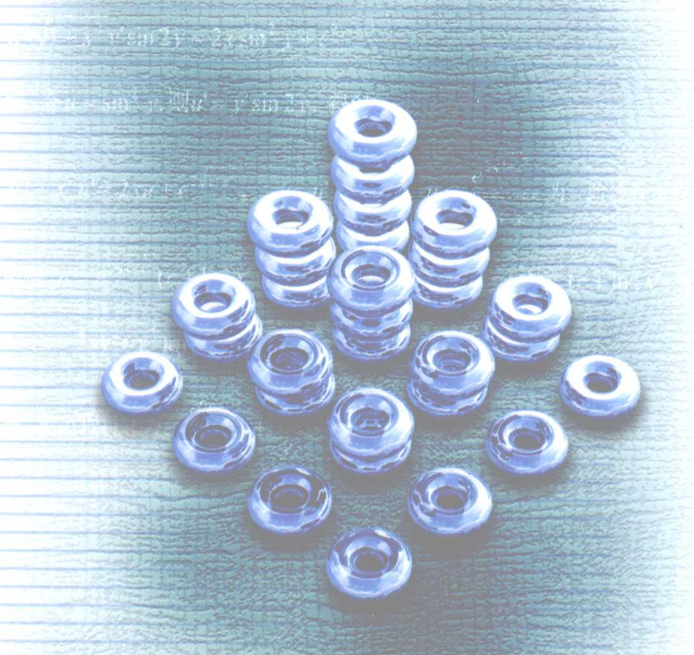
21世纪高等院校十一五规划教材

线性代数

（高职版）

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

主编　陈广顺　晓红



内蒙古大学出版社

●21 世纪高等院校十一五规划教材

线性代数

（高职版）

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

陈广顺　晓　红　主编

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:高职版/陈广顺等编著.—呼和浩特:内蒙古大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-81115-471-9

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 119710 号

线 性 代 数

陈广顺 晓 红 主编

内蒙古大学出版社出版发行

呼和浩特市欣欣彩虹印刷包装有限责任公司

开本:850×1168/32 印张:4.625 字数:116 千

2008 年 8 月第一版第 1 次印刷

印数:1-2000 册

ISBN 978-7-81115-471-9

定价:8.00 元

序

内蒙古自治区的高等教育事业起步于20世纪50年代初。经过近50年的发展,我区的高等教育无论从规模上,还是质量上都取得了长足的发展。特别是近些年来,全区高等院校的招生数量成倍增长,部分院校的合并使得一些高校的办学规模迅速壮大,形成了几所万人大学。与此同时,各高校对各自的专业及课程设置都做了较大的调整,以适应当今日益发展变化的高等教育事业。面向21世纪,在科学技术日新月异,社会对人才的知识结构、层次要求越来越高的新形势下,我们的高等教育的教学水平,特别是教材建设都应有一个更新更高的要求。

回顾50年来的发展,虽然我区高等教育的教学科研水平有了较大的提高,但与之相应的教材建设的现状还不尽如人意,绝大多数主干课程的教材还沿用一些传统教材,有些甚至是20世纪七八十年代的版本。有些院校的教材选用则有一定的随机性,在几种版本的教材之中换来换去。其间,虽然部分院校也组织力量编写了一些基础课及专业课教材,但大都是各成体系,缺乏院校间的协作与交流,形不成规模,质量亦无法保证,常常滞后于学科的发展与课程的变化。这都与我区高等教育的发展极不协调。诚然,区外部分地区高校的教学科研水平比我区要高,一些教材的质量好,我们可以直接利用,但这并不能成为我们不搞教材建设的理由。好的教材还需要相应的教育资源条件与之相对应才能取得良好的教学效果,从而达到促进教学质量提高之目的。应当承认,由于经济发展的相对落后,我区高校所招学生的基础和学校的教学条件比起全国重点名牌大学相对要差一些。因而,我们高校的教材也应从实际出发,结合自己学校和学生的特点,逐步探索、建立一套

适合自治区教育资源条件的教材体系，促进自治区高校教学科研水平的提高，多出人才，出好人才。

值得欣喜的是，随着自治区教育科学水平的提高，我区高校教育领域的一些有识之士逐渐认识到，面向21世纪，未来高校之间的竞争就是学校的产品——学生质量的竞争。要想培养出高水平、高素质的学生，使我区的高校在这种竞争中立于不败之地，除各高校应努力提高自身的教学组织管理水平、提高教师的素质外，还应积极主动地加强与区内外高校的协作、交流，取长补短，走联合发展的道路，使我区高等教育的整体水平能够在较短的时间内得到提高。为此，在有利于规范高校教材体系，促进高校教育质量的提高，加强各高校教学科研人员之间的协作与交流的原则下，由自治区教育厅牵头，内蒙古大学出版社组办、资助，联合全区高等院校的有关专家、学者共同组建成立一些相关专业的教材编委会，以求编写适合我区高等教育特点的教材，逐步建立、完善自治区高等教育的教学、教材体系，并开展一些与教学相关的科研工作。我们希望，通过教材编委会这种工作模式，建设一批高质量的教材，带出一支高水平的师资队伍，培养出大批高素质的人才。

我坚信，在自治区教育厅的指导下，在编委会各位专家、学者的辛勤工作下，在各院校的相互理解、相互协作、相互支持下，我们一定能够克服发展过程中的困难，逐步推出一批高质量、高水平的教材，为推进内蒙古自治区高等教育事业做出重要的贡献。

2002年3月19日

前　　言

在编写本书的过程中，作者结合多年从事高职高专线性代数教学经验的基础上，遵循高职高专教材编写的“必须、够用”原则，根据高职高专学生的特点编写而成.

本书以线性方程组为主要研究内容，第四章与第五章可作为线性方程组的应用，力求通俗易懂，深入浅出，注重对学生的计算能力及逻辑推理能力的培养.

本书的作者分工：陈广顺编写第一、二章及自测题；晓红编写第三、四、五章.

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，希望读者批评指正.

编　者

2008 年 5 月

目　录

绪　　论

线性方程组的定义：将一次方程组称为线性方程组.

线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

线性方程组的解：如果用 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 依次代替方程组(1) 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时，它能使方程组(1) 的每个方程都能成为恒等式，则称 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为方程组(1) 的一个解.

关于线性方程组的基本理论主要研究：

(ⅰ) 线性方程组是否有解；

(ⅱ) 线性方程组有解时，如何判断解的个数；

(ⅲ) 线性方程组的求解方法；

(ⅳ) 线性方程组解的结构.

第一章　行列式

本书研究线性方程组时，以矩阵和行列式作为了工具，在第一章中我们先来研究行列式，下一章研究矩阵.

§1.1　二阶、三阶行列式的定义

一、二阶行列式

二阶行列式的定义：将 2^2 个数排成两行两列(横的称行，竖的称列)并在左右两边各加一竖线后得到的算式称为二阶行列式. 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1}$$

组成二阶行列式的数 a_{ij} 称为该行列式的元素，它的第一个下标称为行标，表示该元素所在的行的序号，第二个下标称为列标，表示该元素所在的列的序号.

二阶行列式可以用以下公式计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

可以利用二阶行列式计算系数行列式不等于零且方程的个数与未知量的个数都是二的二元线性方程组的解. 其方法如下

若方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式 $D \neq 0$ 则(3)有唯一解：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

二、三阶行列式

三阶行列式的定义:将 3^2 个数排成三行三列(横的称行,竖的称列)并在左右两边各加一竖线后得到的算式称为三阶行列式.记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

组成三阶行列式的数 a_{ij} 称为该行列式的元素,它的第一个下标称为行标,表示该元素所在的行的序号,第二个下标称为列标,表示该元素所在的列的序号.

三阶行列式可以用以下公式计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

例如,$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$+ (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -12$$

可以利用三阶行列式计算系数行列式不等于零且方程的个数与未知量的个数都是三的三元线性方程组的解. 其方法如下

若方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$
的系数行列式 $D \neq 0$ 则(6) 有唯一解
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$
其中
$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

习　题

一、计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

二、当 k = ?时,等式 $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$ 成立.

三、求解三元线性方程组
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_2 = 1 \end{cases}$$

§1.2　n 阶行列式的定义

上节课我们学习了二阶、三阶行列式，并且会用二阶和三阶行列式求出一部分二元和三元线性方程组的解. 细心的读者自然会想到能不能定义出 n 阶行列式，进而用 n 阶行列式求出 n 元线性方程组的解，问题的回答是肯定的. 下面我们先定义 n 阶行列式，在本章的 1.5 节给出用行列式解 n 元线性方程组的方法.

n 阶行列式的定义：将 n^2 个数排成 n 行 n 列（横的称行，竖的称列）并在左右两边各加一竖线后得到的算式称为 n 阶行列式. 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

组成 n 阶行列式的数 a_{ij} 称为该行列式的元素，它的第一个下标称为行标，表示该元素所在的行的序号，第二个下标称为列标，表示该元素所在的列的序号.

为了给出 n 阶行列式 D 的计算公式，下面先定义 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 的余子式与代数余子式.

将行列式 D 中元素 a_{ij} 所在的行和所在的列划掉后，剩下的元素按其原来的顺序排列而得到的行列式称为元素 a_{ij} 在行列式 D 中的余子式，记作 M_{ij}. 将 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 在行列式 D 中的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式是

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3&5&2\\1&2&1\\2&9&4\end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&5&2\\1&2&1\\2&9&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&5&2\\1&2&1\\2&9&4\end{vmatrix}$$

n 阶行列式可以按下面的公式计算

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \qquad (2)$$

等式(2) 右边的展开式称为行列式按第一行展开的展开式，用公式(2) 计算行列式也称为行列式按第一行展开.

例　计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&6\\1&2&-2&3\\0&1&2&-1\\2&3&-3&9\end{vmatrix}$

解　$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&6\\1&2&-2&3\\0&1&2&-1\\2&3&-3&9\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-2&3\\1&2&-1\\3&-3&9\end{vmatrix}$

$$+6\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&1&2\\2&3&-3\end{vmatrix}$$

$$=36$$

习　题

一、写出行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的余子式 M_{32} 及代数余子式 A_{32}.

二、计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

§1.3　行列式的性质

将行列

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行变为相应的列后得到的行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式.