王 术 编著

Sobolev空间与偏微分方程引论

科学出版社
www.sciencep.com

Sobolev 空间与偏微分方程引论

王　术　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统讲述了偏微分方程一般理论的主要结果和研究方法. 主要内容包括: 实分析与泛函分析在Sobolev空间中的应用, 整数次与分数次Sobolev空间的基本性质和基本技巧, 如逼近理论、紧嵌入理论、迹定理、单位分解等基本理论以及局部化、平直化、光滑化和紧支化等技巧, 二阶线性椭圆方程的各类边值问题弱解的存在唯一性、正则性、极值原理、Schauder理论等方面的主要结果以及泛函方法、特征值方法、差商方法等现代偏微分方程方法和De Giorgi迭代技巧, 二阶线性抛物方程和二阶线性双曲方程的基本理论, 弱解的存在唯一性、正则性, 能量方法, Galerkin方法, Lions定理与发展方程以及线性抛物型方程的Schauder理论和L^p理论, 一阶线性双曲型方程式的特征线方法, 一阶线性双曲型方程组的基本概念和对称双曲系统的黏性消失法等.

本书适合偏微分方程、微分动力系统、实分析、泛函分析、计算数学、数学物理、控制论方向的研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Sobolev空间与偏微分方程引论/王术编著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-024349-2

Ⅰ. S… Ⅱ. 王… Ⅲ. 泛函分析-应用-偏微分方程 Ⅳ. O177.92 O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第051981号

责任编辑: 张 扬 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年4月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009年4月第一次印刷 印张: 17

印数: 1—2 500 字数: 333 000

定价: 54.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

前　言

众所周知, 偏微分方程的发展与实分析、泛函分析有着密切的联系, 但是涉及泛函方法在偏微分方程应用方面的系统理论的专著或教材却很少, 而且目前已有的国内外偏微分方程方面的大多专著或教材都各有其特点, 重点内容和侧重点各不相同, 有的偏重于椭圆与抛物类方程, 有的偏重于双曲类方程. 这样, 其基础知识和出发点就各不相同. 再者, 偏微分方程涉及广泛的相关学科基础知识, 需要有较宽的数学知识面, 当前的许多经典专著或教材起点高, 对于在校的青年初学者, 特别是研究生来说, 内容较难理解, 不利于他们更进一步地学习和研究. 这样, 适合于我国偏微分方程各方向的基础偏微分方程的内容体系便应运而生.

本书注重观念和思想产生的背景、创新思想的起源与启发, 综述了偏微分方程的发展史和当前国内外偏微分方程研究的前沿问题, 系统地介绍了偏微分方程的经典理论与现代方法、实分析与泛函分析在偏微分方程中的应用、Sobolev 空间在偏微分方程中的应用等. 其主要特点有: 适合作为 Sobolev 空间与偏微分方程的入门书, 深入浅出的思路分析、启发式的思想起源分析、系统的基本理论与应用、丰富的例题、适量且难易兼容的习题和大量详细的注解, 都有利于读者理解和掌握书中的内容和相关知识, 把读者引入现代偏微分方程的研究领域. 大量的参考文献以及经典的名著参考书, 可以引导读者选择研究领域、拓宽研究视野. 书中内容详细、封闭完整、通俗易懂、言简意赅、论证严密, 各部分内容自成体系; 起点低, 适用于各个专业和不同的研究方向. 编者参阅了国内外同一主题的许多著作, 吸收了各书之所长, 相信会对读者有所帮助.

本书系统地讲述了偏微分方程一般理论的主要结果和研究方法. 全书共分 6 章: 第 1 章讲述偏微分方程的发展史、现代偏微分方程的主要研究方法以及一些重要的研究方向, 介绍偏微分方程的基本概念与分类; 第 2 章介绍实分析与泛函分析在 Sobolev 空间中的应用, 整数次与分数次 Sobolev 空间的基本性质及其基本理论, 如逼近理论、延拓理论、嵌入理论、单位分解理论及 Fourier 分析理论等, 研究 Sobolev 空间理论中涉及的基本技巧, 如局部化、平直化、光滑化和紧支化等, 时空 Sobolev 空间的基本性质等, 本章内容是自成体系的; 第 3 章介绍二阶线性椭圆方程的各类边值问题弱解的存在唯一性、正则性、极值原理, Schauder 理论等方面的主要结果以及泛函方法、特征值方法、差商方法等现代偏微分方程方法和 De Giorgi 迭代技巧等; 第 4 章和第 5 章分别介绍二阶线性抛物方程和二阶线性双曲型方程的基本理论, 弱解的存在唯一性、正则性, 能量方法, Galerkin 方法, Lions 定

理与发展方程以及线性抛物型方程的 Schauder 理论和 L^p 理论等; 第 6 章介绍一阶线性双曲型方程式的特征线方法和一阶线性双曲型方程组的基本概念和对称双曲系统的黏性消失法等.

本书曾在北京工业大学讲过若干次, 程曹宗教授、黎勇博士、邢秀侠博士、杨卫华博士和曾明博士等都曾提出过宝贵的修改意见, 在此一并致谢. 同时, 借本书出版之际, 向我的老师叶其孝教授、谢春红教授、肖玲研究员、辛周平教授以及 Peter A. Markowich 教授表示感谢, 他们在我的学业研究中给予了关心和指导. 同时也感谢丁夏畦院士和郭柏灵院士在我的学术研究中给予的热情帮助.

本书作为 Sobolev 空间与偏微分方程的入门书, 适合作为偏微分方程、微分动力系统、实分析、泛函分析、计算数学、数学物理、控制论等理工科相关方向研究生的教材和教学参考书, 也可作为数学、物理、力学、工程等领域青年教师或科研人员的参考书. 由于编者学识有限, 加之初次尝试, 不妥、片面甚至证明疏漏之处也在所难免, 欢迎读者批评指正.

王　术

2008 年 12 月 26 日于北京

目　录

前言

第 1 章　引言 ······ 1

1.1　偏微分方程的发展史 ······ 1

1.2　偏微分方程的理论研究 ······ 2

1.3　偏微分方程的基本概念与分类 ······ 3

1.3.1　偏微分方程的定义及各种经典的偏微分方程 (组) ······ 3

1.3.2　二阶线性偏微分方程的分类 ······ 8

1.3.3　一阶和高阶线性偏微分方程的分类 ······ 11

习题一 ······ 14

第 2 章　Sobolev 空间 ······ 16

2.1　预备知识 ······ 16

2.1.1　几个常用的不等式 ······ 16

2.1.2　空间 $C^k(\Omega)$ 和 $C_0^k(\Omega)$ ······ 22

2.1.3　L^p 空间的基本性质 ······ 23

2.1.4　磨光算子 ······ 28

2.1.5　截断函数或切断因子 ······ 32

2.1.6　单位分解 ······ 33

2.1.7　区域边界的局部拉平 ······ 34

2.1.8　Lebesgue 积分 ······ 35

2.1.9　广义函数 ······ 36

2.1.10　线性算子的基本性质 ······ 39

2.2　整数次 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ ······ 40

2.2.1　整数次 Sobolev 空间的定义 ······ 40

2.2.2　$W^{m,p}(\Omega)$ 的性质 ······ 45

2.2.3　逼近 ······ 46

2.2.4　延拓 ······ 55

2.2.5　$W_0^{m,p}(\Omega)$ 空间及其对偶空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ ······ 58

2.2.6　Sobolev 不等式与嵌入定理 ······ 65

2.2.7　紧性 —— 嵌入与紧嵌入 ······ 76

2.2.8　Poincaré 不等式 ······ 79

2.2.9 差商与 Sobolev 空间 ······ 82

2.2.10 时空 Sobolev 空间 ······ 84

2.3 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Fourier 变换 ······ 89

2.4 实指数的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 和 $H^s(\Omega)$ ······ 98

2.4.1 实指数的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的定义及其性质 ······ 98

2.4.2 空间 $H^{-s}(\mathbb{R}^n), s > 0$ ······ 100

2.4.3 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的嵌入定理 ······ 102

2.4.4 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 范数的内插 ······ 105

2.4.5 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的等价范数 ······ 106

2.5 任意区域 Ω 上的分数次 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$ ······ 108

2.5.1 任意区域 Ω 上的分数次 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$ 的定义 ······ 108

2.5.2 $H^s(\Omega)$ 中的嵌入定理 ······ 110

2.5.3 范数内插 ······ 111

2.6 迹与迹算子 ······ 112

习题二 ······ 117

第 3 章 二阶线性椭圆型方程 ······ 121

3.1 二阶线性椭圆型方程的定义 ······ 121

3.1.1 二阶线性椭圆型方程的基本概念 ······ 121

3.1.2 第一边值问题弱解的定义 ······ 123

3.2 第一边值问题弱解的存在性 ······ 125

3.2.1 Lax-Milgram 定理 ······ 125

3.2.2 能量估计 ······ 131

3.3 二阶线性椭圆型方程的其他边值问题 ······ 134

3.3.1 弱解定义的基本思想 ······ 134

3.3.2 其他边值问题弱解定义的一些例子 ······ 137

3.4 极值原理 ······ 139

3.4.1 古典解的极值原理 ······ 140

3.4.2 弱解的极值原理与 De Giorgi 迭代 ······ 144

3.5 Fredholm 抉择性质的应用 —— 二阶椭圆型方程解的存在性准则 ······ 150

3.6 椭圆型方程的特征值问题 ······ 155

3.7 解的正则性 ······ 157

3.7.1 解的正则性的基本思想与差商方法 ······ 158

3.7.2 弱解的内部正则性 ······ 160

3.7.3 弱解的全局正则性 ······ 163

3.8 线性椭圆型方程边值问题的其他存在性结论 ······ 167

习题三 ······ 170
第 4 章　二阶线性抛物型方程 ······ 172
4.1　二阶线性抛物型方程的定义与定解问题 ······ 172
4.2　古典解的极值原理 ······ 174
4.2.1　古典解的弱极值原理 ······ 174
4.2.2　Harnack 不等式 ······ 177
4.2.3　古典解的强极值原理 ······ 178
4.2.4　Cauchy 问题的最大值原理 ($\Omega = \mathbb{R}^n$ 情形) ······ 180
4.3　古典解的唯一性与能量方法 ······ 182
4.3.1　唯一性 ······ 182
4.3.2　能量不等式 ······ 184
4.4　Galerkin 方法与弱解的存在唯一性 ······ 184
4.4.1　弱解的定义 ······ 184
4.4.2　Galerkin 方法 ······ 185
4.4.3　Galerkin 近似 ······ 186
4.4.4　能量估计 ······ 187
4.4.5　存在性与唯一性 ······ 190
4.4.6　弱解的等价定义、弱解的极值原理与 De Giorgi 迭代 ······ 192
4.4.7　Galerkin 方法的更进一步应用 ······ 198
4.5　弱解的正则性 ······ 200
4.5.1　弱解正则性的基本思想及正则性估计的形式获得 ······ 200
4.5.2　弱解的正则性理论 ······ 202
4.6　Lions 定理与发展型偏微分方程 ······ 208
4.6.1　Lions 定理 ······ 208
4.6.2　Lions 定理的应用 —— 抛物型方程弱解的存在性 ······ 210
4.6.3　复值 Lions 定理及其应用 ——Schrödinger 方程弱解的存在性 ······ 220
4.7　线性抛物型方程的 Schauder 理论和 L^p 理论 ······ 222
习题四 ······ 224
第 5 章　二阶线性双曲型方程 ······ 226
5.1　二阶线性双曲型方程的定义与定解问题 ······ 226
5.2　Galerkin 方法与弱解的存在性和正则性 ······ 228
5.2.1　弱解的定义 ······ 228
5.2.2　弱解的存在性 ······ 229
5.2.3　弱解的正则性 ······ 234
5.3　Lions 定理和双曲型方程 ······ 238

5.3.1　实值 Lions 定理和双曲型方程 …… 238
5.3.2　复值 Lions 定理和双曲型方程弱解的存在唯一性 …… 242
习题五 …… 247
第 6 章　一阶线性双曲型方程 …… 249
6.1　特征线方法与一阶线性双曲型方程式 …… 249
6.1.1　特征线方法 …… 249
6.1.2　例子 …… 251
6.2　一阶线性双曲型偏微分方程组 …… 255
6.2.1　定义 …… 255
6.2.2　对称双曲系统与黏性消失法 …… 256
习题六 …… 263
参考文献 …… 264

第 1 章　引　言

如未特殊说明, 本书出现的函数都是实值或复值函数. δ_{ij} 是 Kronecker 记号, 即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\quad \mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n|x_n>0\},\quad \overline{\mathbb{R}_+^n}=\{x\in\mathbb{R}^n|x_n\geqslant 0\}.$$

1.1　偏微分方程的发展史

偏微分方程属于分析学的范畴, 是在微积分出现后不久即兴起的一门学科. 回顾偏微分方程的研究, 它起源于 18 世纪 Euler, d'Alembert, Bernoulli, Lagrange 和 Laplace 等的工作, 作为描述连续力学的核心工具, 被用作分析物理科学中模型的主要方式. 实际上, 一维线性波动方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 是 d'Alembert 于 1746 年在模拟弦振动时建立的. 1780 年, Laplace 在研究重力场理论时提出了他的方程 $-\Delta u=0$, 称为位势方程或 Laplace 方程. 而热传导方程 $u_t-u_{xx}=0$ 是由 Fourier 于 1807 年研究热传导现象时建立的. 这三个简单的方程导致了二阶偏微分方程的基本分类, 即所谓的双曲、抛物和椭圆型偏微分方程, 并且主要的线性偏微分方程的理论也是基于这三个基本方程的.

偏微分方程具有双重性. 一方面, 偏微分方程可以模拟解释应用科学中的一些物理现象. 可以毫不夸张地说, 许多物理现象都能够用偏微分方程来刻画和描述, 并且用偏微分方程建立的模型无疑不仅仅限于描述物理学. 18 世纪, 为了解决实际物理问题, 如弦振动问题、万有引力问题、流体水力学问题等, 产生了偏微分方程, 特别是 Euler 建立了流体力学中无黏性可压缩和不可压缩流体的著名的 Euler 方程. 到了 19 世纪, 随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展, 微分方程的理论和应用也飞速发展并变为 "数学的中心". 从这个意义上说, 所研究的问题来源于物理实际, 研究方法启发于物理科学, 研究内容与实际相关, 结果解释实际物理现象. 同时, 物理科学、工程技术以及应用科学中出现的偏微分方程在偏微分方程的发展史上一直占据着最重要的地位, 因此它属于应用数学的学科范畴. 另外, 从 19 世纪中期开始, 偏微分方程成为发展数学其他分支的一个重要的工具, 促进了其他相关数学分支的发展. 例如, Poincaré 对极小曲面方程和 Monge-Ampére 方程以及它们几何意义的研究, 促进了几何学的发展. Donaldson 和 Seiberg-Witten 在四维微分流形的拓扑学中的工作大部分建立在偏微分方程理论的基础上. 2006 年, 百年难题 Poincaré 猜想的解决充分显示了偏微分方程这种重要分析工具的伟大性.

除了几何学和拓扑学上的应用外, 偏微分方程还与金融数学、概率理论和统计分析 (Brown 运动、多粒子流体动力学) 以及动力系统, 尤其是 Hamilton 系统等数学的其他许多领域紧密相关.

应该强调以下两点：第一, 偏微分方程作为一门学科, 在分析学的发展过程中始终处于核心地位 (Brezis, Brouder, 1998; 林芳华, 2002). 从 Cauchy-Riemann 方程和 Fourier 级数开始, 调和分析中许多得到发展的重要课题, 如广义函数、Sobolev 空间、奇异积分算子、拟微分算子、仿微分算子和微局部分析等, 都与偏微分方程理论有着密切的联系. 第二, 科学、技术、工程以及工业总是刺激偏微分方程发展的动力源泉. 实际上, 历史上有许多这样的例子, 至今仍十分重要且意义深远, 如

(1) Euler(1755), 不可压流体的不可压 Euler 方程;

(2) Lagrange(1760), 几何学中的极小曲面方程;

(3) Navier(1821), Poisson(1831), Stokes(1845), 黏性可压缩与不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程 (2000 年美国马萨诸塞州剑桥 Clay 数学促进会设立的 7 个 100 万美元奖金征奖千年难题之一);

(4) Maxwell(1864), 电磁学理论中的 Maxwell 方程组 (被称为 19 世纪对科学和技术带有巨大冲击的最壮观的胜利);

(5) Boltzmann(1872), 气体动力学中的 Boltzmann 方程;

(6) Korteweg de Vries(1896), 孤立波的 Korteweg de Vries 方程;

(7) Einstein(1915), 广义相对论中的 Einstein 方程 (被称为 20 世纪最伟大的科学成就, 也成为历史上数学应用最伟大的例子之一);

(8) Schrödinger(1926), Dirac(1928), 量子力学的 Schrödinger 方程和 Dirac 方程;

(9) 杨振宁和 Mills (1954), 物理学杨-米尔斯理论和质量缺口假设中的 Yang-Mills 方程 (2000 年美国马萨诸塞州剑桥 Clay 数学促进会设立的 7 个 100 万美元奖金征奖千年难题之一);

……

1.2　偏微分方程的理论研究

18 世纪偏微分方程诞生的早期, 限于分析学知识的贫乏, 人们主要的研究兴趣是如何将物理问题数学化, 即如何建立偏微分方程模型, 寻找一些特殊方程的显示解或特解. 正如 Euler 所言, 限于当时的分析工具, 几乎对所有的方程都没有找到普遍的方法来解决它们, 整个学科的发展还处在幼年时代, 偏微分方程的理论有待形成. 因此, 可以说 “18 世纪偏微分方程研究中的主要成就是揭示了它们对弹性力学、水力学和万有引力问题的重要性”. 到了 19 世纪, 随着分析学的飞速发展, 偏

微分方程的研究发生了重大变化. 许多重要的方程, 特别是非线性方程求出显示解是不可能的. 受代数学根的存在原理的启发 (在多项式方程的情形, 解四次以上方程的努力失败后, Gauss 转而去证明根的存在性), 偏微分方程的研究内容转为研究其适定性.

如果一个给定的偏微分方程的定解问题有一个解, 这个解是唯一的, 并且解连续依赖于该问题中给定的已知数据, 那么就说这个问题是适定的. 简单地说, 适定性就是指存在性、唯一性和稳定性. 特别是稳定性问题对物理是非常重要的, 也是物理学家最关心的问题之一, 如解是否随初始条件连续地变化? 或者当初始条件或边界条件稍稍变化时是否有全新的现象产生? 例如, 由行星的一个初始速度值得到的抛物轨道, 作为初始速度稍微变化的结果, 可以变成椭圆轨道. 轨道上的这一差异在物理上是最有意义的.

应该注意: 在科学研究中借用其他学科的观念是非常重要的, 会产生创造性的成果, 偏微分方程的研究更是如此.

现在我们知道偏微分方程的基本研究内容, 但并不清楚如何定义它的解. 通常定义两种形式的解: 一种称为**经典解**, 即出现在方程中的所有导数是连续的且在经典意义下满足定解条件的解. 18, 19 世纪本质上是研究这种经典解的. 另一种称为**弱解**或**广义解**, 即导数可以不存在的解. 有两方面的原因导致了弱解的重要地位. 其一, 一些非线性的方程不存在经典解; 其二, 方法论上的原因. 对于一些问题, 不能直接获得其经典解, 但可以先建立其某种形式的解, 再借助现代分析的工具, 获得其适当的光滑性, 从而得到经典解. 这就是弱解的正则性问题. 当然, 弱解的研究是困难而复杂的, 不仅要研究弱解的适定性, 还要研究其正则性. 数学家 Sobolev 建立 Sobolev 空间理论后, 其他相关学科, 如实变函数、泛函分析和调和分析等理论被应用到偏微分方程中来, 使得这种方法成为可能, 并得到飞速发展. 弱解的正则性理论是 20 世纪偏微分方程研究领域的杰出成就. 由此也导致了三类二阶线性偏微分方程的基本理论的形成.

本书将系统地介绍 Sobolev 空间的一般理论, 详细地论述三类二阶线性偏微分方程的基本理论、一些基本研究方法和基本技巧.

本章给出偏微分方程的基本概念.

1.3 偏微分方程的基本概念与分类

1.3.1 偏微分方程的定义及各种经典的偏微分方程 (组)

对于 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, 如果 $\alpha_i\geqslant 0$, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一多重指标, 记作 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^n$.

对于多重指标 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n,\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, 分别定义

$$\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}\Leftrightarrow\beta_i\leqslant\alpha_i,i=1,\cdots,n,\quad \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n),$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}=\mathrm{C}_{\alpha_i}^{\beta_i}=\frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!}$$

和

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(x)=\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}}u(x)=\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}u,\quad |\boldsymbol{\alpha}|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\partial_{x_i}=\partial_i=\mathrm{D}_i.$$

注 1.1　如果 k 是一个非负整数, 则 $\mathbf{D}^k u(x)=\{\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(x)\,||\boldsymbol{\alpha}|=k\}$ (表示由所有 k 阶偏导数形成的向量). 例如, $k=1$ 时 $\mathbf{D}u=(\mathrm{D}_1u,\cdots,\mathrm{D}_nu)=(\partial_{x_1}u,\partial_{x_2}u,\cdots,\partial_{x_n}u)=\nabla u$ 表示 u 的**梯度**, 而当 $k=2$ 时,

$$\mathbf{D}^2u(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}_{n\times n}=\text{Hesse 矩阵}.$$

特别地, $\Delta u(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2}=\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}^2u\right)$ 表示 Hesse 矩阵的迹 (trace), 其中, $\Delta=\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 叫做 Laplace 算子.

注 1.2　对于多重指标 $\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}|$ 表示其长度, 这与向量模的定义不同. 例如, 记号 $|\mathbf{D}u(x)|=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n|\partial_{x_i}u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\left|\mathbf{D}^k u(x)\right|=\left(\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}|\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}}u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 分别表示向量 $\mathbf{D}u$ 和 $\mathbf{D}^k u$ 的模.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 定义其**迹**为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

对于 $\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ 上的向量函数 $\boldsymbol{v}$, 定义其**散度**为

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^3\partial_i v_i,$$

其中, $v_i,i=1,2,3$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量. 定义 $\boldsymbol{v}$ 的**旋度**为

$$\mathbf{curl}(\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{v}=(\partial_2v_3-\partial_3v_2,\partial_3v_1-\partial_1v_3,\partial_1v_2-\partial_2v_1).$$

对于 $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ 上的向量函数 $\boldsymbol{v}$, 定义 $\boldsymbol{v}$ 的**旋度**为

$$\mathbf{curl}(\boldsymbol{v}) = \nabla \times \boldsymbol{v} = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2.$$

注 1.3 对于高维空间的向量 ($\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, n > 3$), 散度和旋度的定义类似.

1. 偏微分方程的定义

偏微分方程是含有两个或两个以上自变量的未知函数及它的偏导数的方程. 其特点是未知函数是多元函数, 包含有偏导数的关系式.

设 $k \geqslant 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开区域.

定义 1.1 形为

$$F(\mathbf{D}^k u(\boldsymbol{x}), \mathbf{D}^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \cdots, \mathbf{D} u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{1.3.1}$$

的关系式叫做 **k 阶偏微分方程**, 其中,

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}$$

为已知, 而 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ 为未知函数 (当然 $\mathbf{D}^k u$ 的一个分量的系数不为零).

定义 1.2 (1) 如果偏微分方程 (1.3.1) 具有形式

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{1.3.2}$$

其中, $a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为给定的函数, 则称偏微分方程 (1.3.1) 为**线性的**, 否则称为**非线性的**. 如果在 (1.3.2) 式中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, 则称 (1.3.2) 式为**齐次的线性偏微分方程**或**齐线性偏微分方程**.

(2) 如果偏微分方程 (1.3.1) 具有形式

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u + a_0(\mathbf{D}^{k-1} u, \cdots, \mathbf{D} u, u, \boldsymbol{x}) = 0,$$

则称偏微分方程 (1.3.1) **为半线性的**(semilinear) (低阶导数可以是非线性的).

(3) 如果偏微分方程 (1.3.1) 具有形式

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{D}^{k-1} u, \cdots, \mathbf{D} u, u, \boldsymbol{x}) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u + a_0(\mathbf{D}^{k-1} u, \cdots, \mathbf{D} u, u, \boldsymbol{x}) = 0,$$

则称偏微分方程 (1.3.1) 为**拟线性的**(quasi-linear) (最高阶导数的系数依赖于低阶导数).

(4) 如果偏微分方程 (1.3.1) 非线性地依赖于最高阶导数, 则称 (1.3.1) 式为完全非线性的.

(5) $\boldsymbol{F}(\mathbf{D}^k\boldsymbol{u}, \mathbf{D}^{k-1}\boldsymbol{u}, \cdots, \mathbf{D}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0 (\boldsymbol{x} \in \Omega), \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m), \boldsymbol{F} = (F_1, \cdots, F_m)$ 称为**偏微分方程组**.

偏微分方程在物理、力学、生物学、化学、经济管理以及工程技术, 甚至数学的其他学科几何、概率等领域都有广泛的应用. 下面给出一些常用的偏微分方程(组).

2. 单个偏微分方程

1) 线性方程

(1) 调和方程或 Laplace 方程: $\Delta u = 0$;

(2) Poisson 方程: $\Delta u = f$;

(3) 特征值 (或 Helmholtz) 方程: $-\Delta u = \lambda u$;

(4) 线性输运方程: $u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$;

(5) 热传导 (或扩散) 方程: $u_t - \Delta u = 0$;

(6) Schrödinger 方程: $\mathrm{i}u_t - \Delta u = 0$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位;

(7) Fokker-Planck 方程: $u_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a^{ij}u)_{x_i x_j} - \sum\limits_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$;

(8) 波动方程: $u_{tt} - \Delta u = 0$;

(9) 电报 (telegraph) 方程: $u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0$;

(10) 电波 (beam) 方程: $u_t + u_{xxxx} = 0$;

(11) Plate 方程: $\Delta\Delta u = 0$;

(12) Vlasov 方程: $f_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x f + \boldsymbol{E} \cdot \nabla_v f = 0$.

2) 非线性方程

(1) 非线性 Poisson 方程: $-\Delta u = f(u)$;

(2) p-Laplacian 方程: $\mathrm{div}(|\mathbf{D}u|^{p-2}\mathbf{D}u) = 0$;

(3) 最小曲面方程: $\mathrm{div}\left(\dfrac{\mathbf{D}u}{(1 + |\mathbf{D}u|^2)^{1/2}}\right) = 0$;

(4) Monge-Ampére 方程: $\det(\mathbf{D}^2 u) = f$;

(5) Hamilton-Jacobi 方程: $u_t + H(\mathbf{D}u, x) = 0$;

(6) 守恒律: $u_t + \mathrm{div}\boldsymbol{F}(u) = 0$;

(7) 无黏性 Burgers 方程: $u_t + uu_x = 0$;

(8) 反应扩散方程: $u_t - \Delta u = f(u)$;

(9) 多孔介质方程: $u_t - \Delta(u^m) = 0$;

(10) 非线性波方程: $u_{tt} - \Delta u = f(u)$;

(11) KdV(Korteweg de Vries) 方程：$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.

3. 偏微分方程组

1) 线性方程组

(1) 线性热弹性 (elasticity) 方程：$\boldsymbol{u}_{tt} - \mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\mathbf{D}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) = 0$;

(2) Maxwell 方程组：$\begin{cases} \boldsymbol{E}_t - \mathbf{curl}\boldsymbol{B} = -4\pi j, \\ \boldsymbol{B}_t + \mathbf{curl}\boldsymbol{E} = 0, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \end{cases}$ 其中，$\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3), \boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ 表示电磁场强度.

2) 非线性方程组

(1) 守恒律组：$\boldsymbol{u}_t + \mathrm{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0, \boldsymbol{F}$ 为一矩阵;

(2) 反应扩散方程组：$\boldsymbol{u}_t - \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, $\begin{cases} u_t - \Delta u = u^\alpha v^\beta, \\ v_t - \Delta v = u^p v^q; \end{cases}$

(3) 理想流体的不可压 Euler 方程：$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \end{cases}$ p 为压力，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 为流速;

(4) 黏性流体的不可压 Navier-Stokes 方程组：$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p = \mu\Delta\boldsymbol{u}, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \end{cases}$ μ 为黏性系数;

(5) 理想流体的可压缩 Euler 方程组：$\begin{cases} n_t + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}) = 0, \\ (n\boldsymbol{u})_t + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla P(n) = 0, \end{cases}$ 表示张量积;

(6) 黏性流体的可压缩 Navier-Stokes 方程组：

$$\begin{cases} n_t + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}) = 0, \\ (n\boldsymbol{u})_t + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla P(n) = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\mu+\nu)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3); \end{cases}$$

(7) 广义相对论中的 Einstein 方程：

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3,$$

其中，κ 是常数，T_{ij} 是给定的能量动量张量，$R_{ij} = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^k\right) + \sum_{k=0}^{3}(\Gamma_{lk}^k\Gamma_{ij}^l - \Gamma_{lj}^k\Gamma_{ik}^l)$ 是 Ricci 曲率，$R = \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij}R_{ij}$，而 $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\right)$，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ 是矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵，(g_{ij}) 是时空距离.

3) 混合型方程组

(1) 半导体漂流扩散方程组: $\begin{cases} n_t = \mu_n \mathrm{div}(\nabla h(n) + n\nabla\phi), \\ p_t = \mu_p \mathrm{div}(\nabla q(p) - p\nabla\phi), \\ -\lambda^2\Delta\phi = n - p - b(x); \end{cases}$

(2) 半导体 Euler-Poisson 方程组: $\begin{cases} \partial_t n + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}) = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla h(n) = -\nabla\phi, \\ \lambda^2\Delta\phi = n - b(x); \end{cases}$

(3) 等离子体 Euler-Maxwell 方程组: $\begin{cases} \partial_t n + \mathrm{div}(n\boldsymbol{u}) = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{h}(n) = -\boldsymbol{E} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}, \\ \partial_t\boldsymbol{E} - \nabla\times\boldsymbol{B} = n\boldsymbol{u}, \\ \partial_t\boldsymbol{B} + \nabla\times\boldsymbol{E} = 0, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \mathrm{div}\boldsymbol{E} = -n. \end{cases}$

1.3.2 二阶线性偏微分方程的分类

基于三个典型的二阶线性偏微分方程, 即波动方程 $u_{tt} - a^2\Delta u = f(\boldsymbol{x}, t)$, 热传导方程 $u_t - a^2\Delta u = f(\boldsymbol{x}, t)$ 和 Poisson 方程或位势方程 $-\Delta u = f(\boldsymbol{x})$, 其中, Δ 为 Laplace 算子, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, a^2 为正常数. 下面给出二阶线性偏微分方程的分类.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u = f, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \tag{1.3.3}$$

其中, $a^{ij} = a^{ji}, b^i, c, f$ 都是 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 的已知函数.

注 1.4 上面的波动方程、热传导方程和 Poisson 方程这三类基本方程都可化为 (1.3.3) 式的形式. 事实上, 以 $\boldsymbol{A}$ 表示 (1.3.3) 式的二阶导数系数矩阵 $(a^{ij})_{m\times m}$. 对于波动方程, 取 $m = n+1, t = x_{n+1}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -a^2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, $b^i = 0, c = 0$, 波动方程属于 (1.3.3) 式; 对于热传导方程, 取 $m = n+1$, $t = x_{n+1}$, 则 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -a^2 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, $b^{n+1} = 1, c = 0, b^1 =$