通向金牌之路

丛书主编 许康华

JINBAN AOSAI JIAOCHENG

金版奥赛教程

数学 六年级

◎ 本册主编 段春炳

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

JINBANAOSAIJIAOCHENG
SHUXUE

金版奥赛教程

丛书主编　许康华
副 主 编　闻雪洪　何文明
编　　委　曹贤鸣　段春炳
马　腾　刘琴娣
陈　曦　骆来根
邵国强　孙青儿
裘玉云　董维民
梁海鸥　吕宏斌
毛大平　陈舜友

数学

（六年级）

本册主编　段春炳

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金版奥赛教程. 数学. 六年级 / 许康华主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-308-06839-0

Ⅰ.金… Ⅱ.许… Ⅲ.数学课—小学—教学参考资料 Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 089797 号

金版奥赛教程·数学(六年级)
本册主编 段春炳

责任编辑 杨晓鸣
文字编辑 包善贤(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 9.75
字　　数 230 千
版 印 次 2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-06839-0
定　　价 12.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

编 写 说 明

中小学学科竞赛是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生课外活动。据不完全统计，全国每年有三百多万高中学生参与各类学科竞赛活动。尤其是近年来，我国选手在国际数学奥林匹克（简称 IMO）、国际物理奥林匹克（简称 IPHO）、国际化学奥林匹克（简称 ICHO）等活动中成绩斐然，更是吸引了许多有创新能力和天赋的学生参与学科竞赛活动。学科竞赛之所以备受广大学生关注和参与，究其原因是学科竞赛不仅具有很强的挑战性、探究性，而且对塑造和培养学生思维修养和创新意识方面大有裨益。

浙江大学出版社本着为我国基础教育改革、发展和学科竞赛做点有益事情的心愿，在精心研究了多年国内外竞赛命题规律、博采国内外优秀试题的基础上，邀请了全国各地竞赛命题专家、金牌教练，组织编写了“金版奥赛教程”系列丛书。丛书涵盖数学、英语、物理、化学、生物、信息技术六大学科，包括从小学到高中各个层次，共计 30 多个品种。

丛书的最大特点：

一是起点低，目标高。本丛书以学科基础知识为起点，适用的对象是学有余力或对该学科有兴趣的学生；编写的依据是各学科竞赛大纲，同时兼顾新课程标准教材，对竞赛涉及的课外知识给予适当补充，不同层次的学生可以合理取舍。

二是作者阵容强大。作者队伍既有来自一线的资深特级教师、金牌教练，也有来自高等学府的命题研究专家、命题专家，还有来自国家层面上的国家级教练、领队。

鉴于时间仓促，书中定有不少纰漏，请读者批评指正。

2009 年 3 月

目录 CONTENTS

第 1 讲　分数的简便计算

在整数计算时，正确、熟练地运用结合律、交换律、分配律，能简化计算。那么，对分数计算来说也是如此。

例 1　计算：$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$。

解　原式$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}$

$=\frac{3}{10}$

点评　简化本题计算的关键是：能熟练地看出$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$与$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)$都等于$\frac{1}{12}$。

做一做　$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$　（**答案**：$\frac{1}{2}$）

例 2　计算：$342\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}$

解　原式$=\left(342+\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{9}$

$=342\times\frac{7}{9}+\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}$

$=38\times7+\frac{1}{3}$

$=266\frac{1}{3}$

点评　这里充分利用了 342 能被 9 整除这一性质。

做一做　计算：$256\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}$　（**答案**：$48\frac{1}{8}$）

例 3　计算：$123\frac{456}{789}\div2$

解　原式$=\left(122+1\frac{456}{789}\right)\div2$

$=61+\frac{152+263}{263}\div2$

$=61+\frac{152+263}{263\times2}$

$=61\frac{415}{526}$

点评　整数部分与分数拆开，再用分配律使计算更简便。

做一做　计算：$67\frac{18}{29}\div 2$　（答案：$33\frac{47}{58}$）

例 4　计算：$\left(6\frac{6}{7}-3\frac{9}{13}\right)\div\left(3\frac{3}{7}-2\frac{2}{11}\right)\div 2\frac{7}{13}$

解　原式 $=\left(6-3+\frac{6\times 13-9\times 7}{7\times 13}\right)\div$

$$\left(3-2+\frac{3\times 11-2\times 7}{7\times 11}\right)\div 2\frac{7}{13}$$

$$=\frac{3\times 7\times 13+6\times 13-9\times 7}{7\times 13}\div\frac{7\times 11+3\times 11-2\times 7}{7\times 11}\div\frac{2\times 13+7}{13}$$

$$=\frac{9\times 32}{7\times 13}\div\frac{2\times 48}{7\times 11}\div\frac{33}{13}=\frac{9\times 32}{7\times 13}\times\frac{7\times 11}{2\times 48}\times\frac{13}{33}$$

$$=1$$

点评

做乘除法时，让分子或分母保持乘积的形式，常常易于约分。

做一做　计算：$333\frac{111}{112}\div 37\times\frac{56}{81}$　（答案：$6\frac{13}{54}$）

例 5　如果 $12+\left[\frac{2}{5}\times 0.75+\left(\frac{1}{2}+\square\right)\times 3\right]\div 0.3=98$，那么方框代表什么数？

解　$\left[\frac{2}{5}\times 0.75+\left(\frac{1}{2}+\square\right)\times 3\right]\div 0.3=98-12$

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\square\right)\times 3=86\times\frac{3}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\square\right)\times 3=86\times\frac{3}{10}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\square=\left(\frac{86\times 3}{10}-\frac{3}{10}\right)\div 3$$

$$\square=\frac{85\times 3}{10}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=8$$

点评

做完这道题就会发现，我们进行的次序与原来运算次序是颠倒的。原来是“先乘除，后加减”，现在是“先加减，后乘除”；原来是先去小括号，现在是先去中括号，再去小括号。因此，我们称其为“倒过来计算”。但是有些项不影响方框，还是可以按原来的次序先算出结果。

做一做　如果 $2\frac{2}{3}\div\square\times\frac{3}{10}=1$，那么方框中代表什么数呢？（答案：$\frac{4}{5}$）

基础训练

1. 计算：$\left(2\frac{2}{5}+1\frac{1}{3}\times 5\right)\div 3\frac{2}{5}-1\frac{1}{3}$

2. 计算：$1\frac{4}{17}\times\left(2\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+17\frac{11}{12}\div\frac{17}{21}$

3. 计算：$1+10+4\frac{10}{35}+2\frac{24}{63}+1\frac{21}{99}+1\frac{4}{33}=$ ________。

4. 计算：$4\times5\frac{3}{4}+5\times6\frac{4}{5}+6\times7\frac{5}{6}+7\times8\frac{6}{7}+8\times9\frac{7}{8}=$ ________。

5. 计算：$1-\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}\times\left[1-\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\right]\right\}=$ ________。

6. 计算：$\left[\left(5\frac{1}{4}-4.25\right)\times\frac{5}{8}\right]\div\frac{3}{8}+3.3\div1\frac{5}{6}=$ ________。

7. 计算：$166\frac{1}{20}\div41$

冲击金牌

8. $1\frac{3}{7}\times(3\frac{1}{13}-1\frac{9}{11})\times0.7\times28\frac{3}{5}$

9. $(2890+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{7}{10})\div(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{7}{10})$

10. $7.8\div\left[2\frac{2}{3}\times\left(1\frac{5}{8}+\square\right)-1.1\right]-\frac{2}{15}\div\frac{2}{3}=1\frac{4}{5}$，求方框中填的数。

第 2 讲　分数的大小比较

基本性质：

(1) 若 $a>b$，则 $b<a$；

(2) 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

(3) 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；

(4) 若 $a>b>0$，则 $1/a<1/b$。

基本方法：

(1) 如果两个分数分母相同，分子大的分数较大；

(2) 如果两个分数分子相同，分母小的分数较大；

(3) 假分数大于真分数。

例 1　将下列分数用"<"连接起来。

$$\frac{10}{17},\frac{12}{19},\frac{15}{23},\frac{20}{33},\frac{60}{37}$$

解　将分子化为同分子 60，那么分母越小，分数值越大。

因为　$\frac{10}{17}=\frac{60}{102},\frac{12}{19}=\frac{60}{95},\frac{15}{23}=\frac{60}{92},\frac{20}{33}=\frac{60}{99},\frac{60}{37}$

所以　$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{60}{37}$

点评

如果相比较的每个真分数的分子与分母相差一定，那么分母越大，分数值越大。假分数则反之。

做一做　把下列分数 $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{12}$ 按从小到大的顺序排列。（**答案：**$\frac{1}{2}<\frac{7}{12}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$）

例 2　把下列分数用">"连接起来。

$$\frac{5}{9},\frac{9}{13},\frac{21}{25},\frac{99}{103},\frac{15}{19},\frac{67}{71}$$

解　$99/103>67/71>21/25>15/19>9/13>5/9$

点评

分子与分母相差为 4，分母越大，分数值越大。

做一做　比较分数 $\frac{34331279}{34331281}$ 与 $\frac{51496919}{51496822}$ 的大小　（**答案：**$\frac{34331279}{34331281}<\frac{51496919}{51496822}$）

例 3　比较下面两分数的大小。

$$\frac{555}{6666} \text{ 与 } \frac{5555}{666666}$$

解　$\frac{555}{6666}$ 可化为 $\frac{5\times111}{6\times1111}=\frac{5\times1110}{6\times11110}$

$\frac{5555}{66666}$ 可化为 $\frac{5\times1111}{6\times11111}$

因为$\frac{1110}{11110}<\frac{1111}{11111}$,所以$\frac{555}{6666}<\frac{5555}{66666}$

做一做 比较$\frac{71}{125}$与$\frac{23}{50}$的大小 (**答案**:$\frac{71}{125}>\frac{23}{50}$)

例 4 下列 5 个数中,哪个最小?

A. (△－1)/△

B. (△－2)/△

C. (△－2)/(△＋1)

D. (△－3)/(△＋2)

E. (△－4)/(△＋1)

点评

充分运用:

(1) 如果两个分数分母相同,分子大的分数较大;

(2) 如果两个分数分子相同,分母小的分数较大。

解 A 与 B 相比较,分母相同,分子大的分数值大,所以$A>B$;B 与 C 相比较,分子相同,分母小的分数值大,所以 $B>C$;D 与 E 相比较,两个真分数的分子与分母差一定,分母大的分数值大,故 $D>E$;C 与 E 相比较,分母相同,看分子,$C>E$。故最小的数是 E。

做一做 请比较下列三个分数的大小:$\frac{37}{221}$,$\frac{27}{221}$,$\frac{37}{211}$ (**答案**:$\frac{27}{221}<\frac{37}{221}<\frac{37}{211}$)

例 5 比较 $\frac{4443}{5554}$,$\frac{5557}{6668}$,$\frac{6668}{7779}$ 三个分数的大小。

点评

先求出它们的倒数,根据倒数越大,原分数反而越小的道理来进行比较。

解 $\frac{4443}{5554}$ 的倒数为$\frac{5554}{4443}=1+\frac{1111}{4443}$

$\frac{5557}{6668}$ 的倒数为$\frac{6668}{5557}=1+\frac{1111}{5557}$

$\frac{6668}{7779}$ 的倒数为$\frac{7779}{6668}=1+\frac{1111}{6668}$

比较三个倒数的大小,都是 1 加上一个分子是 1111 的分数,由于$\frac{1111}{4443}>\frac{1111}{5557}>\frac{1111}{6668}$,也就是$\frac{5554}{4443}>\frac{6668}{5557}>\frac{7779}{6668}$,所以$\frac{4443}{5554}<\frac{5557}{6668}<\frac{6668}{7779}$

做一做 比较$\frac{7777775}{7777777}$与$\frac{6666661}{6666663}$的大小 (**答案**:$\frac{7777775}{7777777}>\frac{6666661}{6666663}$)

基础训练

1. 有 6 个数,0.42,0.424,$\frac{3}{7}$,$\frac{11}{26}$,$\frac{26}{61}$ 是其中的五个,已知从小到大排列的第三个数是$\frac{11}{26}$,那么从大到小排列的第三个数是几?

2. 比较分数 $a=\frac{1111401}{22222764}$ 与 $b=\frac{1111361}{22222724}$ 的大小。

3. 在 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{4}{5}$ 之间，分母是 30 的最简分数有几个？

4. 比 $\frac{2}{7}$ 大，比 $\frac{1}{3}$ 小，分子为 17 的分数有几个？

5. 分子是 3，但分数值比 $\frac{7}{65}$ 小，却与 $\frac{7}{65}$ 最接近的分数是哪个？

6. 如果 $\frac{12}{29}<\frac{70}{?}$，那么?中应填什么整数？(使 $\frac{70}{?}$ 的值为最小)

7. 有五个数：$\frac{9}{5}$、$\frac{12}{7}$、$\frac{27}{17}$、$\frac{36}{19}$、$\frac{54}{29}$，其中最大的数是________，最小的数是________。

冲击金牌

8. 如果 $\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$，那么 a、b、c、d 中最大的是______，最小的是________。

9. 比较下面两个数的大小：

$A=2\div3\div(4\div5)\div(6\div7)$

$B=2\div[3\div(4\div5\div6)\div7]$

10. 下面给出 6 个分数算式：$\frac{3}{7}+\frac{6}{24}$，$\frac{3}{8}+\frac{6}{24}$，$\frac{3}{9}+\frac{8}{25}$，$\frac{3}{10}+\frac{9}{25}$，$\frac{3}{11}+\frac{10}{25}$，$\frac{3}{12}+\frac{11}{25}$，其中哪一个计算结果最小？并求出它的值。

第 3 讲　分数的拆项求和

在各类数学竞赛试题中，有一类数目庞大，项数繁多的分数(式)求和题，让人望而生畏。但只要仔细分析就会发现每一个项都可以拆成两个项，这一拆项可使正负两项抵消，便可使题目轻易得解。

把一个分数拆成两个分数之差，给求和带来相互抵消的方便。如果分子是 1，分母是一个整数，它能分解成两个连续自然数的乘积，那么就可以进行如下的拆分：

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$　　$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$　　$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

例 1　计算：$\frac{1}{1985\times1986}+\frac{1}{1986\times1987}+\frac{1}{1987\times1988}+\cdots+\frac{1}{2006\times2007}+\frac{1}{2007\times2008}+\frac{1}{2008\times2009}+\frac{1}{2009}$

分析　$\frac{1}{1985\times1986}=\frac{1}{1985}-\frac{1}{1986}$

$\frac{1}{1986\times1987}=\frac{1}{1986}-\frac{1}{1987}$

$\frac{1}{1987\times1988}=\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}$

……

$\frac{1}{2006\times2007}=\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}$

$\frac{1}{2007\times2008}=\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}$

$\frac{1}{2008\times2009}=\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}$

点评

像这样在计算分数的加、减时，先将其中的一些分数做适当的拆分，使得其中一部分分数可以相互抵消，从而使计算简化的方法，我们称为裂项法。

上面 12 个式子的右面相加时，很容易看出有许多项一加一减正好相互抵消变为 0，这一来问题解起来就十分方便了。

解　$\frac{1}{1985\times1986}+\frac{1}{1986\times1987}+\frac{1}{1987\times1988}+\cdots+\frac{1}{2006\times2007}+\frac{1}{2007\times2008}+\frac{1}{2008\times2009}+\frac{1}{2009}=\frac{1}{1985}-\frac{1}{1986}+\frac{1}{1986}-\frac{1}{1987}+\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}+\cdots+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}=\frac{1}{1985}$

做一做　$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2007\times2008}+\frac{1}{2008\times2009}$　(答案：$\frac{2008}{2009}$)

例 2 计算：$\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$

分析 $\frac{1}{42}=\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$，$\frac{1}{56}=\frac{1}{7\times8}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{72}=\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$

$\frac{1}{90}=\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$，$\frac{1}{110}=\frac{1}{10\times11}=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$

解 原式 $=\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}$

$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+$

$\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{6}-\frac{1}{11}$

$=\frac{5}{66}$

点评

当分母没有拆成两个数相乘时，要敏锐地察觉到。

做一做 $\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$ （答案：$\frac{2}{9}$）

例 3 计算：$\frac{1}{10\times12}+\frac{1}{12\times14}+\frac{1}{14\times16}+\frac{1}{16\times18}$

分析 $\frac{1}{10\times12}=(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})\times\frac{1}{2}$，$\frac{1}{12\times14}=(\frac{1}{12}-\frac{1}{14})\times\frac{1}{2}$

$\frac{1}{14\times16}=(\frac{1}{14}-\frac{1}{16})\times\frac{1}{2}$，$\frac{1}{16\times18}=(\frac{1}{16}-\frac{1}{18})\times\frac{1}{2}$

解 原式 $=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)\times\frac{1}{2}+$

$\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{18}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{18}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{45}$

点评

当分母能分解成两个自然数的乘积，这两个自然数的差是 2，也可以进行拆分。

做一做 $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}$ （答案：$\frac{5}{39}$）

例 4 计算：$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

分析 公式的变式

$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n\times(n-1)}$

当 n 分别取 1,2,3,…,100 时，就有

$\frac{1}{1}=\frac{2}{1\times2}$

点评

当分母为前 n 个自然数的和时，利用公式的变式 $\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n\times(n-1)}$ 进行拆分。

$$\frac{1}{1+2}=\frac{2}{2\times3}$$

$$\frac{1}{1+2+3}=\frac{2}{3\times4}$$

$$\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{2}{4\times5}$$

$$\frac{1}{1+2+\cdots+100}=\frac{2}{100\times101}$$

解

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}$$

$$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{99\times100}+\frac{2}{100\times101}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}+\frac{1}{100\times101}\right)$$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{101}\right)=2\times\frac{100}{101}=\frac{200}{101}=1\frac{99}{101}$$

做一做　$\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}+\frac{1}{1+2+3+\cdots+101}$　（答案：$\frac{11}{17}$）

例 5　$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$

分析　因为　$\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}=\frac{3-1}{1\times2\times3}=\frac{2}{1\times2\times3}$

所以　$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)$

同样可得

$$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)$$

$$\frac{1}{3\times4\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)$$

一般地，因为

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

这里 n 是任意一个自然数。

> **点评**
> 利用这一等式
> $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，
> 采用裂项法便能较快地求出结果。

解

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{99\times100}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4950-1}{9900}=\frac{1}{2}\times\frac{4949}{9900}=\frac{4949}{19800}$$

做一做 $\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{97\times98\times99}$ （答案：$\frac{404}{4851}$）

基础训练

1. 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$

2. 计算：$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$

3. 计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}$

4. 计算：$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\frac{1}{13\times16}$

5. 计算：$1\frac{1}{10}+3\frac{1}{40}+5\frac{1}{88}+7\frac{1}{154}+9\frac{1}{238}+11\frac{1}{340}$

6. 计算：$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{17\times18\times19\times20}$

冲击金牌

7. 计算：$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66}+\frac{1}{78}+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{120}$

8. 计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{1993\times1995}+\frac{1}{1995\times1997}$

9. 计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{97\times99}+\frac{1}{98\times100}$

10. 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+3}+\frac{1}{2+3+4}+\frac{1}{2+3+4+5}+\cdots+\frac{1}{2+3+4+\cdots+200}$

第4讲 估 算

估算是运用各种运算技巧所进行的快速近似计算，许多数学问题可以通过估算界定范围，然后把满足条件的一一列举出来。常采用的方法有直接取近似值和通过放大与缩小的方法确定范围，然后枚举等等

例1 有13个自然数，它们的平均值精确到十分位是26.9。那么，精确到百分位是多少？

分析与解 13个自然数之和必然是整数，却不是13的整数倍，所以平均值是小数。由题意知，

26.85≤平均值<26.95，所以13个数之和必然不小于26.85的13倍，而小于26.95的13倍。

$26.85\times13=349.05$，

$26.95\times13=350.35$。

因为在349.05与350.35之间只有一个整数350，所以13个数之和是350。

$350\div13=26.923\cdots$

当精确到百分位时，是26.92。

点评

方法可称为"放缩法"。对于一个数，如果不知道它的确切数值，那么可以根据题设条件，适当地将它放大或缩小，再进一步确定它的具体数值。

做一做 老师在黑板上写了13个自然数，让小明计算平均数（保留两位小数），小明计算的答案是12.43，老师说最后一位数字错了，其他的数字都对，正确答案应该是什么？（**答案：**12.46）

例2 求下式的整数部分：

$$1.22\times8.03+1.23\times8.02+1.24\times8.01$$

分析与解 在1.22×8.03，1.23×8.02与1.24×8.01中，各式的两个因数之和都相等。当两个数的和一定时，这两个数越接近，这两个数的乘积越大，于是得到

$$1.22\times8.03<1.23\times8.02<1.24\times8.01。$$

因为 $1.22\times8.03>1.22\times8$，

所以 原式$>1.22\times8\times3=29.28$；

因为 $1.24\times8.01<1.25\times8$，

所以 原式$<1.25\times8\times3=30$。

由29.28<原式<30知，原式的整数部分是29。

点评

四舍五入的方法是取近似值最常用的方法。但在实际问题中，一定要注意灵活运用，特别要注意有些问题不宜使用四舍五入的原则。

做一做 求下式$0.22\times8.03+0.23\times8.02+0.24\times8.01$的整数部分。（**答案：**5）