“十一五”规划教材
教育部高等理工教育数学基础课程
教学改革与实践项目

高等数学

（下册）

主编　李　伟
主审　马知恩

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十一五"规划教材
教育部高等理工教育数学基础课程
教学改革与实践项目

高等数学

(下 册)

主编 李 伟
主审 马知恩

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目”的研究与改革成果，其基本内容的确定是依据国家非数学类专业数学教学指导分委员会于2005年所提出的关于“高等数学”课程的基本要求，为照顾学有余力、有较高要求的学生需要，也用异体字为他们提供了进一步学习的资料。全书分上下两册，上册的主要内容包括一元微积分及常微分方程；下册的主要内容为向量与空间解析几何、多元微积分及级数。

本书编写的指导思想是培养学生的学习兴趣，除了注意语言的活泼与贴近生活，还在相关内容后附有“历史回顾”及“历史人物简介”；本书注重培养学生“用已知认识、研究和解决未知”的能力及创新能力，力图有利于以“问题驱动”、互动式的教学，同时这样做也有利于培养学生的兴趣，把学生带入其中；本书还注意培养学生解决实际问题的能力，培养学生从实际问题中建立数学模型的意识和能力以及使用数学软件的能力，因此，在每一章的后边编入了少量的数学建模实例及用数学软件解决相关问题的介绍与例子；为了满足不同层次学生的需要，每一节的习题都分A、B两组，并且在每一章的最后还有该章的总习题，供学有余力的学生使用。

本书适合于理工科非数学类的各专业学生使用，也适合学生自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/李伟主编. —西安：西安交通大学出版社，2009. 2
ISBN 978-7-5605-3006-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第009429号

书　　名 高等数学(下册)
主　　编 李　伟
责任编辑 任振国　桂　亮

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安新视点印务有限责任公司

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 21　**字数** 381千字
版次印次 2009年2月第1版　2009年2月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3006-2/O·288
定　　价 33.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

序

以微积分为主体内容的“高等数学”是高等院校最重要的基础课程之一。它不仅为学生后继课程的学习和今后从事科技工作提供必要的基础知识，而且对学生科学思维方法的形成以及分析问题、解决问题能力的培养产生重要而深远的影响。如何恰当地精选内容？如何在讲授知识的过程中，更有效地培养学生的科学素养和能力？这是当前课程教学改革的核心，也是广大教师不断探索的重要问题。

李伟教授主编的《高等数学》教材，是“教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目”的研究与改革成果。本教材在内容的选取上，力求兼顾理工科普通高等院校不同层次本科生的教学需要，其基本内容的确定是根据我国非数学类专业数学教学指导分委员会于 2005 年提出的，关于“高等数学”课程教学基本要求的建议，同时也用异体字提出了更深入的问题为高要求的学生提供了进一步学习的资料。

在内容的讲解上，立足于以学生为本，激发和培养学生的学习兴趣，贯穿“用已知认识未知、研究未知、解决未知”的原则，采用“提出问题，启迪学生思考，引导进行解决”的“问题驱动式”教学方法，以期望能更有利于学生领会知识，提高能力。

本书的另一特点是通过大量的边框注释来帮助学生掌握重点，领会问题的实质，引导学生深入思考，提示学生总结提升。这在国内同类教材中是一种颇有新意的尝试，相信在引导学生自主学习，进行因材施教等方面会起到较好的作用。

本书在每章之后编入了少量的数学建模实例和数学软件的使用供学生选学，有助于培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，促进对现代计算工具的学习。

本书对所涉及的一些数学家附有简介，还编入了一些相关的历史回顾，有助于激发学生的学习兴趣和热情，发挥教书育人的作用。

相信本书的出版将为普通高等院校《高等数学》的革新教材增添具有特色的新品种，也希望能对广受教师们关注的教学方法的改革有所启迪。

马知恩

2008年6月于西安交通大学

前 言

目前，建设创新型国家的伟大战略决策已成为举国上下的共识。建设创新型国家需要创新型人才，因此为社会培养具有创新精神和创新能力的人才是时代赋予高等学校的历史使命！

要培养具有创新精神和创新能力的人才，就必须把培养学生的“能力”放在首位。为此，作为高等学校重要基础课的“高等数学”的教学，已经广泛实施了旨在培养学生能力的互动式教学。但是，作为学习工具的教材如何与其相适应？如何通过教材实现“立体式”、全方位培养学生的能力？这是我们一直在思考和探索的问题。

兴趣是学习的导引和动力，没有兴趣的学习是枯燥无味的，令人头疼的，也是很难学好的。因此，笔者认为，教材应具有可读性，要把激发学生的兴趣和爱好作为编写教材的指导思想。要注重激发学生学习的兴趣和热情，要有利于对学生的素质教育。

要培养学生的能力，就要使学生不仅记住定义和定理的条件与结论，还要使他们知道为什么需要这样的条件，为什么需要这样一步一步地证明。不仅要会做例题，还要知道编选这些例题的目的是什么？从中要学到什么？要把培养学生“用已知认识未知、研究未知和解决未知”的能力放在首要的位置。要注重培养学生读书的能力。

目前在大多数学校中，学生的基础严重参差不齐是比较普遍的现实。有些学校采取按程度编班的“分级教学”。按程度分班，是否会使学生背上包袱：好班的学生沾沾自喜，差班的学生自尊心受到挫伤，从而不能达到组织者的良苦用心？能否使不同程度的学生在一个班级、使用同一部教材而实现“按需索取”呢？

工科学生主要的出路是成为一名工程技术人员。不论是为了应用，还是为了加强能力的培养，使他们受到严格的数学训练都是必须的。但是我们还应看到，在以后的实际工作中，让他们去计算譬如一个个复杂的积分等是不现实的，因为现成的软件已经不需要他们再去计算。因此，在学习数学知识的同时配以相应的软件的训练是有必要的。

学生学习的最终目的是应用，培养学生解决实际问题的能力、培养他们从实际

问题建立数学模型的能力是我们的重要目的。当然，仅靠微积分的知识是很难解决现实世界提出的大量问题，但是从学习微积分就开始培养学生的“建模”意识和能力是完全必要的。

以上这些都是笔者一直在思考和努力在尝试的。

在这部《高等数学》中，笔者注意到学生兴趣的培养，注意到语言的生活化，以减少学生对微积分的畏惧感，进而喜欢它。力图给学生介绍一些相关史料和有关的数学家，通过这些介绍，希望帮助学生扩展知识的内涵，加深对知识的理解，培养学生的素质，激发学生的兴趣和求知欲。

书中每一章、每一节都分正文和“边注”两部分。其中正文所涉及的内容依据国家非数学类专业教学指导分委员会于 2005 年所提出的“高等数学”课程教学基本要求，是“高等数学”的基本内容，是每一个理工科大学生所必须学习的。“边注”中所列的内容主要是根据正文的相关内容提出的问题，其目的是提示学生去复习和回忆已经学习过的相关内容，以培养学生“用已知认识未知，用已知研究未知，用已知解决未知”的能力。有些是为了提醒学生去总结、提升。学了知识不去总结是一大忌，书不论读的再多，不总结也难以提升到一个本该达到的层次。有些问题，是作为学生看书的提纲，帮助学生带着问题去看书，以问题驱动思考，还有一些是知识的延伸，希望为学有余力的学生进一步理解、掌握“高等数学”提供一些帮助。注意到学习基础较好、要求较高的学生的需要，对有些“基本要求”之外的内容，我们采取了异体字排版，这样的内容对学习确属吃力的学生不作要求。对前边加“*”的内容讲或不讲，由教师视实际情况而决定。

为了使不同类型的学生能够各取所需，使学习吃力的学生清楚地知道自己必须达到的要求，而不至于因为看到习题通篇都有困难而失去学习的信心，我们把习题分 A，B 两组。A 组是基本题，是所有学生都应做的，会做这些题，就基本上掌握了教材的基本知识，达到基本要求。对学有余力的学生要做一些 B 组题，学习吃力的学生可以完全不去做它。每章的后边还附有总习题，是为想继续深造的学生准备的。

在上册的最后作为“附录”介绍了一个数学软件，并且在每章的最后介绍了如何用数学软件去解决本章有关问题。这是为将来的工程技术人员准备的，希望他们尽早对应用软件有所了解。这些内容并不是必讲内容，但是我们相信，不论教师怎么处理，一定会有一些学生去接触它——因为这是他以后工作的工具。

为了从基础课就开始培养学生的“建模”思想和意识，我们在有关章节介绍了一些建模的实例。对这些例子和相关的习题，教师可以在课堂上与学生一起解决、也可留给学生自己练习。不论什么方式，相信都会有学生喜欢的。

由于“高等数学”在高等学校所处的重要位置，因此教育部、各高校以及出版社

都十分重视其教材建设。可以说高等数学教科书百花齐放，各有特色，其中有很多优秀教材，对笔者写这部书产生了很大的影响，提供了有力的支持。

笔者十分感激西安交通大学马知恩教授。作为本书的主审，他在百忙之中极其认真地审阅了全书，给笔者提出了许多宝贵的、建设性的意见。通过这一机会，笔者不仅从先生那里学到了很多专业知识，而且先生渊博的知识、严谨的治学态度和对后来人的热情支持与鼓励，永远激励和鼓舞着我！先生在百忙之中又为本书作序，笔者无比感激！

笔者十分感激北京大学李忠教授的关心和支持。笔者长期受先生的教育和熏陶，使我终身受益。他一直在关心着笔者的工作，关心这部教材的编写，并提出了许多建设性的指导意见。值此，笔者对先生多年的培养、关心与支持表示最真诚的谢意！

本书得到了天津科技大学、理学院及数学系领导的支持，是数学系集体智慧的结晶。参加本书编写的有李伟、刘凤林、刘寅立、孙成功及佘泽红。全书由李伟主编，刘凤林选配习题，刘寅立编写了数学建模和数学软件部分，孙成功从事历史资料部分的编写，佘泽红承担了图形的绘制。数学系张大克教授、邢化明教授对本书提出了许多具体的建议和修改意见；张绍璞、张励、关泽满、韩英华、程建军、李杰红、丁玉梅、崔家峰、于非非、谢中华、贾学龙、杨华及张伟等同志对笔者的工作给了热情的关心、支持和帮助。特别是王霞、王玉杰、赵亚光、李君、廖嘉、夏国坤及王爱平等同志牺牲了大量休息时间与编者们对书稿进行了集体讨论、审阅，提出了宝贵的修改意见。本书满含他们的心血和汗水，在此笔者代表全体编写人员向他们致以最诚挚的谢意！

笔者还特别感激刘寅立及廖嘉同志为本书的付出，正是他们精美的设计和辛勤劳动，才使得笔者把书稿付诸出版！

本书得到“教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目”的立项资助，在此表示感谢！

通过教材达到课前预习、课堂学习、课后复习的“立体式”培养学生的能力是笔者的初衷，但是付诸实践却不是一件容易的事。因此，鉴于各方面原因，本书会有许多不成熟甚至是错误的地方，笔者诚恳地希望得到各界的批评和指正！

李 伟

2008 年 6 月于天津滨海新区

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，把平面上的点与二元有序数组建立了一一对应关系，从而建立了平面曲线与二元方程的对应关系. 我们能否像在平面中用二元方程研究平面图形那样来研究空间中的图形？这就是空间解析几何的内容.

在研究空间解析几何之前，先讨论有关向量的问题，它有着比较普遍的意义，同时也是研究解析几何的重要工具.

7.1　向量及其运算

7.1.1　向量的概念

在本章以前研究的量都是数量，其特点是，它们只有大小和多少的意义. 比如，某学校有 18000 人，有 60 万平方米的建筑等. 但是，在物理中也遇到过另外一种量，比如，速度、位移、力等. 它们的特点是，既有大小，同时还有方向，仅仅大小相同的两个速度未必相等. 这类量在几何、物理、力学中扮演着重要的角色.

既有大小又有方向的量称为**向量**. 通常，把以 A 为起点、B 为终点的向量用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，而用线段 AB 的长度来表示向量$\overrightarrow{AB}$的大小，称为向量$\overrightarrow{AB}$的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$；起点 A 到终点 B 的方向为$\overrightarrow{AB}$的方向. 有时也用一个黑体字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\cdots$，或用 $\vec{a},\vec{b},\vec{r},\vec{v}$ 来表示（书写时，在字母的上面加一箭头）（图 7－1）.

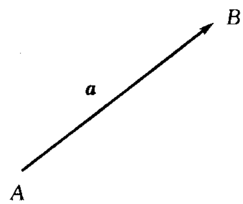

图 7－1

有些向量与起点有关，有些与起点无关. 在本书中所讨论的向量都是**自由向量**. 也就是说，不关心其起点的位置，而只关心其大小与方向. 即将一个向量自由地平行移动到另外位置，而认为该向量没有改变.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 大小相等、方向相同，则称它们是**相等**的，或称为是同一个向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

还要引进零向量的概念，称模为零的向量为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的起点与

终点重合，它的方向可以是任意的，一定不要把零向量与数 0 混为一谈.

模为 1 的向量称为**单位向量**，与 $\boldsymbol{a}$ 有相同方向的单位向量通常称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，就称它们是互相平行的，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 并且约定，零向量与任何向量平行.

当两向量互相平行时，可以通过平行移动使它们具有共同的起点. 这时它们必落在一条直线上，因此彼此平行的向量也称为是**共线**的（零向量与任何向量共线）.

下边研究有关向量的各种运算.

7.1.2 向量的运算

1. 加减法运算

对任意给定的两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，可以用以下两种方法定义其加法运算.

将向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使其起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B 重合，这时以 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 为起点、$\boldsymbol{b}$ 的终点 C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}$ 定义作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 7 - 2）. 这种作两向量和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

假设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不互相平行，也可以通过平行移动使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点 A，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为相邻的两边作平行四边形 $ABCD$（图 7 - 3），连接对角线 AC，向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作两向量和的方法也称为**平行四边形法则**.

规定零向量与任何向量 $\boldsymbol{a}$ 的和向量还是向量 $\boldsymbol{a}$.

用向量的三角形加法法则可以比较方便的求出多个向量的和向量，例如图 7 - 4 中的向量 $\overrightarrow{AD}$ 即是向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

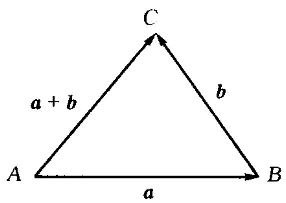

图 7 - 2

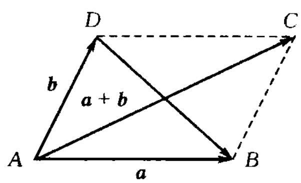

图 7 - 3

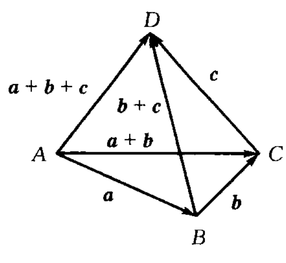

图 7 - 4

显然，这样定义的加法运算满足交换律与结合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差向量**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

在图 7－3 中向量 $\overrightarrow{DB}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

根据三角形的两边之和大于第三边的原理，由图 7－3 易得

有人写 $a-a=0$，您看可以吗？为什么？

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|;\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

2. 数乘运算

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ，定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，其方向定义如下：

当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向；

当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 有相反的方向；

当 $\lambda=0$ 时，由上述关于模的规定，不管 $\boldsymbol{a}$ 是否为零向量，都有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$，即总有 $0\boldsymbol{a}$ 为零向量 $\boldsymbol{0}$，它的方向可以是任意的.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，根据数与向量相乘之规定，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模为 $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$，且与 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向. 因此 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量. 即有

向量 $\dfrac{a}{|a|}$ 为什么与 a 有相同的方向？计算 $\dfrac{a}{|a|}$ 模为 1 时，用了什么运算法则？

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^0.$$

可以认为，一个向量的负向量是该向量与数 -1 的乘积.

向量的数乘运算满足下列规则：

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b};\quad (\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a});\quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

上边三式可依照关于向量数乘运算的规定来验证，这里从略.

由关于向量的数乘之规定，有

设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，如果存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，那么必有向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

上述条件不仅是充分的，同时也是**必要的**，而且这样的 λ 只有一个.

事实上，设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 不妨先设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，由 $\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同相，因而也与 $\boldsymbol{b}$ 同向；并且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$