高等学校“学历教育合训”系列教材

随机信号分析与处理简明教程

An Introduction to Random Signal Analysis and Processing

罗鹏飞　张文明　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY　http://www.phei.com.cn

高等学校"学历教育合训"系列教材

随机信号分析与处理简明教程

An Introduction to Random Signal Analysis and Processing

本书内容包括随机信号分析及信号检测与估计两部分的内容，全书共6章，第1章随机变量基础，简要复习了随机变量的理论。第2章随机过程的基本概念，介绍了随机过程的定义、随机过程的概率分布和数字特征、平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度及基于MATLAB的统计分析。第3章随机过程的变换，介绍了变换的基本概念和基本定理、随机过程通过线性系统的分析、随机过程通过非线性系统分析、信号处理的实例：最佳线性滤波器及其应用。第4章典型随机过程，介绍了电子系统中典型的几类随机过程，包括正态随机过程、窄带随机过程和马尔可夫过程。第5章估计理论，介绍了估计的基本概念、贝叶斯估计、最大似然估计、估计量的性能、线性最小均方估计、最小二乘估计和波形估计。第6章检测理论，介绍了假设检验的基本概念、判决准则、复合假设检验、多元假设检验及噪声中信号检测。

本书强调对基本概念的理解，精心设计了一些浅显易懂的例题来说明概念，强调理论与应用的结合，每章的最后都附有习题。

本书可供高等院校电子信息类专业本科生作为教材或教学参考书。

策划编辑：陈晓莉
责任编辑：陈晓莉
封面设计：张 昱

ISBN 978-7-121-08529-1
9 787121 085291 >
定价：20.00 元

高等学校“学历教育合训”系列教材

随机信号分析与处理简明教程

罗鹏飞 张文明 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书内容包括随机信号分析及信号检测与估计两部分的内容，全书共6章，第1章随机变量基础，简要复习了随机变量的理论。第2章随机过程的基本概念，介绍了随机过程的定义、随机过程的概率分布和数字特征、平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度及基于MATLAB的统计分析。第3章随机过程的变换，介绍了变换的基本概念和基本定理、随机过程通过线性系统的分析、随机过程通过非线性系统分析、信号处理的实例：最佳线性滤波器及其应用。第4章典型随机过程，介绍了电子系统中典型的几类随机过程，包括正态随机过程、窄带随机过程和马尔可夫过程。第5章估计理论，介绍了估计的基本概念、贝叶斯估计、最大似然估计、估计量的性能、线性最小均方估计、最小二乘估计和波形估计。第6章检测理论，介绍了假设检验的基本概念、判决准则、复合假设检验、多元假设检验及噪声中信号检测。

本书强调对基本概念的理解，精心设计了一些浅显易懂的例题来说明概念，强调理论与应用的结合，每章的最后都附有习题。

本书可作为高等院校电子信息类专业本科生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析与处理简明教程/罗鹏飞，张文明编著. —北京：电子工业出版社，2009.4
(高等学校"学历教育合训"系列教材)
ISBN 978-7-121-08529-1

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①罗…②张… Ⅲ. ①随机信号－信号分析－高等学校－教材②随机信号－信号处理－高等学校－教材 Ⅳ. TN911.6 TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第039533号

责任编辑：陈晓莉
印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：10.25　　字数：262千字
印　　次：2009年4月第1次印刷
印　　数：4000册　定价：20.00元

前　　言

随机信号分析与处理是研究随机信号的特点及其处理方法的专业基础课，是目标检测、估计、滤波等信号处理理论的基础，在通信、雷达、自动控制、随机振动、图像处理、气象预报、生物医学、地震信号处理等领域有着广泛的应用。随着信息技术的发展，随机信号分析与处理的理论和应用将日益广泛和深入。

本教材是作者在2006年出版的《随机信号分析与处理》（清华大学出版社）教材的基础上，结合近年讲授军队院校学历教育合训类学员“随机信号分析与处理”课程的教学内容编写的一本简明教程。目的是使读者通过本教材的学习，掌握随机信号分析、信号检测与估计的基本概念和方法。本教材的参考学时数为40学时。

本教材在编写思路上，强调对基本概念的阐述，减少烦琐的公式推导过程，通过具体的例子和信号处理应用实例来说明一些抽象难懂的概念。每章最后都给出了一定数量的习题。本教材的习题解答和教学课件可通过作者的网络课程下载或直接向作者本人索取。

全书共6章，第1章随机变量基础，简要复习了随机变量的理论，包括概率的基本术语、随机变量的数字特征和随机变量的函数，这是随机信号分析的基础，此外还介绍了MATLAB中的统计函数。第2章随机过程的基本概念，介绍了随机过程的定义、随机过程的统计描述、平稳随机过程的概念、自相关函数的性质和功率谱，最后介绍了基于MATLAB的统计分析，包括随机过程的产生和特征估计。第3章随机过程的变换，介绍了变换的基本概念和基本定理、随机过程通过线性系统和非线性系统的分析方法；最后给出线性系统分析的实例：最佳线性滤波器及其应用。第4章典型随机过程，介绍了电子系统中典型的几类随机过程，包括正态随机过程、窄带随机过程和马尔可夫过程。第5章估计理论，介绍了估计的基本概念、估计的基本准则、估计量的性能分析，最后简要介绍了波形估计的基本概念。第6章检测理论，介绍了假设检验的基本概念、判决准则、复合假设检验、多元假设检验以及噪声中信号检测。

本教材在编写过程中，在读的博士生、硕士生张剑、李刘才、李宵晖等参与了部分文档、图形的编辑整理和MATLAB的编程工作。电子工业出版社的陈晓莉编审与作者进行了大量的沟通，提出了许多宝贵的意见，在此一并表示诚挚的谢意。

作　者
2009年2月

目　　录

第 1 章 随机变量基础

概率与随机变量是随机信号分析与处理的理论基础，本章简要介绍随机变量的基本理论，更为详细的内容可参考有关教材。

1.1 概率论的基本术语

1. 随机试验

满足下列三个条件的试验称为随机试验：

(1) 在相同条件下可重复进行；

(2) 试验的结果不止一个，所有可能的结果能事先明确；

(3) 每次试验前不能确定会出现哪一个结果。

随机试验通常用 E 表示，比如投掷硬币，就是一个随机试验，它满足以上三个条件。首先，投掷硬币是可以重复进行的；其次，投掷硬币的结果可能是正面，也可能是反面，即有两种可能的结果，而且只有这两种结果，事先可以明确，但具体到某次试验，试验前是不能预知出现哪种结果的。

2. 随机事件

在随机试验中，对试验中可能出现也可能不出现、而在大量重复试验中却具有某种规律性的事件，称为随机事件，简称为事件，如投掷硬币出现正面就是一个随机事件。

3. 基本事件

随机试验中最简单的随机事件称为基本事件，如投掷骰子出现 1，2，…，6 点是基本事件，出现偶数点是随机事件，但不是基本事件。

4. 样本空间

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合称为样本空间，记为 S，如投掷骰子的样本空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$。

5. 频数和频率

在相同条件下的 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率。频率反映了事件 A 发生的频繁程度，若事件 A 发生的可能性大，那么相应的频率也大，反之则较小。

6. 概率

概率是事件发生的可能性大小的度量。事件的频率可以刻画事件发生的可能性大小，但是频率具有随机波动性，对于相同的试验次数 n，事件 A 发生的频率可能不同，n 越小，这种波动越大，n 越大，波动越小，当 n 趋于无穷时，频率趋于一个稳定的值，我们可以把这个稳定的值定义为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1.1.1}$$

这一定义称为概率的统计定义。概率的统计定义不仅提供了事件 A 发生的可能性大小的度

量方法，而且还提供了估计概率的方法，只要重复试验的次数 n 足够大，就可以用下式来估计概率：

$$\hat{P}(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1.2}$$

概率还有多种定义方式，如古典概率型的古典定义，几何概率型的几何定义，以及更一般的概率的公理化定义，这些定义大家可以参阅概率论的有关书籍。

1.2 随机变量的分布函数与概率密度

1.2.1 随机变量的定义

在随机试验中，试验的结果不止一个，如投掷骰子可能出现的点数，打靶命中的环数，以及一批产品中的次品数等。另外还有一些随机试验，尽管试验的可能结果与数值间没有直接的联系，如投掷硬币出现正面或反面、雷达探测发现"有目标"或"无目标"等，但可以规定一些数值来表示试验的可能结果。如对于投掷硬币，用"1"表示"正面"，用"0"表示"反面"；对雷达探测用"1"表示"有目标"，用"0"表示"无目标"。为了表示这些试验的结果，定义一个变量，该变量的取值反映试验的各种可能结果，由于试验前无法确知试验结果，所以变量的值在试验前是无法确知的，即变量的值具有随机性，通常称这个变量为随机变量。下面给出详细的定义。

定义：设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，如果对于每一个 $a\in S$，有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量(Random Variable)，简记为 X。

从以上的定义可以看出，随机变量是定义在样本空间 S 上的一个单值函数。对应于不同的样本 e，$X(e)$ 的取值不同，$X(e)$ 的随机性在样本 e 中体现出来，在试验前究竟出现哪个样本事先无法确知，只有试验后才知道。X 的取值可以是连续的，也可以是离散的，根据 X 取值的不同可以分为连续型随机变量(Continuous Random Variable)和离散型随机变量(Discrete Random Variable)。

所谓离散型随机变量是指它的全部可能取值为有限个或可列无穷个。离散型随机变量的概率特性通常用概率分布律来描述。

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,\cdots,n)$，其概率为

$$P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.1}$$

则称式(1.2.1)为 X 的概率分布或分布律。通常也用表格形式表示(见表 1.1)。

表 1.1 X 的概率分布

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

其中

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \tag{1.2.2}$$

下面介绍几种典型的离散随机变量的概率分布。

1. (0,1)分布

设随机变量 X 的可能取值为“0”和“1”两个值，其概率分布为

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p \quad (0<p<1) \tag{1.2.3}$$

称 X 服从(0,1)分布。如投掷硬币的试验，假定出现正面用 1 表示，出现反面用 0 表示，用 X 表示试验结果，那么 X 的可能取值为 0 和 1，X 是一个离散型随机变量，且服从(0,1)分布。

$$P(X=1)=P(X=0)=0.5$$

2. 二项式分布

设随机试验 E 只有两种可能的结果 A 及 $\overline{A}$，且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q$，将 E 独立地重复 n 次，这样的试验称为贝努里(Bernoulli)试验，那么在 n 次试验中事件 A 发生 m 次的概率为

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad (0\leqslant m\leqslant n) \tag{1.2.4}$$

式(1.2.4)刚好是 $(p+q)^n$ 展开式的第 $m+1$ 项，故称为二项式分布。

3. 泊松(Poisson)分布

设随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,…，且概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2\cdots \quad \lambda>0 \tag{1.2.5}$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布。

1.2.2　随机变量的分布函数与概率密度

设 X 为随机变量，x 为任意实数，定义

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{1.2.6}$$

为 X 的概率分布函数，简称为分布函数。概率具有累积的特性，所以分布函数也称为累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)。

分布函数具有如下性质：

(1) 它是 x 的不减函数，即

$$F(x_2)-F(x_1)\geqslant 0 \quad x_2>x_1 \tag{1.2.7}$$

(2)
$$0\leqslant F(x)\leqslant 1 \tag{1.2.8}$$

(3)
$$F(-\infty)=0, F(\infty)=1 \tag{1.2.9}$$

(4) 若 $F(x_0)=0$，则对任何 $x<x_0$，有 $F(x)=0$。

(5)
$$P(X>x)=1-F(x) \tag{1.2.10}$$

(6) 函数 $F(x)$ 是右连续的，即对于 $\Delta>0$，有

$$F(x)=\lim_{\Delta\to 0}F(x+\Delta)=F(x^+) \tag{1.2.11}$$

(7) 对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1<x_2)$，有

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.2.12}$$

(8)
$$P(X=x)=F(x)-F(x^-) \tag{1.2.13}$$

(9)
$$P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1^-) \tag{1.2.14}$$

对于连续型随机变量，其分布函数是连续的，在这种情况下，$F(x)=F(x^-)$，所以对于任

意 x 都有

$$P(X=x)=0 \tag{1.2.15}$$

对离散型随机变量 X,它的统计特性由它的取值 x_i 及取值的概率 $p_i=P(X=x_i)$确定,也即由概率分布律确定。其分布函数可表示为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_i\leqslant x}P(X=x_i)=\sum_i p_i U(x-x_i) \tag{1.2.16}$$

式中,$U(\cdot)$为单位阶跃函数。由式(1.2.16)可以看出,离散型随机变量的分布函数是阶梯型函数,阶梯的跳变点位于随机变量的取值点,跳变的高度等于随机变量取该值的概率。如(0,1)分布的随机变量 X,其分布函数(见图 1.1)为

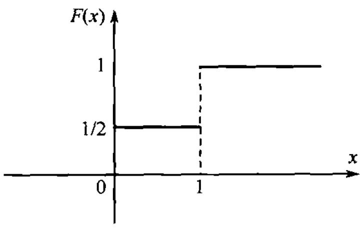


图 1.1 (0,1)分布的分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

如果 X 的概率分布既不是连续的,也不是离散的,那么称 X 为混合型随机变量。

随机变量 X 的分布函数的导数定义为它的概率密度函数(Probability Density Function, PDF),简称为概率密度或密度函数,记为 $f(x)$,即

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.17}$$

分布函数可表示为概率密度的积分,即

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x \tag{1.2.18}$$

由概率密度的定义及分布函数的性质,可以得出概率密度的如下性质:

(1) $f(x)\geqslant 0$,即概率密度是非负的函数。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,即概率密度函数与横轴 x 所围成的面积为 1。

(3) $P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$,这说明随机变量 X 落在区间$(x_1,x_2]$上的概率等于图 1.2 中阴影区的面积。从这条性质也可以看出,对于连续型随机变量,有 $P(X=x)=0$。

对于离散型随机变量,由于它的概率分布函数是阶梯型,那么它的概率密度函数是一串 δ 函数之和,δ 函数出现在随机变量的取值点,强度为取该值的概率,即

$$f(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i) \tag{1.2.19}$$

式中,x_i 为离散型随机变量 X 的取值,$p_i=P(X=x_i)$。随机变量也可以是混合类型的,其分布函数由阶跃的间断部分和连续的部分组成,均匀分布随机变量通过限幅器的输出便是一个混合型随机变量。

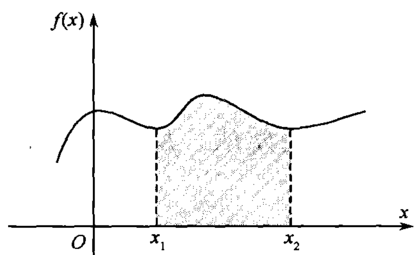


图 1.2 随机变量 X 落在区间(x_1,x_2)上的概率

下面介绍常见的连续型随机变量分布。

1. 正态分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1.2.20}$$

式中，m、σ 为常数，则称 X 服从正态分布，正态分布通常也简记为 $N(m,\sigma^2)$。均值为 0，方差为 1 的正态分布 $N(0,1)$ 称为标准正态分布。正态分布随机变量的概率密度是一个高斯曲线，所以又称为高斯随机变量，概率密度曲线如图 1.3(a)所示。

正态分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.21}$$

标准正态分布函数通常用 $\Phi(x)$ 表示，即

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \tag{1.2.22}$$

2. 均匀分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.2.23}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，概率密度曲线如图 1.3(b)所示。

3. 瑞利分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\quad x\geqslant 0 \tag{1.2.24}$$

式中，σ 为常数，则称 X 服从瑞利分布，概率密度曲线如图 1.3(c)所示。

4. 指数分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\mu}\exp(-x/\mu)\quad x>0 \tag{1.2.25}$$

式中，μ 为常数，则称 X 服从指数分布，概率密度曲线如图 1.3(d)所示。

5. 韦伯分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b}\right] & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{1.2.26}$$

式中，a、b 为常数，则称 X 服从韦伯分布，参数 a 称为尺度参数，b 称为形状参数，雷达地杂波的幅度特性通常可以用韦伯分布来描述，概率密度曲线如图 1.3(e)所示。

6. 对数正态分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{\ln^2(x/m)}{2\sigma^2}\right] & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{1.2.27}$$

式中，m，σ 均为非负的常数，则称 X 服从对数正态分布，雷达海杂波的幅度特性通常可以用对数正态分布来描述，概率密度曲线如图 1.3(f)所示。

7. *K* 分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{\mu}2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left(\sqrt{\frac{2\nu}{\mu}}x\right)^{\nu}K_{\nu-1}\left(\sqrt{\frac{2\nu}{\mu}}x\right)\quad x\geqslant 0 \tag{1.2.28}$$

则称 X 服从 K 分布，其中 $\mu>0$ 为比例参数，$\nu>0$ 为形状参数，$\Gamma(\cdot)$为伽马函数，$K_{\nu-1}(\cdot)$为第二类 $\nu-1$ 阶修正贝塞尔函数。K 分布是描述现代高分辨率雷达杂波的一种统计模型，概率密度曲线如图 1.3(g)所示。

8. 拉普拉斯分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}c\exp(-c|x-\mu|) \tag{1.2.29}$$

式中，c，μ 均为常数，且 $c>0$，则称 X 服从拉普拉斯分布。拉普拉斯分布被广泛地应用于语音信号和图像灰度级别的统计建模，概率密度曲线如图 1.3(h)所示。

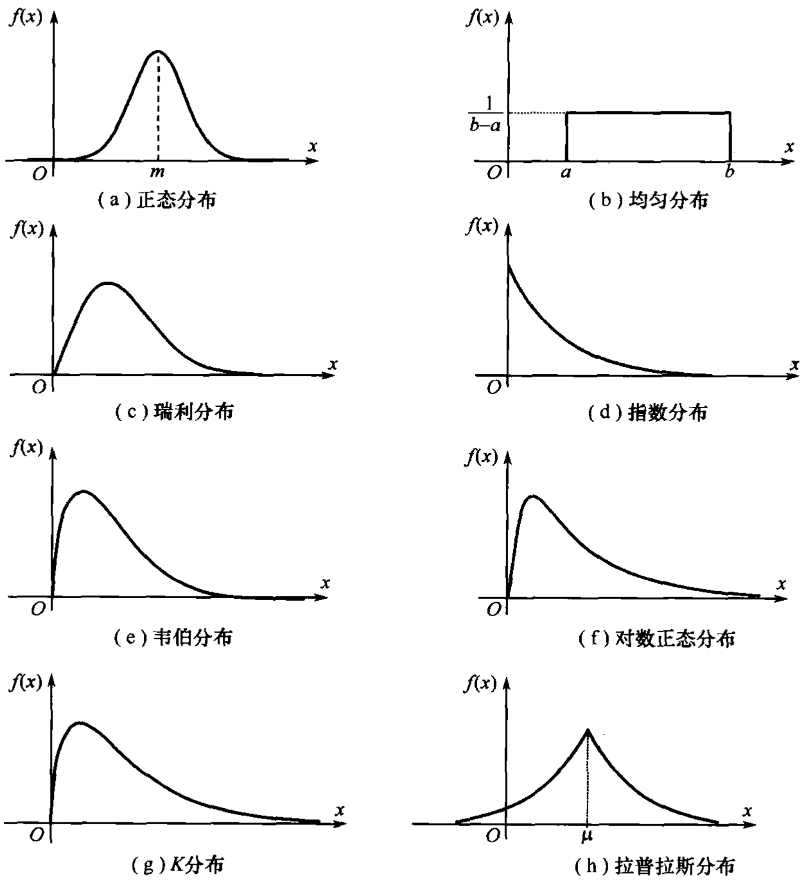


图 1.3 常见的概率密度分布

1.2.3　多维随机变量及分布

在实际中，试验结果通常需要用多个随机变量才能加以描述，例如回波信号的幅度和相位需要两个不同的随机变量来描述。由多个随机变量构成的矢量称为多维随机变量或随机矢量。

设随机试验 E 的样本空间 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在样本空间 S 上的两个随机变量，由 X 和 Y 构成的矢量 (X,Y) 称为二维随机变量或二维随机矢量。

1.2.3.1　二维分布函数

设 x、y 为任意实数，那么二维随机变量 (X,Y) 的分布函数定义为

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y) \tag{1.2.30}$$

二维随机变量 (X,Y) 的取值 (x,y) 可以看作是平面上的一个点，那么二维分布函数就是二维随机变量 (X,Y) 的取值落在图 1.4 所示的阴影区域的概率。

二维随机变量的分布函数具有下列性质：

(1)
$$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$$

(2) 分布函数满足

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0,F(\infty,\infty)=1$$

(3)
$$F(x,\infty)=F_X(x),F(\infty,y)=F_Y(y)$$

$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 称为边缘分布，即随机变量 X 和 Y 的分布，由二维分布函数可以求出一维分布函数。

(4) 对于任意的 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，且 $x_2>x_1$，$y_2>y_1$，则

$$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1) \tag{1.2.31}$$

式(1.2.31)给出了利用二维分布函数计算二维随机变量落在某一区域的概率的方法，如图 1.5所示。

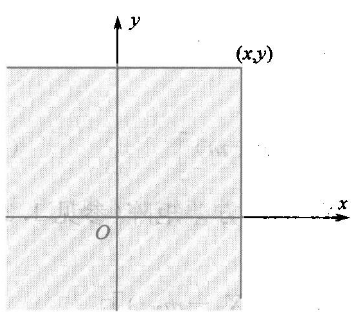


图 1.4　二维分布函数图解

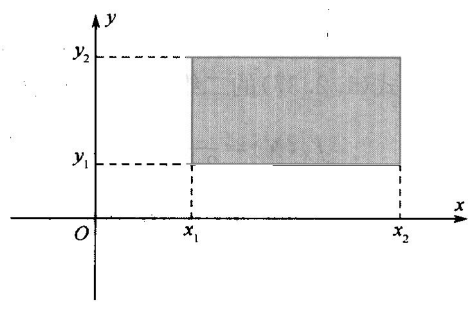


图 1.5　二维随机变量落在某一区域的概率

如果二维随机变量 (X,Y) 的可能取值为有限个或可列无穷个，则称 (X,Y) 为离散型随机变量。设

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,3,\cdots$$

那么

$$\sum_{i}\sum_{j}p_{ij}=1 \tag{1.2.32}$$

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$称为(X,Y)的联合概率分布列,或简称为分布列。

1.2.3.2 二维概率密度

二维分布函数$F(x,y)$的二阶偏导数

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{1.2.33}$$

定义为(X,Y)的二维联合概率密度,简称为二维概率密度。

二维概率密度具有以下性质:

(1) $f(x,y)\geqslant 0$,即概率密度是非负的函数。

(2) $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(\infty,\infty)=1 \tag{1.2.34}$$

(3) 边缘概率密度可由二维概率密度求得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.2.35}$$

(4) 设G是$x-y$平面上的一个区域,则二维随机变量(X,Y)的取值落在该区域的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.2.36}$$

设二个随机变量X_1和X_2,如果它们的联合概率密度为

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_{X_1})^2}{\sigma_{X_1}^2}-\frac{2r(x_1-m_{X_1})(x_2-m_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}+\frac{(x_2-m_{X_2})^2}{\sigma_{X_2}^2}\right]\right\} \tag{1.2.37}$$

式中,$m_{X_1},m_{X_2},\sigma_{X_1}^2,\sigma_{X_2}^2,r$为常数,则称$X_1$和$X_2$是联合正态的。可见二维联合正态概率密度由参数$m_{X_1},m_{X_2},\sigma_{X_1}^2,\sigma_{X_2}^2,r$确定,二维概率密度图形如图1.6所示。

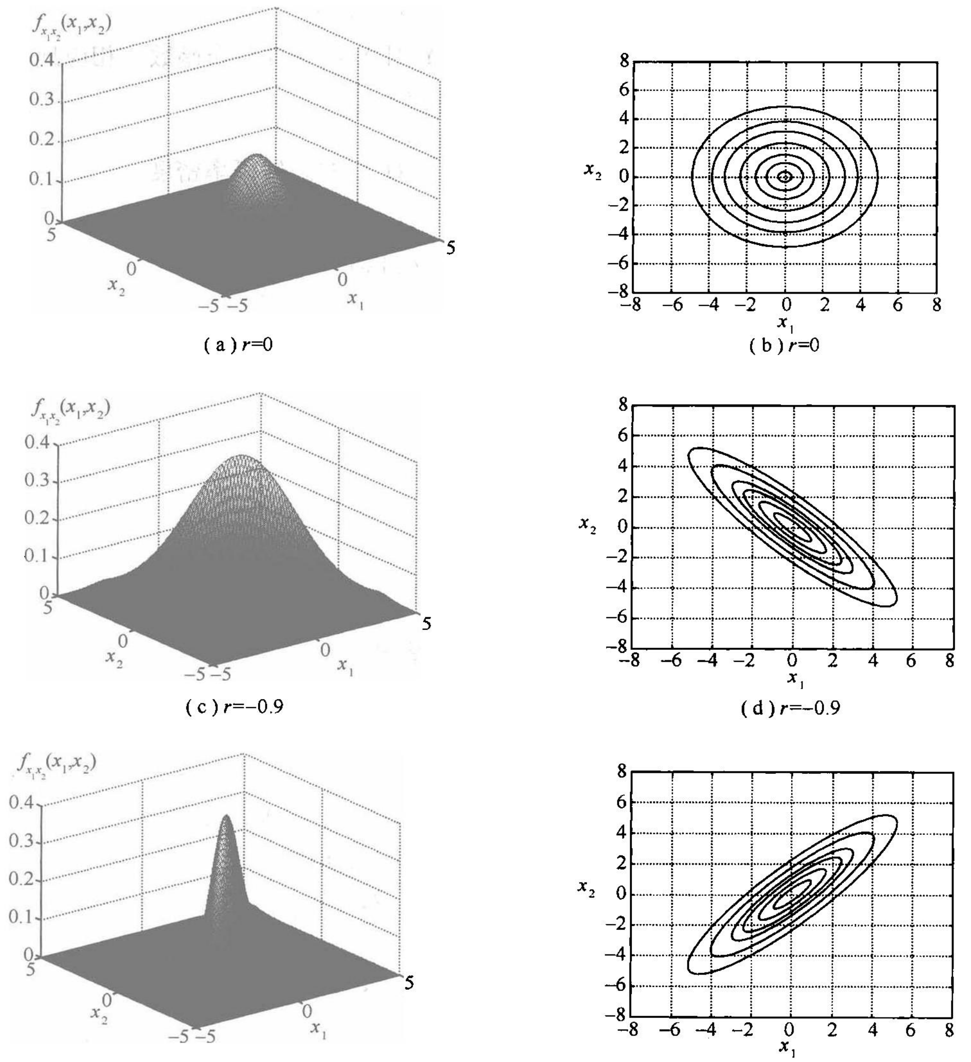
运用矩阵表示形式,可以使二维联合正态概率密度的表示形式变得简洁,且很容易地推广到多维的情况。式(1.2.37)的二维联合正态概率密度可表示为

$$f_X(\boldsymbol{X})=\frac{1}{2\pi|\boldsymbol{K}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right] \tag{1.2.38}$$

式中,$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{m}=[m_{X_1}\ m_{X_2}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{K}$为随机变量$X_1$和$X_2$的协方差矩阵(参见1.3.3节),可表示为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}E[(X_1-m_{X_1})^2] & E[(X_1-m_{X_1})(X_2-m_{X_2})]\\ E[(X_2-m_{X_2})(X_1-m_{X_1})] & E[(X_2-m_{X_2})^2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{X_1}^2 & r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\\ r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2\end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{K}|=(1-r^2)\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2$为协方差矩阵的行列式。



(a) $r=0$　(b) $r=0$

(c) $r=-0.9$　(d) $r=-0.9$

(e) $r=0.9$　(f) $r=0.9$

图 1.6　标准二维正态概率密度三维图形及其轮廓线图

1.2.3.3　条件分布

设 X 为一随机变量，A 是一随机事件，定义

$$F(x|A)=P\{X\leqslant x|A\} \tag{1.2.39}$$

为随机变量 X 在事件 A 发生时的条件分布函数，对应的条件概率密度定义为条件分布函数的导数，即

$$f(x|A)=\frac{\mathrm{d}F(x|A)}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.40}$$

由概率的特性，式(1.2.39)可以写成

$$F(x|A)=\frac{P(X\leqslant x,A)}{P(A)} \tag{1.2.41}$$

设有二维随机变量(X,Y)，令 $A=\{X=x\}$，定义