



读考研书 找人大社



2010 年考研 数学 新编考试参考书

主编 李恒沛

● 权威命题专家亲自编写 ● 理工经济通用

针对历年考研试题概念性强、综合性强、运算性强，灵活考查考生推理与应用能力的特点，全面精讲精练，重点突出

例题选择多样化，典型性强，解析透彻，侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用

每章后精选习题，与例题相互补充，深化内容

2010 年考研 数学新编考试参考书

主 编 李恒沛
编著者 (以姓氏笔画为序)
李恒沛 贺家宁
高文森 陶 荟

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获取 20 位数字编码



← 上 www.1kao.com.cn 注册



← 登录增值服务进免费课堂

2010

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2010 年考研数学新编考试参考书/李恒沛主编. 6 版

北京: 中国人民大学出版社, 2009

ISBN 978-7-300-04657-0

I. 2...

II. 李...

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 071718 号

李恒沛 主编
(中国人民大学出版社)
李恒沛 主编
李恒沛 主编

2010 年考研数学新编考试参考书

主编 李恒沛

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州星河印刷有限公司

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

印 张 38

字 数 960 000

邮政编码 100080

010-62511398 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2004 年 4 月第 1 版

2009 年 6 月第 6 版

印 次 2009 年 6 月第 1 次印刷

定 价 59.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

郑重声明

李恒沛教授主编的《考研数学新编考试参考书》一书，是深受广大考生欢迎的数学类考研书，该书以其名师的底蕴、翔实的内容、权威的解释等，成为全国考研的畅销书。

正因为该书的畅销，其也成为一些不法之徒盗印盗销的重点。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律在内的一切合法手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带 20 位密码网上注册查真伪。(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国 1 考网 (www.1kao.com.cn) 查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275

编辑电话：010-62511915

咨询电话：010-62511349

电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师

北京市洪范广住律师事务所

徐波

2009 年 5 月

全面复习 综合提高

数学在研究生入学考试中占据了接近三分之一的分值，数学考试能否取得理想成绩对于考研的成功与否至关重要。

李恒沛教授多年参加研究生入学考试命题工作，其积多年丰富经验所主编的这本《考研数学新编考试参考书》，内容权威，针对性强，对于考生进行全面复习、综合提高应试能力效果显著，初版以来广受历年考生好评。

考研是一项系统工程，在全面复习数学的同时，考生还需要在其他方面下工夫。相关图书如下：

考研英语 《2010年考研英语词汇复习指南》《2010年考研英语新教程》
《历年考研英语真题名家详解》《2010年考研英语阅读200篇》
《2010年考研英语写作专项突破》《2010年考研英语阅读Part B全突破》

考研政治 《2010年考研政治理论课常考知识点》《最新考研政治真题命题研究与高分策略》
《2010年考研政治理论复习导本》《2010年考研政治真题解析与预测考点背诵》
《2010年硕士研究生入学考试政治理论课复习指导》

考研数学 《2010年考研数学经典讲义》《考研历届数学真题题型解析》
《2010年考研数学最新精选600题》《2010年考研数学经典冲刺5套卷》

经过认真复习，我们相信您定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

前言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第一至八章）、线性代数（第九章）、概率论与数理统计（第十章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并说明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录1为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生使用），附录2、附录3分别为2008年和2009年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用。本书也可供在读本科生加深理解学习内容、复习备考以及教师教学参考使用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：（1）概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。（2）综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。（3）运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运算自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力。这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不烦琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；章章小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演算习题，两者都是很重要的。

本书由李恒沛、高文森、贺家宁、陶荟编写，全书由李恒沛统稿。

编著者均长期在重点大学从事数学教学和科研工作,有的参加过多年全国统考数学试题的命制,有的从事过多年考研辅导,并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析,积累了丰富的教学经验,对考研命题有深入的研究,考研辅导效果显著。编著者愿本书的出版对考研学子有所裨益。

本书在编写过程中,主要参考了如下资料:

教育部:《2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,高等教育出版社,2008。

全国高校工科数学课程教学指导委员会《工科数学》编委会:《工科数学·二零零一年考研专辑》,2001。

蔡燧林、张继昌:《研究生数学入学考试精编》(第二版),浙江大学出版社,2000。

李恒沛、王日爽、萧亮壮:《全国研究生入学数学统考应试指导》,广西科学技术出版社,1988。

编著者

于北京,2009 年 4 月

目 录

第一章 函数、极限、连续性	1
§1 函数	1
§2 极限	4
§3 连续性	18
小结与习题	26
第二章 一元函数微分学	32
§1 导数与微分	32
§2 微分中值定理	45
§3 导数的应用	67
小结与习题	76
第三章 一元函数积分学	82
§1 不定积分	82
§2 定积分	98
§3 定积分的应用	117
§4 广义积分	125
小结与习题	129
第四章 向量代数和空间解析几何	138
§1 空间直角坐标系与向量代数	138
§2 平面与直线	142
§3 二次曲面	151
小结与习题	154
第五章 多元函数微分学	157
§1 多元函数微分法	157
§2 多元函数微分学的应用	170
小结与习题	183
第六章 多元函数积分学	187
§1 二重积分与三重积分	187
§2 曲线积分	203
§3 曲面积分	216
小结与习题	229
第七章 无穷级数	235
§1 常数项级数	235

§ 2 幂级数	247
§ 3 傅里叶(Fourier)级数	262
小结与习题	267
第八章 常微分方程	274
§ 1 一阶微分方程	274
§ 2 高阶微分方程降阶解法	286
§ 3 线性微分方程	290
§ 4 微分方程的应用	302
小结与习题	311
第九章 线性代数	314
§ 1 行列式	314
§ 2 矩阵及其运算	322
§ 3 向量	334
§ 4 线性方程组	349
§ 5 矩阵的特征值和特征向量	366
§ 6 二次型	386
小结与习题	399
第十章 概率论与数理统计	418
§ 1 随机事件和概率	418
§ 2 随机变量及其概率分布	428
§ 3 二维随机变量及其概率分布	444
§ 4 随机变量的数字特征	463
§ 5 大数定律与中心极限定理	484
§ 6 数理统计的基本知识	490
§ 7 参数估计	500
§ 8 假设检验	517
小结与习题	524
附录 1 差分方程简介	545
附录 2 2008 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	547
附录 3 2009 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	577

函数、极限、连续性

§1 函 数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义: 设有两个变量 x 与 y , 如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时, 变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量, 也称 y 是因变量, 称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性: 设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义, 如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 (或单调减少的).

(2) 奇偶性: 设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义, 如果对于 I 内任意点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性: 设 $y = f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内有定义, 若存在一个正的常数 T , 使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在 $M > 0$, 使得对于任何 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u , $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x , 值域为 E , 若 $E \subseteq D_u$, 则对于任何 $x \in D_x$, 有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应, 而 $u \in E \subseteq D_u$, 故又有确定的 y 与 u 对应, 从而, 对于任何 $x \in D_x$, 都有确定的 y 与 x 对应, 按照函数的定义, 确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立起 y 与 x 的对应关系的, 因而, 称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数, 记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y , 如果对于 D_y 中的任何一个 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值, 则按照函数的定义, 也确定了 x 是 y 的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上, 用 x 表示自变量、 y 表示因变量, 因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

注意: $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图象是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数: 称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数).

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内, 其对应法则有着不同的初等函数表达式, 则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容, 应重点掌握以下几点:

(1) 理解函数的概念, 掌握函数的表示法.

例如, 应会求函数的定义域和值域, 会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式, 即从 $f(\varphi(x)) = g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式, 尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如, 应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例1 已知 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

分析: 这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式, 欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题. 此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中, 令 $\varphi(x) = u$, 即可得到 $f(u)$ 的表达式, 从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解: 令 $x + \frac{1}{x} = u$, 则有

$$f(u) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} = \frac{1}{u^2 - 2},$$

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

例2 已知 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为偶函数, 且 $f(x) = 2x^2 + x$ ($x \in [-2, 0]$), 那么当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 的表达式为().

(A) $2x^2 + x$ (B) $2x^2 - x$ (C) $-2x^2 + x$ (D) $-2x^2 - x$

分析: 已知函数的奇偶性时, 可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x \in [0, 2]$ 时, $-x \in [-2, 0]$, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以有

$$f(x) = f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) = 2x^2 - x.$$

解: 应选 B.

例3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析: 这是一个分段函数求复合函数的问题, 按照一般求复合函数的方法, 先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数, 要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

$$\text{解: } f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leq 1, \\ 0, & |g(x)| > 1, \end{cases}$$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| \leq 1$, 当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| > 1$.

先来讨论使 $|g(x)| \leq 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x| \leq 2$ 时才可能使 $|g(x)| \leq 1$.

在 $|x| \leq 2$ 范围内, 要使 $|g(x)| = |2 - x^2| \leq 1$, 只需

$$1 \leq |x| \leq \sqrt{3}.$$

所以, 当 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ 时, 有 $|g(x)| \leq 1$.

再来讨论使 $|g(x)| > 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x| > 2$ 时 $|g(x)| > 1$. 另外, 当 $\sqrt{3} < |x| \leq 2$ 或 $|x| < 1$ 时, 也有 $|g(x)| > 1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \text{ 或 } |x| < 1. \end{cases}$$

例 4 设 $y = (a - x^b)^{\frac{1}{n}}$, 当 a, b 满足条件_____时, 该函数的反函数与该函数相等.

分析: 由 $y = (a - x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x = (a - y^n)^{\frac{1}{b}},$$

也即反函数为 $y = (a - x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b = n, a$ 为任意值时, 反函数与直接函数相等.

解: 应填 $b = n, a$ 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单增, $f(x)$ 在 $[g(a), g(b)]$ 上单减, 则 $f(g(-x))$ ().

(A) 在 $[a, b]$ 上单增

(B) 在 $[a, b]$ 上单减

(C) 在 $[-b, -a]$ 上单增

(D) 在 $[-b, -a]$ 上单减

分析: 首先, 可知保证 $f(g(-x))$ 有定义的区间应是 $[-b, -a]$, 所以, 可排除 A、B 选项.

然后, 再用单调性定义判断.

任取 $x_1, x_2 \in [-b, -a], x_1 < x_2$, 则

$$-x_1, -x_2 \in [a, b], \text{ 且 } -x_1 > -x_2.$$

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1) > g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1)) < f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在 $[-b, -a]$ 上单增.

解: 应选 C.

例 6 设 $y = \frac{1}{2x}f(t-x)$, 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$, 求 $f(x)$.

解: $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}f(t-1) = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$.

从而 $f(t-1) = t^2 - 2t + 10$.

令 $t-1 = x$, $f(x) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 10$.

所以 $f(x) = x^2 + 9$.

例 7 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \neq 1$), 则 $f(f(f(f(x)))) =$ _____.

分析: $f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$ ($x \neq 1$),

$$f(f(f(x))) = \frac{f(f(x))}{f(f(x))-1} = \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 1).$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1).$$

解:应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为().

(A) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(B) $f(x) = ([x])^2$

(C) $f(x) = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$

(D) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析:此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数, B 选项的函数非奇非偶, 故只有选择 C.

因为此时

$$\begin{aligned} f(-x) &= (2 + \sqrt{3})^{-x} + (2 - \sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^x \\ &= (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = f(x). \end{aligned}$$

解:应选 C.

例 9 下列函数中不是周期函数的应为().

(A) $f(x) = \sin^2 x$

(B) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$

(C) $f(x) = \sin 2x + \cos \pi x$

(D) $f(x) = x - [x]$

分析:因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, 故 $f(x)$ 为周期函数, 其最小正周期为 $T = \pi$. 容易看出, $\sin \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π , $\cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期为 6π , 从而其和的最小正周期为 12π . 同理 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π , $\cos \pi x$ 的最小正周期为 2, 从而其和不是周期函数. 至于 $f(x) = x - [x]$ (若 $x = n + \alpha$, n 为整数, 且 $0 \leq \alpha < 1$, 则 $[x] = n$), 容易验证它为周期函数. 事实上, 设 $x = n + \alpha$, n 为整数, $0 \leq \alpha < 1$, m 为整数, 则

$$\begin{aligned} f(m+x) &= f(m+n+\alpha) = m+n+\alpha - [m+n+\alpha] \\ &= m+n+\alpha - m - [n+\alpha] = n+\alpha - [n+\alpha] \\ &= x - [x] = f(x). \end{aligned}$$

于是所有整数 m 都是 $f(x)$ 的周期, 而最小正周期为 1. 综上分析, 应选 C.

解:应选 C.

§ 2 极 限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义: 对于数列 $\{x_n\}$, 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 也记为 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义.

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 时的无穷小.

(5) 无穷大的定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

类似地, 可定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

类似地, 还可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$,

① 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 高阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

② 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A (A \neq 0)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 同阶的无穷小, 记为 $\alpha = O(\beta)$; 特别地, 当 $A = 1$ 时, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 等阶的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$;

③ 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

(2) (保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0 (A < 0)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0 (f(x) < 0)$.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$, 则 $A \geq 0 (A \leq 0)$.

(4) (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0, \delta)$, 使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0, \delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或其他过程) 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) (夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域(或 $|x|$ 充分大时) 内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1+f(x))^{1/f(x)} = e.$$

5. 极限的运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$;

(3) 若 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大; 反之, 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.(6) (等价无穷小替换) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容, 应重点掌握以下几点:

(1) 利用极限的运算法则求极限.

(2) 利用两个重要极限求极限.

(3) 利用等价无穷小替换求极限.

(4) 利用极限存在准则求极限.

(5) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

(6) 利用函数的连续性求极限.

(7) 利用“洛必达法则”求极限.

上述(6)、(7)项的内容将在后面复习.

二、例题分析

例1 “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的 ().

(A) 充分但非必要条件

(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分又非必要条件

分析: 此题是 1999 年全国考研数学二原题, 考查对数列极限的定义的理解. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义是“对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”. 两种说法相比较, 似乎定义中的条件更强些, 显然, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义必能推出“对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”. 其逆是正确的. 因为对任意 $\epsilon_1 > 0$, 取 $\epsilon = \min\left(\frac{\epsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 显然 $\epsilon \in (0, 1)$, 所以总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$. 现取 $N_1 = N - 1$, 于是当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \frac{2\epsilon_1}{3} < \epsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的, 即选项 C 是正确的.

解: 应选 C.

例2 若 ϵ 为任意给定的正数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件为 ().

(A) $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的全部点

(B) $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

(C) $U(a, \epsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点

(D) $U(a, \epsilon)$ 之外可能有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

分析: 由于“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”的精确含义是“对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ ”, 所以, 在 $U(a, \epsilon)$ 内不一定有 $\{x_n\}$ 的全部点, 只含有满足 $n > N$ 的 x_n , 所以 A 不对. 而 B “ $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点” 只能保证在某 N 之后的无穷多项 x_n 在 $U(a, \epsilon)$ 内, 而不能保证 N 之后的一切 x_n 都在 $U(a, \epsilon)$ 内, 故 B 也不对. C “ $U(a, \epsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点” 能保证存在 N , 当 $n > N$ 时的 x_n 都在 $U(a, \epsilon)$ 内, 所以, C 与 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ” 是可以互相推出的. 易知 D 项也不对.

解: 应选 C.

例3 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

分析: 此题是 2000 年全国考研数学三的原题. 有的考生认为由条件 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$ ” 则可得出 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ ”, 但它们不一定为零, 故错选为 B. 事实上, 由条件 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$ ” 不一定能保证 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 的存在, 例如若取 $g(x) = e^x + e^{-x}$, $\varphi(x) = e^x - e^{-x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 都不存在. 这样, 可以想象, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 也不一定存在了. 例如取 $f(x) = e^x$, 则 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

解: 应选 D.

例4 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ().

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

分析: 由于极限值的大小只能反映当 $n \rightarrow \infty$ 时的数列的变化趋势, 不能反映前面有限项的取值情况. 所以, A、B 选项都是不正确的. 又如 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{a_n} = 1$ 知 C 选项也不正确. 由无穷大的定义易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 所

以, D 选项正确.

解: 应选 D.

例 5 设 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 为().

(A) 无穷大量

(B) 无穷小量

(C) 有界变量

(D) 无界变量

分析: n 为奇数时, $x_n \rightarrow \infty$.

n 为偶数时, $x_n \rightarrow 0$.

所以, x_n 既不是无穷大量, 也不是无穷小量. 由于 $x_n \rightarrow \infty$ (n 为奇数), 所以 x_n 不是有界变量而是无界变量, 故 D 选项正确.

解: 应选 D.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是().

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

分析: 由于 $f(x)$ 单调, 所以若 $\{x_n\}$ 单调时必有 $\{f(x_n)\}$ 单调, 又 $f(x)$ 有界, 因此 $\{f(x_n)\}$ 是单调有界的数列, 由极限存在的准则知 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故应选择 B. 下面再看选项 A、C、D 的不正确性.

设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $f(x) = \begin{cases} \arctan x + 1, & x \geq 0, \\ \arctan x - 1, & x < 0, \end{cases}$ 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, 且 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 但

$$f(x_n) = \begin{cases} \arctan \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] + 1, & n \text{ 为偶数,} \\ \arctan \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] - 1, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n}) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n+1}) = -1$,

从而 $\{f(x_n)\}$ 不收敛, 此例说明 A 不正确.

设 $x_n = n$, $f(x) = \arctan x$, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, $f(x_n) = \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($n \rightarrow \infty$), 但是 $\{x_n\}$ 不收敛. 此例说明 C 不正确. 由于此时 $\{f(x_n)\}$ 也是单调的, 故此例也说明 D 不正确.

解: 应选 B.

例 7 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则必有().

(A) $f(x_0) = A$

(B) $f(x_0)$ 存在但不一定为 A

(C) 存在邻域 $U^0(x_0, \delta)$, 使 $f(x)$ 在其中有界

(D) 对任何邻域 $U^0(x_0, \delta)$, $f(x)$ 在其中有界

分析: 由极限的定义知 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ” 的精确含义是 “对任何给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $U^0(x_0, \delta)$, 使得 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ ”, 易知 C 正确. 而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的, 故 A、B 不正确. 由极限的定义可知 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ” 只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界, 故要求 $U^0(x_0, \delta)$ 中的 δ 较小, 不能保证在任何的 $U^0(x_0, \delta)$ 内 $f(x)$ 有界, 所以 D 也不对.

解: 应选 C.

例 8 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是().

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$

(B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - 1$

(D) $1 - \cos \sqrt{x}$