重合的弊病.

(4) 由 $y = f(x)$ 的定义形式反函数为 $x = f^{-1}(y)$ 可知：若点 (a, b) 在曲线 $y = f(x)$ 上，则点 (b, a) 必在曲线 $y = f^{-1}(x)$ 上. 基于点 (a, b) 和点 (b, a) 关于直线 $y = x$ 对称，故直接函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称（见图 1-10）.