配合上海二期课改

新教材辅导与训练

高中三年级用

黄汉禹　杨安澜　主编
本册主编　吕宝兴

数学

上海科学技术出版社

新教材

数学辅导与训练

高中三年级用

黄汉禹 杨安澜 主编
本册主编 吕宝兴

上海科学技术出版社

内 容 提 要

《新教材数学辅导与训练 高中三年级用》一书根据上海市二期课改数学学科课程标准编写而成.全书分知识提要,例题选讲,单元练习,本章测试,近年高考题选等部分。本书通过归纳各个知识要点,指导各类题的解法,让学生牢固掌握数学基础知识,提高学生分析问题和解决问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

新教材数学辅导与训练.高中三年级/黄汉禹,杨安澜主编;本册主编 吕宝兴—上海:上海科学技术出版社,2008.7(2009.1重印)

ISBN 978-7-5323-9403-6

Ⅰ.新… Ⅱ.①黄…②杨…③吕… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第057523号

责任编辑 陈 愈 周玉刚

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

(上海钦州南路71号 邮政编码200235)

新华书店上海发行所经销 常熟市文化印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 22.25 字数 529 000

2008年7月第1版 2009年1月第2次印刷

印数:5 241—8 740

ISBN 978-7-5323-9403-6

定价:30.00元

编写说明

本书以上海中小学课程教材改革委员会编制的《二期课改数学学科课程标准》和据此编著的教材为依据，内容紧密配合课本.

本书始于20世纪90年代的"一期课改"后期.由于"一期课改"中小学数学教材的成功编著，数学教材编写组曾于1994年获得了"苏步青教育奖"，在社会上取得良好声誉.与这套教材配套，由上海中学、市西中学和控江中学等三所市重点中学的老师们编写的《数学辅导与训练》，以其"辅导得当，训练有素"而深受广大师生青睐.使用十多年来，已经5次大改版，成为教辅市场中的一个重要品牌.为适应当前"二期课改"的教学需要，我们在总结各版优点的基础上，重新修订了这套《新教材数学辅导与训练》，旨在帮助学生理解"二期课改"新教材，克服学习上的困难，增长阅读能力和自学能力，提高学科素质，及时消化所学的知识内容(基本知识、基本技能和相关的重点、难点)，并为学有余力的学生提供一些深、广度略高于《课程标准》与教材内容的学习资料.为更好地理解教材精神，本书每章在结构上由知识提要、例题选讲和有效练习等部分组成.

【知识提要】 根据《课程标准》和据此编写的新教材，简明扼要地归纳每章的"双基"概要，让读者一目了然地了解本章内容的精粹.

【例题选讲】 这是本书的核心栏目.根据教学要求，精选例题，力求使每个例题都有其明显的学习背景.每个例题视其选题意图、难易程度，分别设置分析、解(包括多种典型解法)，解后恰如其分地进行概括总结，用"说明"、"注意"、"思考"等项目加以阐述.这里"说明"是指通过本例阐明解题的一般规律，总结概括解题的一般思路、方法；"注意"是指出解题时容易出错或疏忽的地方；"思考"是指将本例题的条件和结论改变，作适当的引伸，形成新题，以启发思考.总之，通过解题指导，让读者能举一反三，提高解题能力.

【有效练习】 有效的数学学习，一要切实掌握"双基"和数学思想方法，二要进行有效练习.本书有效练习不仅体现在基础训练方面，还针对每单元内容编制相关的练习题，章后编制各章测试(A卷、B卷)，这样可帮助读者巩固所学知识，加深理解，熟练技能，全面掌握本章基本知识、基本技能和思想方法及其应用.最后收录了相关近年各省高考试题，以便读者随时把握自己的学习水平.

这种有效练习必将有利于读者数学成绩的提高.

多年来,参与本套书各数学分册编写的单位有上海中学、市西中学、控江中学、市三女中和曹杨二中等市重点中学,作者们对书稿的体例反复斟酌,力求体现以培养创新能力为核心的素质教育精神,全书渗透了丰富的教学经验,一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛.编写过程中始终得到各校领导的大力支持,在此我们表示深深的谢意.

本套书各数学分册由黄汉禹、杨安澜主编,邹一心、周玉刚主审.为全面提高本书质量,各册专设分册主编,本册由吕宝兴任主编.本书由吕宝兴统稿,第一、二、三章由徐岳灿编写,第四、八、十三章由胡忠宝编写,第五、十二章由周君编写,第六、七、九章由王永庆编写,第十、十一章由何维安编写.为初、高中师生编写一套适用而又有指导意义的数学辅导书,是我们一贯的心愿,也是当前数学教学的需要.对于我们所作的努力和尝试,诚挚地期望广大读者给予批评指正.

2008 年 7 月

目　　录

第一章　集合与函数

一、集合与命题

知识提要

1. 集合中的元素具有三个特性：确定性、互异性和无序性. 元素与集合是从属关系，只用符号“$\in$”或“$\notin$”表示.

2. 集合的主要表示方法有两种：列举法与描述法. 要注意恰当使用.

3. 集合与集合之间的关系，可以将$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$关系与实数的$\leqslant$、$<$、$=$关系进行类比，将集合运算“$\cap$”，“$\cup$”与实数的“$\times$”，“$+$”运算进行类比，发现集合的交、并运算也满足交换律、结合律和分配律.

4. 命题具有四种形式. 注意四种形式的书写与相互之间的关系，关键是要分清命题的条件与结论，建议写成“如果……，那么……”的形式.

5. 充要条件的判断与证明，要注意方法的合理使用.

例题选讲

1. 集合的概念与运算

例 1　(1) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$，

$B=\{y\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$；

(2) 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$，

$N=\{(x,y)\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$，求 $M\cap N$.

解　(1) $A=\{y\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$，表示 $y=x^2-2x-1$ 的值域. 由 $y=x^2-2x-1\geqslant-2$，得 $A=[-2,+\infty)$. 同理，得 $B=(-\infty,16]$.

所以　$A\cap B=[-2,16]$.

(2) $M=\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1, x\in\mathbf{R}\}$ 表示抛物线 $y=x^2-2x-1$ 上的点集，因此 $M\cap N$ 表示同时在曲线 $y=x^2-2x-1$ 与 $y=-x^2+2x+15$ 上的点集，解方程组

$$\begin{cases}y=x^2-2x-1,\\ y=-x^2+2x+15,\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=4,\\ y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=7.\end{cases}$

所以　$M\cap N=\{(4,7),(-2,7)\}$.

说明 用描述法表示集合时，要弄清集合中元素的特征方式，如$\{y\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$，$\{x\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$，$\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{R}\}$表示三个不同的集合. 其中起到关键作用的是代表元素的特性. 这三个集合分别表示函数$y=\sqrt{1-x^2}$的值域，定义域以及函数表示的图像(上半个单位圆)上的点所组成的集合.

例 2 已知集合$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-2}{x-1}=a+2,x、y\in\mathbf{R}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid(a^2-4)x+(a-2)y=16,x、y\in\mathbf{R}\}$，若$A\cap B=\varnothing$. 求$a$的值.

解 当$a^2-4=a-2=0$，即$a=2$时，$B=\varnothing$，显然满足$A\cap B=\varnothing$；

当集合A与B表示的直线互相平行且不重合时，即

$$a+2=-\frac{a^2-4}{a-2}.$$

得$a=-2$时，$A\cap B=\varnothing$.

由于集合A表示的不是完整的一条直线，需排除点(1,2)，因此当两直线的交点坐标为(1,2)时，仍有$A\cap B=\varnothing$. 即

$$(a^2-4)+2(a-2)=16,$$

得$a=-6$或$a=4$.

综上所述：当$a=\pm2$，$a=-6$或$a=4$时，$A\cap B=\varnothing$.

说明 (1) 本例采用数形结合思想求解，容易使人理解. 但要注意$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-2}{x-1}=a+2,x、y\in\mathbf{R}\right.\right\}$与$A'=\{(x,y)\mid y-2=(a+2)(x-1)\}$的区别. 后者表示过点(1,2)，斜率为$a+2$的一条直线上所有点的集合，但前者需要排除点(1,2).

(2) 必须注意空集在集合问题中的特殊地位，如本例中当$B=\varnothing$时显然符合题意. 另外空集在实际问题中有多种可能的表现方式，在接下去的例题或习题中将充分展示给大家.

例 3 已知集合$A=\{x\mid x^2-2x-24<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 实数a在什么取值范围内时，$A\cap B=\varnothing$；

(2) 实数a在什么取值范围内时，$B\subsetneqq A$.

解 (1) $A=\{x\mid x^2-2x-24<0\}=(-4,6)$.

不等式$x^2-4ax+3a^2<0$，即$(x-3a)(x-a)<0$.

当$a>0$时，$B=(a,3a)$；当$a<0$时，$B=(3a,a)$；当$a=0$时，$B=\varnothing$.

因此，若$a>0$，则当$a\geqslant6$时，$A\cap B=\varnothing$；若$a<0$，当$a\leqslant-4$时，$A\cap B=\varnothing$；当$a=0$时，显然成立. 综上所述：实数a的取值范围为$a\geqslant6$，$a\leqslant-4$或$a=0$.

(2) 由$B\subsetneqq A$，得

当$a>0$时，$-4<a<3a\leqslant6$ 或 $-4\leqslant a<3a<6$，即$0<a\leqslant2$；

当$a<0$时，$-4<3a<a\leqslant6$ 或 $-4\leqslant3a<a<6$. 解不等式组，得$-\dfrac{4}{3}\leqslant a<0$.

当$a=0$时，$B\subsetneqq A$.

综上所述，实数a的取值范围为$\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$.

例 4 已知$f(x)=x^2+ax+b$，$a、b\in\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 写出集合A与B之间的关系，并证明；

(2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，用列举法表示 B.

解 (1) 在集合 A 中任取一个元素 x_0，因为 $x_0\in A$，即 x_0 满足 $x_0=f(x_0)$. 那么，

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

即 $x_0=f(f(x_0))$，所以 $x_0\in B$. 因此 $A\subseteq B$.

(2) 由 $f(x)=x$，得 $x^2+ax+b=x$，

即 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有两解 $x_1=-1, x_2=3$.

由韦达定理，得 $\begin{cases}-1+3=-(a-1),\\-1\times 3=b.\end{cases}$

解方程组，得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-3,\end{cases}$ $\therefore$ $f(x)=x^2-x-3$.

$\therefore$ $f(f(x))=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

又当 $x\in B$ 时，$x=f(f(x))$，得 $x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

可化为 $(x^2-x-3)^2=x^2$，

即 $x^2-x-3=x$ 或 $x^2-x-3=-x$.

解方程，得 $x=-1,3$ 或 $\pm\sqrt{3}$. 即 $B=\{-1,3,\pm\sqrt{3}\}$.

说明 本例在考虑 A 与 B 的关系时，一般用 $A\subseteq B$ 表示. 不能用 $A\subsetneqq B$ 表示. 例如当 $f(x)=x^2$ 时，$A=B=\{0,1\}$.

2. 命题的四种形式和充要条件

例 5 设命题甲：函数 $y=(1-c)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；命题乙：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果命题甲与命题乙至少有一个命题为真命题，求 c 的取值范围.

解 函数 $y=(1-c)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，即 $0<1-c<1$.

解不等式，得 $0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

记 $f(x)=x+|x-2c|$，

$$f(x)=\begin{cases}2x-2c, & \text{当 } x\geqslant 2c \text{ 时；}\\ 2c, & \text{当 } x<2c \text{ 时.}\end{cases}$$

只需求出满足 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值恒大于 1 的 c 的取值范围即可.

$f(x)_{\min}=2c>1$，得 $c>\dfrac{1}{2}$.

因为命题甲与命题乙至少有一个命题为真命题，所以 c 的取值范围满足 $(0,1)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)=(0,+\infty)$ 即可.

所以，所求 c 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

说明 遇到"至少"问题，可采用两种做法. 一是直接法. 写出每个命题为真时的条件，然后取各自的并集即可；二是间接法，考虑问题的反面. 即所有命题均为假的条件，然后再取其补集即可.

例 6 对于下列各组语句，写出使它成立的条件(充分不必要条件，必要不充分条件，充要条件，每种条件只要求写出一个).

(1) 集合 A 是集合 $B=\{1,2\}$ 的非空真子集；(2) $a>b$；

(3) 关于 x 的实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根.

解 (1) 充分不必要条件是：① $A=\{1\}$；② $A=\{2\}$；

必要不充分条件是：① $A=\varnothing$；② $A\neq B$.

充要条件是：$A=\{1\}$或$A=\{2\}$.

(2) ∵ $\sqrt{a}>\sqrt{b}>0\Rightarrow a>b>0$，但$a>b\nRightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，

∴ $\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$是$a>b$的充分不必要条件.

∵ $a>b\Rightarrow(a-b)^2>0\Rightarrow a^2+b^2>2ab$，但$a^2+b^2>2ab\nRightarrow a>b$，

∴ $a^2+b^2>2ab$是$a>b$的必要不充分条件.

∵ $\sqrt{a-b}>0\Leftrightarrow a-b>0\Leftrightarrow a>b$，∴ $\sqrt{a-b}>0$是$a>b$的充要条件.

(3) ∵ 当$a=0,b\neq0$时，$ax^2+bx+c=0$是一次方程，有实数解；但方程$ax^2+bx+c=0$有实数解时，未必$a=0$；

∴ $a=0,b\neq0$是方程$ax^2+bx+c=0$有实数解的充分不必要条件.

∵ $ax^2+bx+c=0$有实根，必有$a^2+b^2\neq0$，但$a^2+b^2\neq0$不一定有实根，如$a=2,b=0,c=2$，方程无实根，$a^2+b^2\neq0$是方程$ax^2+bx+c=0$有实根的必要不充分条件.

∵ 当$a^2+b^2\neq0,b^2-4ac\geqslant0$时，要么$a=0,b\neq0$，要么$a\neq0,b^2-4ac\geqslant0$，方程$ax^2+bx+c=0$有实数解；当方程$ax^2+bx+c=0$有实数解时，要么$a=0,b\neq0$，要么$a\neq0,b^2-4ac\geqslant0$，即$a^2+b^2\neq0,b^2-4ac\geqslant0$是$ax^2+bx+c=0$有实数解的充要条件.

单元练习(A)

一、选择题

1. 满足$\{1,2\}\subset X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$X$的个数为(　　).

(A) 4个　　(B) 6个　　(C) 7个　　(D) 8个

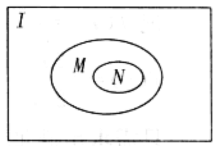
2. 设全集$U=\{a,b,c,d,e\}$，集合$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$是(　　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$　　(C) $\{a,c\}$　　(D) $\{b,e\}$

3. 已知集合I,M,N的关系如图，则I,M,N的关系为(　　).

(A) $\complement_I M\supseteq\complement_I N$　　(B) $M\subseteq\complement_I N$

(C) $\complement_I M\subseteq\complement_I N$　　(D) $M\supseteq\complement_I N$



(第3题)

4. 给出以下四个命题：(1) 若$x^2-3x+2=0$，则$x=1$或$x=2$；(2) 若$-2\leqslant x<3$，则$(x-2)(x-3)\leqslant0$；(3) 若$x=y=0$，则$x^2+y^2=0$；(4) 若$x、y\in\mathbf{N}^*$，$x+y$是奇数，则x,y中一个是奇数，一个是偶数，则(　　).

(A) (1)的逆命题为真　　(B) (2)的否命题为真

(C) (3)的逆否命题为假　　(D) (4)的逆命题为假

5. 已知$A=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\dfrac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\sin\dfrac{2m-3}{6}\pi,m\in\mathbf{Z}\right\}$，那么$A$和$B$的关系是(　　).

(A) $A\subset B$　　(B) $A\supset B$　　(C) $A=B$　　(D) $A\neq B$

二、填空题

1. 某班学生共45人，一次摸底考试：数学20人得优，语文15人得优，这两门都不得优的20人，则这两门都得优的人数为______.

2. 已知集合$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid 0<x-m<9\}$，若$A\cap B\neq\varnothing$，则实数m的取值

范围是$\underline{\qquad\qquad}$.

3. 设 $M=\{(x,y)\mid mx+ny=4\}$，且 $\{(2,1),(-2,5)\}\subset M$，则 $m=$$\underline{\qquad}$，$n=$$\underline{\qquad}$.

4. 已知集合 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x\mid x=a\cdot b,a、b\in A\}$，则集合 B 的子集个数为$\underline{\qquad}$.

5. "$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$"是"$b^2=ac$"的$\underline{\qquad\qquad\qquad}$条件.

6. 已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$N=[0,5)$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=$$\underline{\qquad\qquad}$.

7. 已知真命题"$a\geqslant b\Rightarrow c>d$"和"$a<b\Rightarrow e\leqslant f$"，则"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的$\underline{\qquad\qquad}$条件.

8. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$，$g(x)$ 均为二次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组$\begin{cases}f(x)<0,\\ g(x)<0\end{cases}$的解集可用 P、Q 表示为$\underline{\qquad\qquad}$.

三、解答题

1. 已知 $U=\mathbf{R}$ 且 $A=\{x\mid x^2-5x-6<0\}$，$B=\{x\mid |x-2|\geqslant 1\}$. 求

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cup B$；　(3) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

2. 设集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{32}\leqslant 2^{-x}\leqslant 4\right.\right\}$，$B=\{x\mid x^2-3mx+2m^2-m-1<0\}$.

(1) 当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，求 A 的非空真子集的个数；

(2) 若 $B=\varnothing$，求 m 的取值范围；　(3) 若 $A\supseteq B$，求 m 的取值范围.

3. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{2x+1}\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x^2+1}\}$，$C=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2+1}\}$，试讨论集合 A,B,C 三者之间的关系.

4. 设非空集合 $A=\{x\mid x^2+(b+2)x+b+1=0\}$，$b\in\mathbf{R}$，求集合 A 中所有元素的和.

5. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，集合 $C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k,b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论.

单元练习(B)

一、选择题

1. 设 $A=\{(x,y)\mid |x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1,2\}$，则必有(　　).

(A) $A\supset B$　(B) $A\subset B$　(C) $A=B$　(D) $A\cap B=\varnothing$

2. 集合 $M=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $N=\{x\mid y=\sqrt{3-x^2}\}$，则 $M\cap N$ 等于(　　).

(A) $\{(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},1)\}$　(B) $[0,\sqrt{3}]$

(C) $[-1,\sqrt{3}]$　(D) $\varnothing$

3. "$a^2+b^2>0$"是"$ab\neq 0$"的(　　).

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分又不必要条件

4. 集合 A,B,C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则成立的等式是(　　).

(A) $B=C$　(B) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap C$

(C) $A\cap B=A\cap C$　(D) $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=A\cap\complement_{\mathbf{R}}C$

5. 设全集为实数集 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，集合 $P=\{x\mid f(x)\neq 0\}$，$M=\{x\mid g(x)\neq 0\}$，那么集合 $\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$ 等于(　　).

(A) $\complement_{\mathbf{R}}P\cap\complement_{\mathbf{R}}M$　(B) $\complement_{\mathbf{R}}P\cup M$　(C) $P\cup\complement_{\mathbf{R}}M$　(D) $\complement_{\mathbf{R}}P\cup\complement_{\mathbf{R}}M$

6. 与命题“若 $m\in M$,则 $n\notin M$”等价的命题是(　　).

(A) 若 $m\notin M$,则 $n\notin M$　　(B) 若 $n\notin M$,则 $m\in M$

(C) 若 $m\notin M$,则 $n\in M$　　(D) 若 $n\in M$,则 $m\notin M$

二、填空题

1. 已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$,$N=\{1,a^2-6a+10,3\}$,$M\cap N=\{2,3\}$则 a 的值是______.

2. 已知命题 p:不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$,命题 q:$f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数,若“p 或 q”为真命题,“p 且 q”为假命题,则实数 m 的取值范围是________________.

3. 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid y=(1-2k^2)x+5\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 $k=$______.

4. 某班级 50 人,开设英语和日语两门外语课,规定每人至少选学一门,估计报英语的人数占全班 80%到 90%之间,报日语的人数占全班 32%到 40%之间,设 M 是两门都学的人数的最大值,m 是两门都学的人数的最小值,则 $M-m=$__________.

5. 同时满足(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$;(2) 若 $a\in M$,则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有______个.

6. 对于非空集合 M 和 N,把所有属于 M 但不属于 N 的元素形成的集合称为 M 与 N 的差集,记作 $M-N$,那么 $M-(M-N)$等于________.

7. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$,$B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$,其中 $r>0$,若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,则 r 的值是__________.

8. 已知函数 $f(x)=x|x|+px+q(x\in\mathbf{R})$,给出下列四个命题:(1) $f(x)$为奇函数的充要条件是 $q=0$;(2) $f(x)$的图像关于点$(0,q)$对称;(3) 当 $p=0$ 时,方程 $f(x)=0$ 的解集一定非空;(4) 方程 $f(x)=0$ 的解的个数一定不超过两个. 其中所有正确命题的序号是______________.

三、解答题

1. 设 $f(x)=x^2+mx+n$,$A=\{x\mid f(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid f(f(x))=x,x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 判断 A 与 B 的关系,并说明理由;　(2) 若 $A=\{-1,2\}$,求 B.

2. 已知正整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$,其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$,$A\cap B=\{a_1,a_4\}$,且 $a_1+a_1=10$,$A\cup B$ 中所有元素之和为 124,求 A.

3. 已知一元二次方程:(1) $mx^2-4x+4=0$;(2) $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0(m\in\mathbf{Z})$,求方程(1)和(2)的根都是整数的充要条件.

4. 设 a,b 是两个实数,$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点的集合. 是否存在实数 a 和 b,使得 $A\cap B\neq\varnothing$与$(a,b)\in C$同时成立?若存在,求出 a,b 的值,若不存在,请说明理由.

二、函数及其性质

知识提要

1. 函数的定义中强调定义域 D 中的任意 x,都有唯一确定的函数值 y 与之对应. 定义域,对应法则与值域是函数的三个要素. 函数主要有三种表示方法,即解析法,列表法与图像法.

2. 函数的性质主要包括定义域、值域、奇偶性、单调性以及函数的最大(小)值.

函数的定义域关于原点对称是此函数为奇函数(或偶函数)的必要条件,函数的奇偶性还体现在其图像具有对称性:奇函数⇔图像关于原点对称,偶函数⇔图像关于 y 轴对称.

函数的单调性要在其定义域 D 内加以研究. 往往可从以下三个方面着手:一是根据函数图像的上升或下降;二是利用定义加以判断;三是利用复合函数的单调性的判别法则.

函数的最大(小)值是一个比较复杂的问题,一般可借助函数的单调性、基本不等式、函数图像等方法加以研究.

3. 反函数的概念要着重理解三点:(1) 对于任意一个函数 $y=f(x)$ 来说,不一定存在反函数,只有是定义域到值域上一一对应的映射所确定的函数才存在反函数;(2) 反函数的定义域与值域分别为原函数的值域与定义域;(3) 互为反函数的两个函数图像关于直线 $y=x$ 对称,其逆命题也成立.

例题选讲

1. 求函数的定义域

由分式的分母不为零、偶次方根的被开方式非负、对数的真数大于零,底数大于零且不等于 1 等,根据给定函数的解析式,列出不等式(组),解不等式(组)所得的解集就是函数的定义域.

例 1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x-2}+\lg(x-1)$ 的定义域.

解 $\begin{cases}5-x^2\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 或 $2<x\leqslant\sqrt{5}$.

所以函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,\sqrt{5}]$.

2. 求函数的值域

例 2 求下列函数的值域:

(1) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$;(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$;(3) $y=7-\sqrt{-x^2+x+1}$;

(4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$;(5) $y=x-2+\sqrt{x-3}$;(6) $y=x-2+\sqrt{3-x}$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$,得 $(2-y)x^2=y+1$,

$\because$ $y\neq 2$, $\therefore$ $x^2=\dfrac{y+1}{2-y}\geqslant 0$. 解不等式,得 $-1\leqslant y<2$. $\therefore$ $y\in[-1,2)$.

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{(x-1+1)^2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$.

$\because$ $x-1+\dfrac{1}{x-1}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,

$\therefore$ $y\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

(3) $\because$ $-x^2+x+1=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$,

$\therefore$ $0\leqslant\sqrt{-x^2+x+1}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\therefore$ $y\in\left[7-\dfrac{\sqrt{5}}{2},7\right]$.

(4) 由 $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$，得 $y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}=\frac{10^{2x}+1-2}{10^{2x}+1}=1-\frac{2}{10^{2x}+1}$.

∵ $10^{2x}+1>1$，∴ $\frac{2}{10^{2x}+1}\in(0,2)$. ∴ $y\in(-1,1)$.

(5) 由定义域可知 $x\geqslant3$，利用函数的单调性，

∴ $x-2+\sqrt{x-3}\geqslant1$，∴ $y\in[1,+\infty)$.

(6) 设$\sqrt{3-x}=t$，则 $x=3-t^2$，且 $t\geqslant0$. 原函数可化为

$$y=3-t^2-2+t=-t^2+t+1.$$

由 $t\geqslant0$，得 $y\leqslant\frac{5}{4}$. ∴ $y\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

说明 本例给出了求值域的几种常用方法：涉及换元法、基本不等式法、有界函数法、单调函数等等. 对于第(4)小题也可用 $10^{2x}=\frac{y+1}{1-y}>0$ 求得. 对于第(1)小题也可用 $y=\frac{2x^2-1}{x^2+1}=2+\frac{-3}{x^2+1}\in[-1,2)$ 求得，或者利用判别式法：原式化为 $(y-2)x^2+y+1=0$，即 $\Delta=-4(y-2)(y+1)\geqslant0$，且 $y\neq2$.

3. 判断函数的奇偶性

例 3 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；

(3) $f(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$；　　(4) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x-3|-3}$；

(5) $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$.

解 (1) $\sqrt{x^2+1}+x>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且

$f(x)+f(-x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_a((\sqrt{x^2+1})^2-x^2)=0$，

即$f(x)=-f(-x)$. ∴ $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数.

(2) 由题意，得 $\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\ x^2-1\geqslant0.\end{cases}$ 即 $x^2=1$. 函数的定义域为 $x=1$ 或-1，此时$f(x)=0$.

所以$f(x)$既是奇函数又是偶函数.

(3) $f(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}=\lg(10^x+1)+\lg10^{-\frac{x}{2}}$

$$=\lg[(10^x+1)\cdot10^{-\frac{x}{2}}]=\lg(10^{\frac{x}{2}}+10^{-\frac{x}{2}}),$$

$x\in\mathbf{R}$，显然$f(x)$为偶函数.

(4) $4-x^2\geqslant0$，即$-2\leqslant x\leqslant2$，此时$|x-3|-3=3-x-3=-x$.

原函数可化为 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{-x}$，$f(x)$为奇函数.

(5) ∵ $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$，

∴ $f(-x)=|-x|\cdot(|-x-2|+|-x+2|)=|x|(|x+2|+|x-2|)=f(x)$.

所以 $f(x)=|x|(|x-2|+|x+2|)$为偶函数.

说明 在判断函数奇偶性时要注意：

(1) 先确定函数定义域. 判断是否关于原点对称是先决条件. 若将第(2)小题改为 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$，其定义域为$\{1\}$，不关于原点对称，因此$f(x)$是非奇非偶函数.