中国科学院教材建设专家委员会规划教材

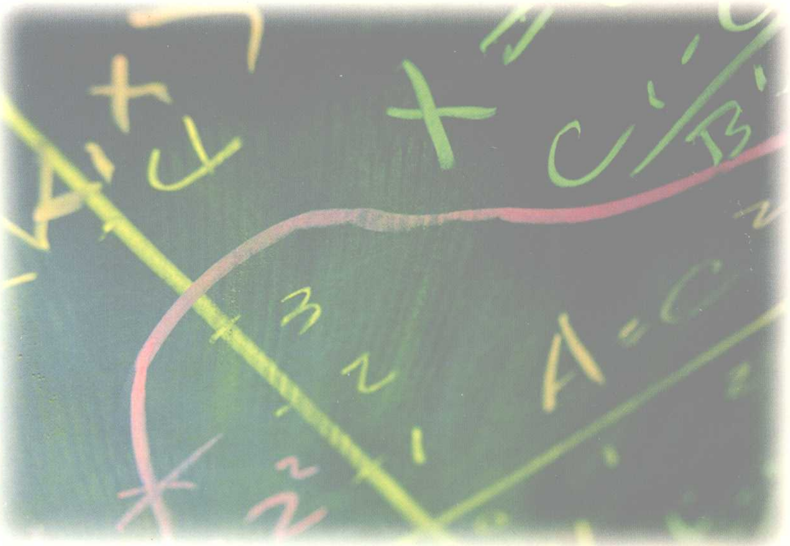
全国高等医学院校规划教材

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、法医等专业使用

案例版™

医学高等数学

郭东星 主编



科学出版社

www.sciencep.com

医学高等数学

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医学院校规划教材

案例版™

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、法医等专业使用

医学高等数学

主　编　郭东星
副主编　祁爱琴　李新元　王培承
编　委　(以姓氏笔画为序)
王培承(潍坊医学院)
孔　杨(滨州医学院)
祁爱琴(滨州医学院)
杨　晶(天津医科大学)
李建明(山西医科大学)
李新元(天津医科大学)
谷小萱(天津医科大学)
周立业(山西医科大学)
胡西厚(滨州医学院)
郭东星(山西医科大学)

科学出版社
北　京

郑 重 声 明

为顺应教育部教学改革潮流和改进现有的教学模式，适应目前高等医学院校的教育现状，提高医学教学质量，培养具有创新精神和创新能力的医学人才，科学出版社在充分调研的基础上，引进国外先进的教学模式，独创案例与教学内容相结合的编写形式，组织编写了国内首套引领医学教育发展趋势的案例版教材。案例教学在医学教育中，是培养高素质、创新型和实用型医学人才的有效途径。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学：案例版/郭东星主编. —北京：科学出版社，2008
中国科学院教材建设专家委员会规划教材・全国高等医学院校规划教材
ISBN 978-7-03-022293-0

Ⅰ. 医… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 医用数学-医学院校-教材 Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 084739 号

策划编辑：李国红　周万灏 / 责任编辑：周万灏　李国红 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：刘士平 / 封面设计：黄　超

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第　一　版　　开本：850×1168　1/16
2008 年 7 月第一次印刷　　印张：13
印数：1—5 000　　字数：338 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　　言

本书是科学出版社为适应目前高等医学教育的现状，本着深化课程体系与教学方法的改革，借鉴国外先进的 PBL(Problem-Based Learning)教学方法，采用案例与教学内容相结合的模式，组织编写的教材. 教材的特点体现在：

1. 融案例于教材中，用案例引导教学，并以此作为学生获取知识和解决问题的切入点.

2. 注重数学的基础理论、基本知识的讲解以及对学生基本技能的培养. 在此基础之上，尽量体现教材的思想性、先进性、科学性、启发性和适用性.

3. 全书既保持了数学基本的知识体系，又具有比较鲜明的医学教育特色. 加强了基础学科与医学学科相结合的特点，突出了利用数学的理论知识解决医学问题的思想.

本书以五年制临床医学专业、药学专业本科生为主要使用对象，兼顾与医学相关的其他专业. 全书共九章，涵盖了微积分学、常微分方程、线性代数基础、概率论初步等教学内容. 可按照不同类型的学校和专业，在教学中根据各自的情况有选择地使用.

本书在编写和出版过程中得到山西医科大学、天津医科大学、滨州医学院、潍坊医学院以及科学出版社的大力支持和帮助，山西医科大学韩红娟老师在校对工作中做了大量工作，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢.

虽然编委们在工作中认真求实，兢兢业业，但由于水平所限，错误和不当之处仍在所难免. 恳请同行和使用本书的广大师生不吝赐教，予以指正.

编　者

2008 年 5 月于山西

目　录

前言

第 1 章　函数与极限 ……………………………… (1)

第一节　函数 ……………………………… (1)

第二节　极限 ……………………………… (6)

第三节　函数的连续性 ……………………… (11)

习题一 ……………………………………… (15)

第 2 章　导数与微分 ………………………… (17)

第一节　导数的概念 ………………………… (17)

第二节　求导法则 …………………………… (22)

第三节　微分 ………………………………… (30)

习题二 ……………………………………… (38)

第 3 章　导数的应用 ………………………… (41)

第一节　微分中值定理 ……………………… (41)

第二节　洛必达法则 ………………………… (44)

第三节　函数的单调性与极值 ……………… (45)

第四节　函数的凹凸性与拐点 ……………… (48)

第五节　渐近线与函数作图 ………………… (49)

习题三 ……………………………………… (51)

第 4 章　不定积分 …………………………… (53)

第一节　不定积分的概念与性质 …………… (53)

第二节　换元积分法 ………………………… (56)

第三节　分部积分法 ………………………… (61)

第四节　有理式的积分 ……………………… (63)

习题四 ……………………………………… (65)

第 5 章　定积分及其应用 …………………… (67)

第一节　定积分的概念及性质 ……………… (67)

第二节　微积分基本公式 …………………… (71)

第三节　定积分的计算 ……………………… (74)

第四节　反常积分 …………………………… (76)

第五节　定积分的应用 ……………………… (79)

习题五 ……………………………………… (85)

第 6 章　多元函数微积分 …………………… (88)

第一节　一般概念 …………………………… (88)

第二节　二元函数的极限与连续性 ………… (91)

第三节　偏导数 ……………………………… (92)

第四节　全微分 ……………………………… (95)

第五节　多元复合函数的求导法则 ………… (96)

第六节　多元函数的极值 …………………… (98)

第七节　二重积分的概念和性质 …………… (104)

第八节　二重积分的计算 …………………… (107)

习题六 ……………………………………… (111)

第 7 章　微分方程 …………………………… (113)

第一节　微分方程的一般概念 ……………… (113)

第二节　可分离变量的微分方程 …………… (115)

第三节　一阶线性微分方程 ………………… (118)

第四节　几种可降阶的微分方程 …………… (121)

第五节　二阶常系数线性齐次微分方程 …… (125)

第六节　微分方程模型应用简介 …………… (130)

习题七 ……………………………………… (134)

第 8 章　线性代数初步 ……………………… (136)

第一节　行列式 ……………………………… (136)

第二节　矩阵及其运算 ……………………… (143)

第三节　矩阵的初等变换与线性方程组 …… (148)

第四节　向量的线性相关性及线性方程组解的结构 ……………………………… (152)

第五节　方阵的特征值和特征向量 ………… (155)

第六节　线性代数在生物学中的应用 ……… (157)

习题八 ……………………………………… (159)

第 9 章　概率论 ……………………………… (162)

第一节　随机事件及其运算 ………………… (162)

第二节　随机事件的概率 …………………… (165)

第三节　概率的基本运算法则 ……………… (166)

第四节　全概率公式和贝叶斯公式 ………… (170)

第五节　贝努利概型 ………………………… (172)

第六节　随机变量及其概率分布 …………… (173)

第七节　随机变量的数字特征 ……………… (180)

第八节　大数定律与中心极限定理 ………… (185)

习题九 ……………………………………… (188)

附录一：习题参考答案 ……………………… (190)

附录二：标准正态分布函数表 ……………… (199)

附录三：主要参考书目 ……………………… (201)

第1章 函数与极限

Function and Limit

案例 1-1

当 Apollo 13 登月失败返回地球时，空气净化器出现故障，三名宇航员利用身上的衣袜等纤维制品填充了一个长 30cm 的圆柱形容器，抽动空气来吸收 CO_2，空气中的 CO_2 浓度为 8%时，在容器内通过 10cm 厚度后浓度可降至 2%.

问题：

求出口处的 CO_2 浓度为 1%，吸收层厚度至少为多少？

函数是事物间质与量相互联系、相互制约规律的数学抽象，也是表达变量间复杂关系的基本数学形式. 极限则动态的刻画了变量的运动和演进的变化趋势，是深入研究函数的重要方法. 本章在初等数学基础上进一步介绍函数、极限、连续等内容，是一元函数的基础理论，是学习微积分的重要基础.

第一节 函　　数

一、函数的概念

事物的发展和变化，本质上是量的演变. 如果在所考虑的问题或过程中，一个量始终保持同一数值，例如，圆周率 π，这样的量称为**常量(constant)**. 如果在研究范围内，一个量可以有不同的数值，这样的量称为**变量(variable)**. 儿童服药的剂量可能取决于儿童的体重，如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量；若此疗程长达数年，其体重就是一个变量，因此，一般可以把常量看成特殊的变量.

定义 1.1　设 x 和 y 是同一过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，按照一定的对应法则，变量 y 总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数(function)**. 变量 x 称为**自变量(independent variable)**，变量 y 称为**因变量(dependent variable)**，记为

$$y = f(x), x \in D$$

D 是自变量 x 的所有允许值的集合，称为函数的**定义域(domain)**. 而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的**值域(range)**，记为 R .

从函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是决定函数的主要因素，当他们确定以后，函数的值域也就相应的确定了.

在数学中，通常不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数，我们约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量取值的全体.

例 1.1　确定下列函数的定义域

(1) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x-1}$；

(2) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$.

解：显然要求函数的定义域，只需求出使函数有意义的 x 的取值范围即可.

笔记栏

(1) 要使函数有意义，必有

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

解此不等式得 $x>1$ 或 $x\leqslant -1$，所以该函数的定义域可表示为

$$(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

(2) 要使函数有意义，必有 $\dfrac{1-x}{3}>0$，

所以该函数的定义域可表示为 $(-\infty,1)$.

在实际问题中，求函数的定义域要注意其实际意义.

例 1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的高度为 h，运动规律为 $s=0.5gt^2$，其中 g 为重力加速度，求函数 s 的定义域.

解：从抽象的算式看，t 可以取一切实数值，但考虑到实际意义，显然应有

$$t\geqslant 0 \text{ 且 } 0\leqslant s\leqslant h, \text{而 } t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

故定义域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$.

函数的表达方式通常有公式法、图像法和表格法，甚至可以用一段文字来表述.

例 1.3 2003 年中国非典型肺炎(SARS)流行时，感染人数随时间变化的规律通过实际观测的数据表示，我们用最引人关注的时间段里公布的全国疫情报告中的 8 组数据来反映新增病例数 N 与时间 t 的关系，表格表示法见表 1.1.

表 1.1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期(月/日)	4/28	5/1	5/4	5/7	5/9	5/12	5/15	5/17
标示时间(t_i)	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数(N_i)	206	187	163	159	118	75	52	28

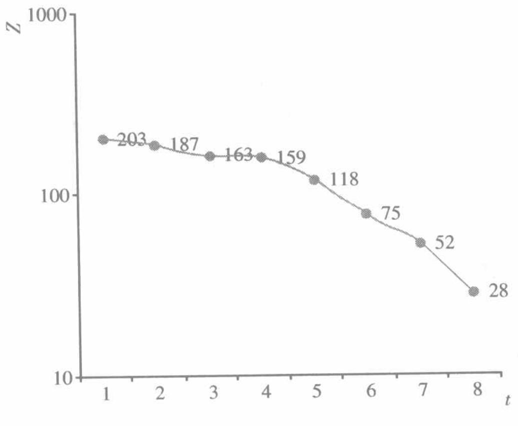


图 1.1

将表 1.1 中的数据 (t_i,N_i) 以描点的形式标记在坐标平面上，然后用光滑的曲线连接这些点. 则此曲线 $N=N(t)$ 也表示这个时间段全国新增病例数 N 与时间 t 的关系，此为图形表示法，见图 1.1.

当然，还可以用解析式法表示 N 与时间 t 的关系. 由于影响新增病例数 N 的因素很多，绝非一个时间变量 t 所能完全确定的，故 $N=N(t)$ 这类解析式只能近似模拟这种关系，例如用 $N(t)=\alpha+\beta t^\gamma$ 来拟合这一关系，这里 α、β、γ 均为常数，在流行病学中有具体含义.

二、分段函数

在生物、医学和工程技术等应用中，经常遇到一类函数，当自变量在不同范围内取值时，其表达式也不同，这类函数就是**分段函数(piecewise function)**. 历史上最著名的 **Dirichlet 函数**就是一个分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数};\\ 1, & x\text{ 是有理数}.\end{cases}$$

例 1.4 取整函数:设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数简称为 x 最大整数,记为 $f(x)=[x]$. 例如, $[\pi]=3$, $[\sqrt{3}]=1$, $\left[\frac{2}{5}\right]=0$, $\left[-\frac{2}{5}\right]=-1$,取整函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是整数集 Z ,这是一个分段函数,它的图形是阶梯状的,见图 1.2.

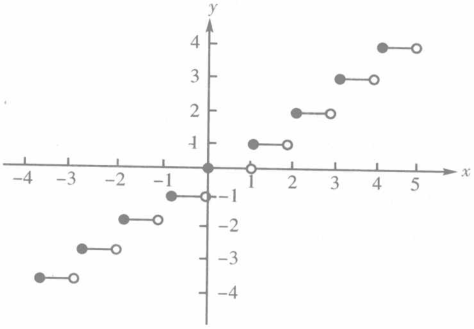


图 1.2

例 1.5 在生理学研究中,血液中胰岛素浓度 $c(t)$ (单位/毫升)随时间 t (min)变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25e^{-k(t-5)} & t>5.\end{cases}$$

式中 k 为常数,这是一个分段函数,见图 1.3.

例 1.6 未成年人服药剂量的 Cowling 公式为 $c=\frac{(a+1)d}{24}$,根据此公式,到多大年龄时,该剂量达到成人剂量?

显然,令 $c=d$ 可解出 $a=23$,故 Cowling 公式应为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{(a+1)d}{24} & a<23\\ d & 23\leqslant a.\end{cases}$$

这是一个分段函数,见图 1.4.

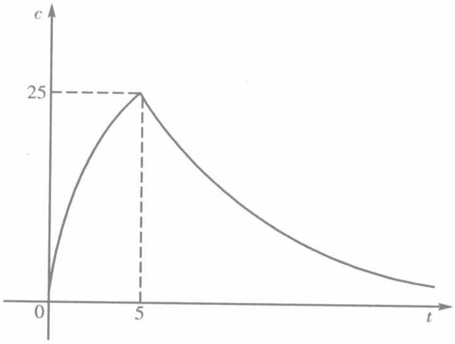


图 1.3

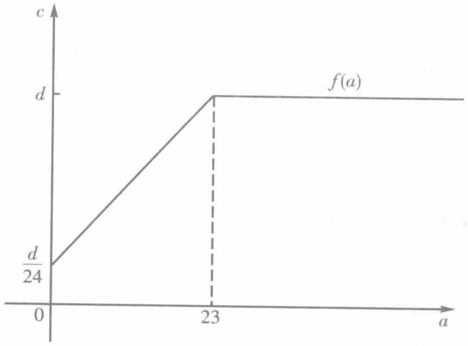


图 1.4

三、复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,若 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其子域上取值时,所对应的 u 值,使 $y=f(u)$ 有定义,则称 y 是 x 的**复合函数(compound function)**,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量(intermediate variable)**.

例 1.7 求由 $y=e^u$, $u=v+\sin v$, $v=1-2x$ 构成的复合函数.

解: u 是 y 的中间变量, v 是 u 的中间变量,依次代入可得 $y=e^{1-2x+\sin(1-2x)}$.

例 1.8 求由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数和由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数.

解:①由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数是

笔 记 栏

$$y = (\sin x)^3;$$

②由函数 $y = \sin u$ 和 $u = x^3$ 构成的复合函数是

$$y = \sin x^3.$$

例 1.9 试分解复合函数 $y = e^{\arcsin 3x}$.

解: 显然是由 $y = e^u$、$u = \arcsin v$ 和 $v = 3x$ 复合而成.

例 1.10 试分解复合函数 $y = \lg[\tan(x^2 + \arcsin x)]$

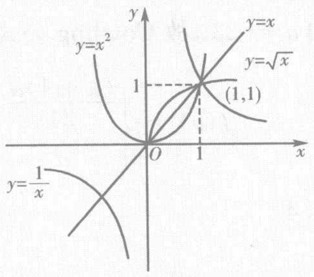
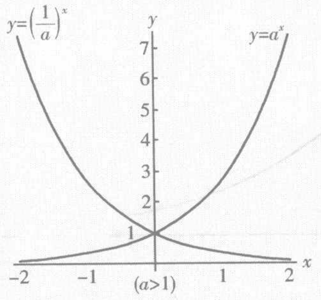
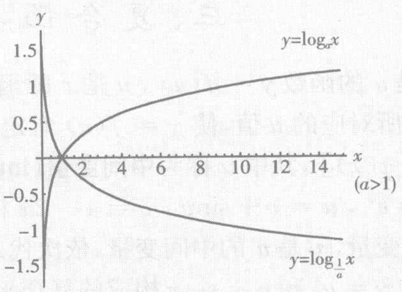
解: $y = \lg u$，$u = \tan v$，$v = x^2 + \arcsin x$.

四、初 等 函 数

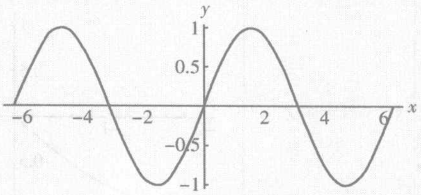
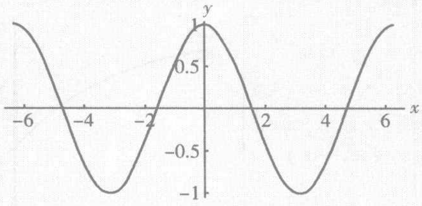
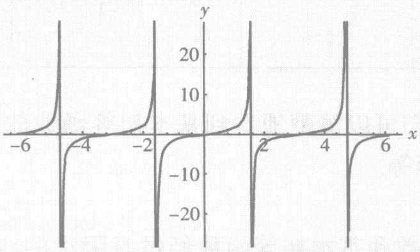
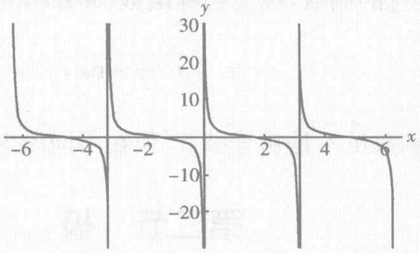
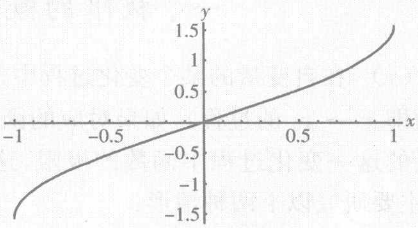
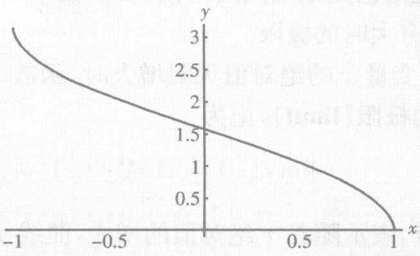
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数(basic elementary function)**. 现将五种基本初等函数列于表 1.2.

表 1.2 基本初等函数表

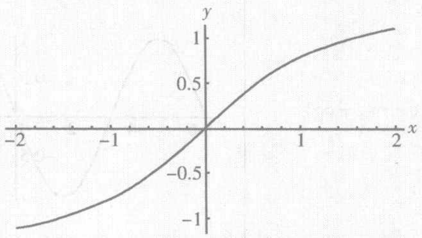
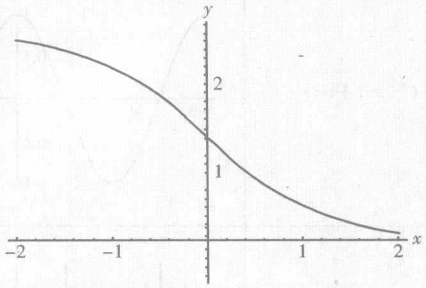
名称	表达式	定义域	图 形	特 性
幂函数	$y = x^a$ $(a \neq 0)$	随 a 的不同，函数的定义域不同，但在 $(0, +\infty)$ 内都有定义		过 (1,1) 点，在第一象限内，当 $a > 0$ 时，为增函数；当 $a < 0$ 时，为减函数
指数函数	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$		图像在 x 轴上方，且过点 (0,1)，当 $0 < a < 1$ 时为减函数；当 $a > 1$ 时为增函数
对数函数	$y = \log_a x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$	$(0, +\infty)$		图像在 y 轴右侧，且过点 (1,0)，当 $0 < a < 1$ 时，为减函数；当 $a > 1$ 时，为增函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\mid \sin x \mid \leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\mid \cos x \mid \leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(0,\pi)$ 内为减函数
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加，奇函数，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少，值域为 $[0,\pi]$

笔记栏

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正切函数	$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加，奇函数，值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
	反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少，值域为 $(0, \pi)$

从表 1.2 中，我们可以清楚地看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其函数图形等.

2. 初等函数

定义 1.3 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合运算所构成的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数(elementary function)**. 如

$$y = \sqrt{e^x + \sin x}, y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$$

都是初等函数. 分段函数虽不是初等函数，但在不同段内的表达式，通常用初等函数表示.

第二节 极 限

一、极限的概念

对于函数 $y = f(x)$，在自变量的某个变化过程中(如 x 无限增大即 $x \to \infty$ 的过程或 x 无限接近于某一个常数即 $x \to x_0$ 的过程)，如果对应的函数值无限的接近于某一个常数，那么这个常数叫做在自变量的这一变化过程中函数的极限，这个极限是由自变量的变化过程所决定的. 函数的极限我们主要研究以下两种情形：

1. 自变量趋向于无穷大时函数的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大的时候，若函数 $f(x)$ 无限的趋近于一个常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋向于无穷大时的极限.

定义 1.4 若自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限(limit)**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A (x \to \infty)$$

从几何意义上看，表示随着 x 绝对值的增大，曲线 $f(x)$ 与直线 $y = A$ 越来越接近，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，无论直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，只要 x 离原点足够远，

笔记栏

即 $|x|>M$，函数 $f(x)$ 的图形都在这个条形区域内，如图 1.5.

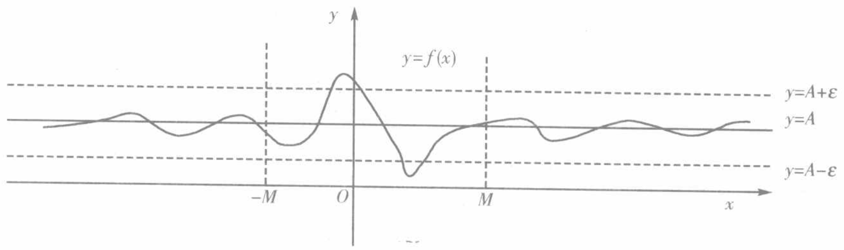


图 1.5

如果仅考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，那么可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1.11 从几何意义上可知下列等式成立 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$，

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

2. 自变量趋向于定值时函数的极限

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义(在 x_0 点可以没有定义)，若当 x 无论以怎样的方式趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

注意：①这里 $x\to x_0$ 的方式是任意的；②函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限是否存在与函数在 x_0 点是否有定义无关.

反映在几何上，这个定义对于任意给定的 $\varepsilon>0$，无论直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，总能找到 x 的一个区域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，当 x 在这个区域内取值时，$f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ 即 } A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

即在 x_0 的空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 的值全部落在如图 1.6 所示横条形区域内.

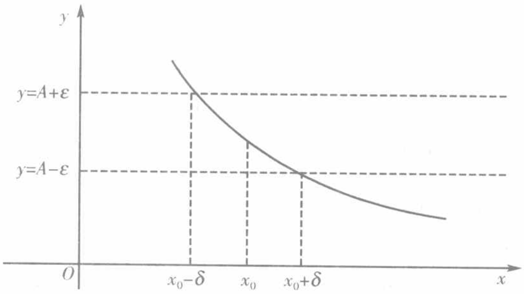


图 1.6

例 1.12 由定义及几何意义，易知 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

可以看出，上述 x 以任意方式趋近于 x_0 的过程包括 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 和从 x_0 的右侧趋向于 x_0 这两种情况. 当 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限(left-hand limit)**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)=A$，同样当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限(right-hand limit)**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)=A$.

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等. 这个结论常用于讨论分段函数在分段点处的极限.

例 1.13 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & -\infty<x<0,\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 1 & x>1.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

笔 记 栏

解:(1)当 $x\to 0$ 时,因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,\text{且}\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0,$$

即
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=1\neq 0=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在;

(2) 当 $x\to 1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1,$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1=\lim_{x\to 1^+}f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

3. 极限存在的判别准则

不加证明的给出下列定理:

定理 1.1 夹逼定理:在同一极限过程中,若三个函数 $f(x)$ 、$g(x)$ 和 $h(x)$ 之间满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$,则

$$\lim f(x)=A.$$

定理 1.2 单调有界数列必有极限:若数列 $\{x_n\}$ 单调并且有界,则 $\{x_n\}$ 一定有极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

二、极限的四则运算

定理 1.3 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

特别地,当 c 、k 为常数时,有 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$, $\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

该定理中 x 的变化趋势应为同一个变化趋势.

例 1.14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2}$.

解: $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2.$$

例 1.15 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解: $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=\lim_{x\to -1}x-1=-2.$$

例 1.16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+x+2}$.

解: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

三、两个重要极限

笔 记 栏

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例 1.17 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\times 1=5.$

例 1.18 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

解:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

例 1.19 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

例 1.20 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{3x}$.

解:
$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{-x})^{3x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{-x})^{\frac{-x}{2}\cdot(-6)}=\lim_{x\to\infty}\left\{(1+\frac{2}{-x})^{\frac{-x}{2}}\right\}^{-6}$$
$$=\left\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{-x})^{\frac{-x}{2}}\right\}^{-6}=e^{-6}.$$

例 1.21 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{x^2-9}$.

解:
$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\ln(x-2)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\ln(x-2)^{\frac{1}{x-3}}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\ln[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}=\frac{1}{6}\ln\{\lim_{x\to 3}[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}\}$$
$$=\frac{1}{6}\ln e=\frac{1}{6}.$$

例 1.22 案例 1-1 解答

解: 假设气流每通过相同厚度的 Δx 便有相等比例的 CO_2 被吸收. 将厚度 x 分成 n 等份,每一份上 CO_2 的吸收量与 $\dfrac{x}{n}$ 成正比,比例系数为 k. 在 $x=0$ 处 CO_2 的量为 M_0,则经过 n 层后为 $M_0\left(1-\dfrac{kx}{n}\right)^n$,要让每层的厚度尽可能的小并趋于零,只要 $n\to\infty$,则经过 x 层后 CO_2 的量为

$$M(x)=\lim_{n\to\infty}M_0\left(1-\frac{kx}{n}\right)^n=M_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{kx}{n}\right)^{-\frac{n}{kx}}\right]^{-kx}=M_0e^{-kx}$$

当 $x=10$ 时,CO_2 浓度从 8%降至 2%,即初始浓度的 $\dfrac{1}{4}$,这就是

$$M(10)=M_0e^{-10k}=\frac{M_0}{4}$$

求得 $k=\frac{\ln 2}{5}$.

所以 CO_2 量与厚度 x 的关系式为 $M(x)=M_0e^{-kx}$.

令 $M(x)=\frac{M_0}{8}$ 可解出 $x=15$,即经过 15 cm 厚度 CO_2 浓度为 1%. 同样可以验证,当 $x=30$,即容器被纤维制品填满时,舱内空气通过容器后 CO_2 的输出浓度为 $M(30)=0.00125$,已降至安全水平.

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 1.6 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为**无穷小量(infinitesimal)**,简称为无穷小.

定义中的 $x\to x_0$,可换成 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ 等.

无穷小量是以零为极限的变量,提到无穷小量时要指明自变量的变化过程,比如 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时是无穷小量.

任意很小的数都不是无穷小量,但零是可以看做无穷小的常数(也是唯一一个可看成无穷小的常数),因为常数的极限总是等于常数本身.

根据无穷小量的定义及极限的定义与运算法则,可知无穷小量有如下性质:

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量;

性质 2 有限个无穷小之积为无穷小;

性质 3 有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例如,因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$,即 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小量,而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界变量,所以当 $x\to 0$ 时, $x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量,即 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,这也提供了一种求极限的方法.

当然常量也是有界的,所以常量与无穷小量之积为无穷小量.

定理 1.4 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量.

这里 $x\to x_0$ 也可换成其他变化过程,不管是什么样的变化过程总是同一个变化过程.

2. 无穷小量的比较

两个无穷小量的和、差、积都是无穷小量,那么,两个无穷小量的商是否仍是无穷小量呢?例如,当 $x\to 0$ 时, $x,x^2,2x,x^3$ 都是无穷小量,不同的是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3}$ 不存在,也就是说当 $x\to 0$ 时, $\frac{x^2}{x}$ 是无穷小量,但 $\frac{2x}{x},\frac{x^2}{x^3}$ 不是无穷小量. 这些情形表明,同为无穷小量,但它们趋于 0 的速度有快有慢,为了比较不同的无穷小量趋于 0 的速度,引入无穷小量阶的概念:

定义 1.7 设 $\alpha=\alpha(x)$ 、$\beta=\beta(x)$ 在自变量的某个变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 等)是无穷小(且 $\alpha\neq 0$),则

(1) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c$ ($c\neq 0$ 是常数),则称 β 与 α 是同阶无穷小;当 $c=1$ 称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$;

(2) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=0(\alpha)$;

笔 记 栏

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小，或 α 是比 β 高阶的无穷小.

如 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$，故当 $x \to 0$ 时，$2x$ 与 x 为同阶无穷小；$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{2}} = 0$，故当 $x \to 0^+$ 时，x^2 是比 $\sqrt{x}$ 高阶的无穷小；而由第一个重要极限知，当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$.

求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可以用等价无穷小来代替，设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

如果用来代替的无穷小选得适当的话，可以使计算简化.

例 1.23 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解：当 $x \to 0$ 时 $\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

读者可以自己证明，当 $x \to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim (e^x - 1)$$

3. 无穷大量

定义 1.8 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时为**无穷大量**，简称无穷大，并且记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或 $f(x) \to \infty (x \to x_0)$.

当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大，是极限不存在的一种特殊情况，但这个记号还是明确了变化规律.

无穷大量都是变量，任何常数都不可能是无穷大.

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一趋向下，无穷大的倒数是无穷小，无穷小（不等于 0）的倒数是无穷大.

例：因 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$，即 $x-1$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小，且 $x \to 1$ 时 $x-1 \neq 0$，所以其倒数是同一过程中的无穷大，即 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$，这也提供了一种求极限的方法.

第三节　函数的连续性

一、函数连续性的概念

自然界中很多量的变化都是连续不断的，如体温的升降、机体的成长、血液的流动等，就体温的变化来看，当时间的变动很微小时，温度的变化也很微小，这也是这些现象共同的特点即连续性，为了说明连续性，先给出增量的定义.

1. 函数的增量

定义 1.9 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$，即 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$，称 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 相应于 Δx 的**增量(increment)**.

一般来说，Δy 既与 x_0 有关也与 Δx 有关，Δx 和 Δy 反映了自变量和因变量之间的变化关系，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$，就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

笔记栏