

JYU XIAOBO BIANHUAN DE
MUBIAO JIANCE FANGFA YANJIU

基于小波变换的 目标检测方法研究

王丽荣 © 著



吉林人民出版社

JYU XIAOBO BIANHUA DE
MUBIAO JIANCE FANGFA YANJIU

基于小波变换的 目标检测方法研究

王丽荣 © 著

吉林人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

基于小波变换的目标检测方法研究 / 王丽荣著.

— 长春:吉林人民出版社,2008.12

ISBN 978-7-206-05934-6

I. 基… II. 王… III. 小波分析

IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 206617 号

基于小波变换的目标检测方法研究

著 者:王丽荣

责任编辑:谷艳秋 封面设计:创意广告

吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街 7548 号 邮政编码:130022)

印 刷:长春市恒源印务有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:9 字数:170 千字

标准书号:ISBN 978-7-206-05934-6

版 次:2008 年 12 月第 1 版 印 次:2008 年 12 月第 1 次印刷

定 价:25.00 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

前 言

目标检测在计算机视觉，雷达跟踪，红外制导，电视跟踪等研究领域有着极其重要的地位，目标的实时检测已成为现代图像处理的关键技术之一，其中运动目标的检测是当今研究的热点。

本书研究内容结合实际科研项目“电视跟踪系统”中对动态目标检测跟踪的要求展开。这类目标的特点是常常处在大量的干扰之中，例如，在靶场内探测、捕获试验中的飞机、导弹等目标，轻武器中对运动目标的跟踪和检测技术及各种高技术武器系统的模拟训练器中对模拟目标的检测，跟踪测量等。能对这类目标实时准确的检测和跟踪，对国防和民用等方面有着很重要的实际意义。

通常在电视跟踪系统中，采用的机动目标检测跟踪方法主要分为，空间与时间—空间两种方法。其中空间方法是单独对每帧图像信号进行处理，利用目标信号在二维空间中的特征跟踪运动目标。空间跟踪方法仅适合于跟踪简单背景中的目标或背景变化缓慢而目标又无明显姿态变化的情况。时间—空间方法除利用目标信号在空间域的特征外，同时利用它在时间域的运动特征。目前常用的检测算法大部分还是应用基于时空域下的传统算法，但在很多应用中，时空检测方法无法满足实际的检测要求。由于小波变换的多分辨率分析的特点，使基于小波变换的目标检测算法有传统无法比拟的性能优势，为复杂，弱小目标的检测提供了新的强大的理论依据。可以解决很多目前时域下无法解决的问题。1996年 Sweldens 等人提出的提升框架的小波变换即第二代小波变换理论，使应用小波变换的各种算法向实时性处理又前进了一步。本文所研究的提升小波变换的目标检测算法，既能检测到包括复杂背景及弱小的受到大量干扰的目标，又有望能在硬件上实现，尤其在跟踪系统领域有望满足实时性处理要求。

基于小波变换理论的目标检测方法研究，无论在理论还是在实际应用方面都有重要研究价值。本文可为从事此方面的研究人员提供参考，文中某些研究结果可直接在目标检测系统中应用。

目 录

第1章 绪 论	1
1.1 目标检测的基本方法及研究现状	1
1.1.1 基于像素分析的目标检测方法	1
1.1.2 基于特征检测的方法	2
1.1.3 基于小波的目标检测方法	3
1.2 全书的主要内容及安排	5
第2章 小波变换的基本理论	7
2.1 概 述	7
2.2 连续小波变换	7
2.2.1 连续小波变换的定义	7
2.2.2 小波的时频窗	8
2.2.3 傅立叶变换、Gabor 变换与小波变换的对比	9
2.3 离散小波变换	11
2.3.1 连续小波变换离散化	11
2.3.2 二进小波变换和重构	12
2.4 小波变换的多分辨分析	13
2.4.1 小波变换特点	13
2.4.2 正交 MRA 的物理意义	14
2.4.3 小波函数的双尺度方程	15
2.5 Mallat 算法	16
2.6 二维信号的 Mallat 算法	18
2.7 基于提升框架的小波变换	19
2.7.1 提升小波变换的基本原理	19
2.7.2 小波分解与重构的多相位表示	20
2.7.3 Laurent 多项式的 Euclidean 算法	22
2.7.4 多相矩阵的因子分解	23
2.7.5 提升变换流程	25
2.7.6 提升方法的整数小波变换	26
2.8 本章小结	27
第3章 基于小波变换的目标边缘检测方法	29
3.1 引 言	29

3.2 基于小波变换的目标预处理研究	30
3.2.1 利用小波的特性对高频系数置零的去噪方法	31
3.2.2 小波系数阈值去噪方法	32
3.2.3 基于小波变换模极大值去噪方法	35
3.2.4 基于小波变换的多尺度相关自适应阈值去噪	38
3.2.5 基于小波变换的图像增强方法	40
3.2.6 小波方法预处理仿真实验与分析	45
3.3 基于小波变换的图像边缘检测方法研究	48
3.3.1 小波变换检测图像边缘的原理	49
3.3.2 模极大检测数字图像边缘算法	53
3.3.3 阶梯型目标边缘检测方法	56
3.3.4 快速多尺度边缘检测方法	57
3.3.5 小波多尺度自适应阈值边缘检测方法	59
3.4 实验与分析	60
3.5 本章小结	68
第4章 基于小波变换的弱小目标检测方法	69
4.1 引言	69
4.2 基于小波变换的弱小目标检测方法	71
4.2.1 小波连续尺度目标检测方法	71
4.2.2 多维连续小波变换算法	72
4.2.3 小波多尺度相关距离图像检测算法	73
4.2.4 小波 Fisher's 线性目标检测方法	75
4.2.5 小波变换和能量交叉的小目标检测方法	76
4.3 基于小波变换的弱小目标去噪	77
4.4 仿真实验与分析	78
4.5 本章小结	83
第5章 基于提升小波变换的目标检测方法	84
5.1 引言	84
5.2 提升小波变换目标检测方法	84
5.2.1 提升小波算法	84
5.2.2 提升小波边缘检测算法	86
5.2.3 提升小波自适应阈值边缘检测	87
5.3 提升小波任意参数目标检测方法	88
5.3.1 提升小波滤波器	89
5.3.2 利用提升小波滤波器检测目标	90

5.4 提升方法的整数小波目标检测方法	95
5.4.1 提升方法的整数小波变换	95
5.4.2 仿真实验与分析	99
5.5 本章小结	106
第 6 章 目标检测算法硬件实现研究	107
6.1 引 言	107
6.2 基于多 DSP 实时图像测量系统的结构	107
6.2.1 以 TMS320C6203 为核心的硬件平台	107
6.2.2 FPGA 对图像进行预处理	110
6.3 目标实时测量系统的软件设计	111
6.3.1 软件总体设计框架	111
6.3.2 系统的工作过程	111
6.4 利用汇编语言和流水线技术的 DSP 源代码优化	113
6.4.1 程序的优化	114
6.4.2 参数优化	114
6.4.3 利用线性汇编优化	115
6.4.4 手工优化	116
6.4.5 在 C/C++ 程序中插入汇编语言	118
6.5 利用汇编语言对目标检测程序的优化	119
6.5.1 利用线性汇编优化源代码	119
6.5.2 实验结果比较	119
6.5.3 性能分析与结论	121
6.6 基于提升方法的整数小波变换在 DSP 系统的实现	121
6.6.1 提升小波的硬件实现	122
6.6.2 目标边界点的处理	125
6.6.3 小波系数取整方法	126
6.7 实验与分析	126
6.8 本章小结	129
参考文献	130

第1章 绪论

1.1 目标检测的基本方法及研究现状

长期以来人们根据具体情况提出了多种多样的目标检测方法，每种方法在满足各自的条件下均取得很好的检测效果，有些成熟经典的算法已被广泛应用到实际中。根据查阅的国内外文献报道将序列目标检测方法可分成基于像素分析的检测方法、基于特征的检测方法和基于变换的检测方法等。

1.1.1 基于像素分析的目标检测方法

基于像素分析的目标检测方法，是根据图像中的像素灰度模式的变化来实现运动目标的检测、识别与跟踪，有帧间差分方法、相关算法、光流法等^[1-4]。

1. 帧间差分方法

帧间差分方法就是对前后两帧图像直接进行差分即相邻帧图像做相减运算，对结果图像取阈值并分割，从而提取出运动的目标。这种方法基于以下假设，即当传感器与目标之间的运动为平行于图像平面的平移时，在较短的时间间隔内，认为背景灰度基本保持不变，利用前后两帧图像的差分图像检测出目标的运动信息。由于在实际应用中传感器相对于背景是运动的，利用简单的差分图像进行运动检测是不够的，为此已采用双差法和各种内插技术来补偿背景的移动^[5]。虽然帧间差分法简单可靠，但对相邻帧图像直接做差分的方法只适合摄像机不动的情况。如果摄像机自身也处于运动状态，则由于目标和背景同时处于运动中，而不能简单的通过检测视场中的差异部分来提取目标，要通过对背景的运动进行补偿后，才能将目标的运动从背景的运动中区分出来。因此很多文献也提出了一些改进算法，T.G.Allen 等人，通过贝叶斯方法计算光流来找到大面积背景的运动，将两帧图像根据这个运动重新对齐，使背景重合，再用图像相减的方法检测出相对背景运动目标的方法^[16]就属于这种情况。

2. 相关算法

基于像素分析的另外一种方法是相关算法^[7]。在相关跟踪器中，运动目标的检测是在相关运算中完成的，典型的快速相关匹配算法有幅度排序的相关算法(BARC)，FFT 相关

算法, 序贯相似检测算法(SSDA)和分层搜索的序贯判决算法等。目前相关算法用得最多的是多值 SSDA 算法、分层搜索的序贯判决算法以及二者的组合算法。这些算法速度快, 精度高, 容易实时实现, 因此得到了广泛的应用。但缺点是互相关算法的运算量大, 对于尺度、旋转等图像变形问题, 模板匹配很困难。目标或背景的亮度、对比度变化会导致模板匹配不稳定。

3. 光流法

光流法也是一种基于像素分析的方法, 这种方法在运动图像中得到了充分的运用。光流法一般假设: 运动物体表面平坦, 图像的反射模式除了在有限点上不连续外, 图像的灰度函数处处平滑; 物体表面入射光均匀; 在短的时间间隔内, 运动物体上某点的亮度不变; 物体没有被遮挡。在这种假设条件下, 图像中灰度模式的运动将直接由物体表面相应点的运动确定, 由此可以导出瞬时速度场(光流场), 然后根据光流场进行运动的检测^[8]。大多数的光流计算方法相当复杂, 且抗噪声能力差, 如果没有特别的硬件装置则不能被应用于全帧视频流的实时处理。光流分割方法不适合目标只有几个像素的情况, 这时光流计算的误差容易产生虚警。另外, 光流法只有当图像捕获的间隔很短时才适合。

1.1.2 基于特征检测的方法

基于特征检测的方法是根据图像特征或由特征组成的模型来检测运动, 识别运动物体, 由序列图像进行基于特征的运动检测方法分为以下三个步骤:

1. 变化图像的逐帧分割和目标特征的提取;
2. 目标特征的帧间对应关系建立;
3. 用特征相关计算运动参数。

基于特征的运动检测方法的关键步骤是目标特征的抽取和特征的相关计算。在一般的情况下, 主要利用的目标特征有: 角点、直边缘、曲边缘等局部特征和形心、表面积、周长、形殊点、投影特征、惯量矩的长短轴等全局特征^[9-11]。在已知目标的某些先验知识(如几何结构信息)的情况下, 将这些知识应用于实际条件下运动目标检测、识别与跟踪, 运动目标检测和跟踪就变成目标特征的检测和跟踪, 从而使运动目标检测跟踪问题变得简单而可靠。目前利用序列图像获取目标运动参数和结构参数的主要方法之一, 就是基于 R.S.Tai 和 T.S.Huang 提出的利用两帧图像中多个对应几何特征点的代数解法^[12]。缺点是对测量方法要求高, 只有在测量相当精确的条件下, 能够给出较精确的估计结果。

1.1.3 基于小波的目标检测方法

变换域中检测目标较典型的一种方法是基于傅立叶变换的方法。对图像序列进行傅立叶变换,运动目标的傅立叶变换的频谱幅度不变而相位谱为一个常数,利用这一性质,可以通过相位相关算法来估计运动特性,计算相邻帧间的相位角差来估计空间域中目标的位置^[13],它要求在图像序列中背景不变且只有一个运动目标 Mahmoud 对运动目标的变换方法进行了广泛的研究,除了 FFT 方法,他还提出了快速 Hartley 变换(FHT)进行多目标跟踪,该方法是先对图像序列进行频域处理,再进行峰值检测,Fourier 谱或 Hartley 谱的峰值位置则对应于运动目标的速度^[14]。该方法的独到之处是对多运动目标的 n 阶遮挡分别用冲击函数的对应次乘积求和表示,从而在一定程度上反映和解决了多目标遮挡的问题。

傅立叶变换是一种纯频域的分析方法,它在频域的定位性是完全准确的,即频域的分辨率高,而在时域则没有任何定位性或分辨能力,也就是说傅立叶变换反映的是整个信号全部时间下的整体频域特征,而不能提供局部时间段上的频率信息。在其基础上产生的短时傅立叶变换,也称为加窗傅立叶变换,虽然能研究信号在局部时间范围的频域特征,但其窗函数的大小和形状均与时间(空间)和频率无关而保持固定不变,这对分析时间和空间变化的信号来说是不利的。

近年来小波理论的迅速成熟和发展给目标检测理论带来了新的生机和活力,把小波理论应用到目标检测中成了新的研究热点,小波变换在图像处理、模式识别、计算机视觉等领域的应用也越来越普遍^[15]。而小波变换对不同的频率在时域上的取样步长是可调节的,即在低频时小波变换的时间分辨率较低,而频率分辨率较高;在高频时小波变换的时间分辨率较高,而频率分辨率较低,这正符合低频信号变化缓慢而高频信号变化迅速的特点。这便是它优于经典的傅里叶变换和短时傅里叶变换的地方,从总体上来说,小波变换比短时傅里叶变换具有更好的时频窗口特性^[16-22]。

小波分析或多分辨率分析是傅立叶分析发展史上的里程碑^[19-23]。小波变换的概念是1984年法国地球物理学家 J.Morlet 在分析、处理地球物理勘探资料时提出来的。小波变换的数学基础是19世纪的傅里叶变换,其后理论物理学家 A.Grossman 采用平移和伸缩不变性建立了小波变换的理论体系。1985年,法国数学家 Y.Meyer 第一个构造出具有一定衰减性的光滑小波^[24]。1988年,比利时数学家 I.Daubechies 证明了紧支撑正交标准小波基的存在性,使得离散小波分析成为可能。1989年, S.Mallat 提出了多分辨率分析概

念, 统一了在此之前的各种构造小波的方法, 特别是提出了二进小波变换的快速算法, 使得小波变换完全走向实用性。1996 年, W.Sweldens 提出了一种新的、简明有效的小波构造方案: “提升框架(Lifting Scheme)”, 该方法最大的优点是本位操作, 容易实现整数到整数的小波变换, 同时利用提升方法可把现存的所有紧支撑小波分解成更为基本和简单的步骤, 这给使用小波进行图像处理的应用提供了一种新的思路^[25-31]。

利用小波变换进行目标检测是利用小波的多分辨率特点, 降低图像中噪声的干扰, 提取有用的边缘、形状、角点等信息。例如在文献[33]中, 提出一种基于小波变换的目标形状描述方法, 并与 Fourier 描述进行了比较, 证实了小波描述符的优越性。文献[34]中, 对亮度图像进行小波模极大值变换以得到多尺度的边界图像, 再利用 7 个不变矩提取每一尺度边界图像的特征, 所有尺度上的不变矩共同组成图像的特征向量。图像的相似度用图像特征向量的加权欧氏距离表示, 具有较好的平移、尺度、旋转不变性。文献[35]中, 用高斯函数一阶导数作为小波函数, 用小波系数的模极大值提取图像边缘。文献[36]中, 采用一维小波变换降噪并获取图像边缘, 结合轮廓跟踪法与投影法对图像进行区域分割获取各目标存在区域, 再利用目标图像的不变矩进行目标识别。文献[37]中, 提出一种基于多尺度变换的二维图像角点检测算法, 对边缘的方向曲线进行多尺度小波变换, 利用变换结果的局部最大值信息检测和定位出图像角点。文献[38]中, 针对离散小波变换不具有平移不变性的问题, 提出了一种具有平移和尺度不变性的小波分解新方法, 该方法利用信号的一阶、二阶矩及正交小波尺度函数, 先对信号进行自适应小波重整, 然后再对重整后的信号进行普通的小波变换。这种自适应小波变换是平移和尺度不变的。在文献[39]中, 提出了根据感兴趣的特征来选择小波滤波器的方法。对于点目标, 使用各向同性的小波, 如各向同性的 Mexican 小波即可; 而如果要检测的目标具有方向特性, 就应该使用 Morlet、Cuchy 等方向小波。Kubota 等人提出的用小波多分辨分析技术, 实现实时特征提取的视觉系统^[40]。T.Kubota 等人提出基于像素融合的多尺度自适应边缘检测算法^[41]。Huntsberg 和 Jawerth 提出用小波技术进行自动目标检测和识别^[42-43]。利 B.S, Maniunath 等人提出利用 Gabor 变换进行目标检测^[44-45]等。徐继友、朱耆祥^[46]尝试将小波变换应用到空间目标跟踪技术中, 虽然只在软件平台上作了仿真试验, 也同样为小波在目标检测和跟踪中的应用奠定了基础。上面所述的各种目标检测方法, 在满足各自假设条件下皆取得很好的检测结果。但基于小波变换的目标检测算法的运算量往往很大, 很难应用到要求实时处理的系统中。而基于 Sweldens 等人提出的提升框架的小波变换, 尤

其基于提升方法的整数小波变换在运算量上大大降低^[29]，使小波变换的目标检测算法有望应用到实时处理系统中。

1.2 全书的主要内容及安排

研究工作是根据实际科研项目“电视跟踪系统”对目标检测的要求展开的，是在分析传统的目标检测方法基础上，把小波这一理论应用到实际的目标检测算法中，算法的实用性，及在跟踪系统领域的实时性，是研究的目的和方向。本书首先从理论上研究分析了小波变换理论用于目标检测的可能性，研究了利用小波变换的多分辨分析特性在边缘提取、去噪和图像增强等方面的优势，将三者结合起来准确提取出各尺度下目标的边缘特征。并研究了基于小波变换的弱小目标检测方法。重点研究了结构简单且易于硬件实现的基于提升方法的小波变换的目标检测方法，提出将提升项看作可调参数的目标检测方法。探讨基于提升方法的整数小波的目标检测方法。同时为了将复杂的小波目标检测算法应用在实时图像处理中，研究了目标检测算法在以 DSP 为核心器件的硬件平台上实现的可行性和优势。并在 DSP 系统上用典型小波的不同变换算法对图像实现小波变换，给出各种算法在 DSP 上的运行时间，为检测跟踪系统提供正确的引导数据。本书的主要内容和安排如下：

第 1 章，主要介绍目标检测方法的研究发展现状，阐述了研究小波变换实时目标检测的重要意义。

第 2 章，重点分析与目标检测相关的小波变换理论，阐述小波用于目标检测的优点。首先对傅立叶、Gabor 变换及小波变换的特点做了简单的对比分析，研究了小波变换的二维多分辨分析特性、Mallat 算法以及图像的多分辨分解与重建。研究探讨基于提升框架的小波变换，并分析易于实现的基于提升方法的整数小波变换。这一章内容是本书研究工作的理论支撑。

第 3 章，研究基于小波变换的目标边缘检测方法。研究小波变换用于目标边缘检测的原理；研究如何利用小波变换的局部模极大值方法进行目标边缘检测问题。提出采用多尺度自适应阈值的方法检测目标精细边缘。同时研究小波方法的目标预处理方法，主要研究基于小波变换的目标图像的去噪和增强。探讨将多尺度自适应阈值目标边缘检测算法与目标图像的去噪和增强三者结合起来，在抑制噪声的同时，加强图像中的有用信息，提取受噪声污染严重的目标边缘，提高目标检测的效率。

第 4 章，研究基于小波变换的弱小目标检测方法。从小波变换的基本理论出发，分析研究小波变换理论用于弱小目标检测的优势。在综合分析基于小波变换的各种弱小目标检测方法的基础上，结合小波多尺度变换算法，提出采用去噪和多尺度相关及能量交叉相结合检测弱小目标的方法，并通过仿真实验验证此种方法能有效的检测到对比度低于 3% 的弱小目标。

第 5 章，研究用第二代小波进行目标检测的方法。提升小波变换提供了一种快速实现方法，与经典 Mallat 算法相比，运算量减少一半；能够实现小波变换的原位计算，整个计算过程不需要辅助存储空间；很容易实现整数小波变换；且能够容易处理边界问题。提升小波变换方法放弃了二进平移和伸缩的条件，但获得的小波具有第一代小波的所有优点。本章研究用提升方法的小波变换的目标检测方法，并探讨分析基于提升方法的整数小波变换用于目标检测的问题。首次提出利用提升小波的提升项检测目标的方法。

第 6 章，对目标检测算法的硬件实现问题做深入的研究和分析，主要探讨了以多 DSP 为核心器件的目标检测系统的硬件结构和软件设计思想，以及各软件模块的工作过程。通过实验验证在 DSP 硬件系统上实现小波变换方法的可行性，并对实验结果进行分析，本章的内容为目标检测算法应用到实时处理实际应用奠定实验基础。

第 2 章 小波变换的基本理论

2.1 概 述

小波变换(wavelet transform)是 80 年代后期在傅立叶分析的基础上发展起来的,基本思想来自调和分析,具有严格的理论模型。继承和发展了 Garbor 变换局部化的思想,同时又克服了窗口固定、缺乏离散正交性等不足,从而成为近期研究较多的频谱分析工具。是近年来应用数学和工程学科中的一个迅速发展的新领域,是目前国际上公认的信号信息获取与处理领域的高新技术,是多学科关注的热点,是信号处理的前沿课题^{[16-20][47-49]}。

小波变换在信号分析中具有以下优点:

1. 具有多分辨率(Multiresolution)特点,即能够通过伸缩和平移等运算功能对信号进行多尺度细化分析(MultiscaleAnalysis);
2. 可以看成品质因数恒定、相对带宽恒定的一组带通滤波器在不同尺度下对信号的滤波,特别适合于非平稳信号分析;
3. 适当的选择基本小波,使之在时域上有限支撑,在频域上也比较集中,可以保证小波变换在时、频域中都能够具有很强的表征信号局部特征的能力,有利于检测信号的瞬态变化或奇异点。

本章第 2 节介绍连续小波变换的基本定义;第 3 节给出离散小波变换的定义和二进小波及其应用;第 4 节探讨小波变换的多分辨率分析问题;第 5 节研究著名的小波算法“Mallat”算法;第 6 节介绍 Mallat 算法在图像处理中的应用;第 7 节介绍基于提升框架的小波变换。

2.2 连续小波变换

2.2.1 连续小波变换的定义

设 $\psi(t) \in L(R) \cap L^2(R)$, 其傅立叶变换为 $\hat{\psi}(\omega)$, 如果 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足如下条件(称为容许条件)

$$C_{\psi} = \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.1)$$

则称 $\psi(t)$ 为基本小波(或母小波), 小波母函数 $\psi(t)$ 通过尺度伸缩和平移生成的如下函数族:

$$\psi_{a,b} = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \in R, a \neq 0, b \in R \quad (2.2)$$

称为由 $\psi(t)$ 生成的连续小波。其中 a 称为尺度参量, b 是平移参量。根据(2.1)式的容许条件要求, 当 $\omega=0$ 时, 为使被积函数为有效值必须有 $\hat{\psi}(0) = 0$, 所以可得到(2.1)式的等价条件为:

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

此式表明 $\psi(t)$ 中不含直流, 只含有交流即具有震荡性, 故称为“波”。为了使 $\psi(t)$ 具有局部性, 即在有限的区间之外很快衰减为零, 还必须加上一个衰减条件:

$$|\psi(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}, \varepsilon > 0, c > 0 \text{ 为常数} \quad (2.4)$$

(2.4)的含义是: 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $\psi(t)$ 的衰减比 $1/|t|$ 快, 衰减条件要求小波具有局部性, 这种局部性称为“小”, 故(2.1)式称为小波。小波变换定义为:

$$w_f(a,b) = \int_R f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = |a|^{-1/2} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (2.5)$$

2.2.2 小波的时频窗

小波是时域和频域中的局部函数, 因此也可以类似窗口函数, 定义其时频中心和半径, 用来衡量它的局部化程度。按照正、负两个频段 $(0, \infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 来定义小波的频域中心和半径。

$$\omega_0^+ = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|^2} \int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}|^2 d\omega > 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta\omega_0^+ = \left[\frac{1}{\|\hat{\psi}\|^2} \int_0^\infty (\omega - \omega_0^+)^2 |\hat{\psi}|^2 d\omega \right]^{1/2} > 0 \quad (2.7)$$

$$\omega_0^- = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|^2} \int_{-\infty}^0 \omega |\hat{\psi}|^2 d\omega < 0 \quad (2.8)$$

$$\Delta\omega_0^- = \left[\frac{1}{\|\hat{\psi}\|^2} \int_0^\infty (\omega - \omega_0^-)^2 |\hat{\psi}|^2 d\omega \right]^{1/2} > 0 \quad (2.9)$$

按照上述定义小波 $\psi_{a,b}(t)$ ($a > 0$) 的时频窗中心和半径经计算分别为;

$$t_{a,b} = at_0 + b, \Delta t_{a,b} = a\Delta t_0 \quad (2.10)$$

$$\omega_{ab}^+ = \frac{1}{a} \omega_0^+, \Delta\omega_{a,b}^+ = \frac{1}{a} \Delta\omega_0^+ \quad (2.11)$$

$$\omega_{ab}^- = \frac{1}{a} \omega_0^- = -\omega_{ab}^+, \Delta\omega_{ab}^- = \frac{1}{a} \Delta\omega_0^- = \Delta\omega_{ab}^+ \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{4}S = \Delta t_{ab} \Delta\omega_{ab} = \Delta t_0 \Delta\omega_0 \quad (2.13)$$

从上述三个公式中我们可以看出, 当 a 较大时 (相当于低频) 时域分辨率较低, 频域分辨率较高; 当 a 较小时 (相当于高频) 时域分辨率较高, 频域分辨率较低。因此当 a 从小逐渐大时, 时频分辨率就会发生相应的变化, 这种特性称为小波的“变焦”特性或多分辨率分析。然而, 由测不准原理可知, 无论 a 如何变化窗口的面积是保持不变的, 即时域分辨率的增加, 必然导致频域分辨率的减小, 反之亦然^[18-19]。

2.2.3 傅立叶变换、Gabor 变换与小波变换的对比

傅立叶变换是时域到频域互相转化的工具, 它确定了信号在整个时间域上的频率特性。但在实际应用中, 我们往往需要知道, 信号在某一时刻附近的频谱特性, 傅里叶变换是做不到的。Gabor 变换即短时傅立叶变换把信号划分成许多小的时间间隔, 以便确定在该时间间隔内的频谱信息。Gabor 变换在一定程度上克服了标准傅立叶变换不具有局部分析能力的缺陷, 但它也存在着自身不可克服的缺陷, 即当窗函数选定后, 矩形窗口的

形状就确定了。只能改变窗口在时频平面上的位置,而不能改变窗口的形状。短时傅立叶变换比较适合分析较平稳的信号,而不太适合分析非平稳信号。小波分析能够较好地克服短时傅立叶的不足,它提供了一个随频率改变的时间—频率窗口。小波基通过改变尺度因子 a 使被分析信号在高频时(a 小)时间域分辨率高,低频时(a 大)频率域分辨率高,达到了多分辨率分析的效果。小波分析的这种特点适合非平稳信号的处理^{[15][19-20]}。

图 2.1 和 2.2 分别给出了 Gabor 变换的相平面和小波变换的相平面。从图中可以清楚地看出两者的差别与联系。表 2.1 给出傅立叶变换、Gabor 变换与小波变换的特征。

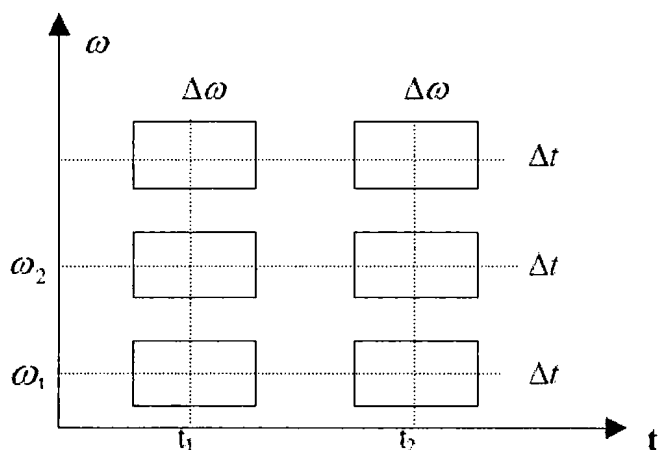


图 2.1 Gabor 变换的相平面

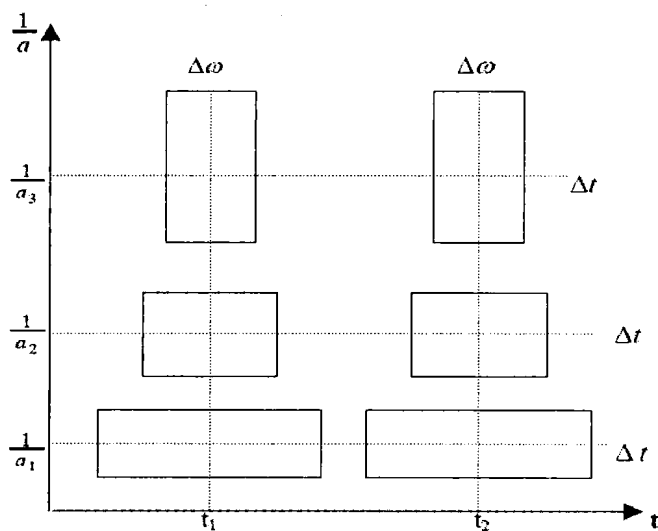


图 2.2 小波基函数的相平面