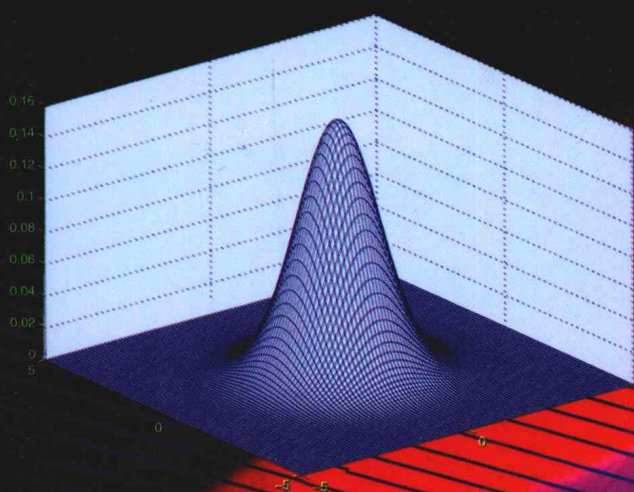


DAXUESHENG SHUXUE JIANMO
JINGSAI FUDAO JIAOCAI

大学生数学建模 竞赛辅导教材

叶其孝主编

(五)



湖南教育出版社

叶其孝主编

大学生数学建模竞赛 辅导教材

(五)

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学建模竞赛辅导教材. 5/叶其孝主编. —长沙: 湖南教育出版社, 2008.5

ISBN 978-7-5355-5517-5

I. 大... II. 叶... III. 数学模型-竞赛-高等学校-教材 IV. 0141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 062100 号

大学生数学建模竞赛辅导教材 (五)

叶其孝 主编

责任编辑: 郑绍辉

湖南教育出版社出版 (长沙市韶山北路 443 号)

网 址: <http://www.hneph.com>

电子邮箱: postmaster@hneph.com

湖南省新华书店发行 国防科技大学印刷厂印刷

850×1168 32 开 印张: 12.5 字数: 320000

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5355-5517-5
G·5512 定价: 20.00 元

本书若有印刷、装订错误, 可向承印厂调换

序 言

我国大学生数学建模竞赛自 1999 年起增加了大专组(乙组)的竞赛,专科的同学以及农、林、医院校本科的同学可以选择参加大专组(乙组)或本科组(甲组)的竞赛.参加乙组竞赛的学校数和队数逐年增加,2006 年参加乙组竞赛的队数已经达到 2303 个队,占全体参赛队数的近四分之一.这充分说明了教师和学生基于对数学建模的重要性的认识而产生的对这项赛事的热情,也说明各院校领导对这项赛事在培养学生和教师,特别是推动数学教学改革的重要作用的认识加深,从而加强了支持力度.

《大学生数学建模竞赛辅导教材(五)》的编写,就是为准备参加乙组竞赛的学生以及他们的指导教师服务的.但是,由于种种原因推迟了.不过在这段时间里,也让我们认真思考了许多问题,特别是,为什么要举办大学生数学建模竞赛、怎样组织学生参加竞赛,有什么经验和问题,竞赛和教学的关系等等,这对于进一步搞好大学生数学建模竞赛无疑是十分重要的.

为什么要举办大学生数学建模竞赛?因为我们这一代数学教师通过 1958 年“大跃进”、“文化大革命”等各个时期的理论联系实践的活动的亲身体会,以及对数学在科学发展中的地位和作用的考察,我们充分认识到数学建模和与之相伴的计算(模拟)已经成为科学研究和工程设计中的不可或缺的重要工具,要培养和造就具有创新和竞争能力的人才,对于 21 世纪的大学生来说,学习并掌握数学建模的思想和方法是必不可少的.因此,在我们的数学课程,甚至任何课程中都应该体现数学建模的思想和方法.然而,教学是一门学问,有自己的体系.特别是数学教学更有它本身的严密体系,是不可以轻易改动的,20 世纪 50 年代以来的各种争论以及所谓的“教学改革”更使我们认识到数学教学是不能随便改的.但是,大家也对现行的数学教学不满意,期望

改革，使得数学真正成为学生手中解决他们可能碰到的各种问题的有力武器。在这种两难情况下，我们了解到美国从1985年开始举办了美国大学生数学建模竞赛，也了解了为什么会产生这个赛事的种种背景。我们想到了借鉴。首先是在1989年参加美国的大学生数学建模竞赛，当时也正是中国工业与应用数学学会（China Society of Industrial and Applied Mathematics，缩写为CSIAM）即将成立之际，在我国应用数学界热烈讨论怎样发展我国的应用数学，包括应用数学的教学，也介绍了美国的大学生数学建模竞赛，引起了大家的兴趣与重视。从1990年开始西安和上海率先组织了所在城市的大学生数学建模竞赛。1990年CSIAM正式成立，并成立了数学模型专业委员会。1992年由CSIAM组织了全国大学生数学模型联赛。1994年起由教育部高教司和CSIAM联合主办全国大学生数学建模竞赛。根据教育部领导作出的竞赛应该推动数学教学改革的指示，以及对竞赛和教学的关系的认识，我们提出了“以数学建模竞赛为主体的数学建模教学活动，实际上是一种不打乱现行教学秩序的、规模相当大的大学数学教育改革的试验”（《大学生数学建模竞赛辅导教材（二）》，湖南教育出版社，1997）。现在，几乎每一本高等数学（微积分）教材中都有数学建模的内容。全国组委会又适时地提出了“把数学建模的思想和方法融入大学数学主干课程中去”的主导思想，并在2000年向教育部申请了教改立项，20多所院校进行了有关该课题子项目的研究。我们认为每一个大学生都应该在不同的层次上得到数学建模的思想和方法的教育，当然这是一项非常艰巨的任务。然而，如果这项工作做好了，我们的大学生数学建模竞赛将进入一种良性循环的状态，即在大家都得到一定的数学建模教育的前提下，有兴趣的同学会选修数学建模的课程或自学更多的数学建模的思想和方法，其中一部分同学会希望更多地参与到更加实战的数学建模活动中去，包括参加大学生数学建模竞赛。这样，我们的竞赛的参加者将会是更有准备、更加主

动、积极的参赛者，这必将进一步推动和提高竞赛的质量和水平。从某种意义上可以说是教学促进竞赛，这也是我们所希望的。

现在越来越多的不同层次的学校和专业的大学生希望参加大学生数学建模竞赛来锻炼和挑战自己的能力，我们应该怎样组织大学生参加这个竞赛呢？我们认为真正贯彻“以学生为中心、教师是关键、领导是保证”的指导思想是十分重要的。实践已经证明竞赛是培养大学生创新和竞争能力的重要载体。以学生为中心就是要有具体的措施让更多的同学参加到与竞赛相关的各种数学建模活动中来。要做到这一点，教师是关键。因为如果离开懂得数学建模并有所实践的教师，谁去教学生，谁去组织和辅导学生参加数学建模竞赛和相关活动呢？现在，教师的教学任务很重，进修的时间相对就会少些，必须挤时间来进修充实自己，来组织和辅导学生参加数学建模活动。这时学校的领导对数学建模的重要性是否有充分的认识，是否能制订有效、切实可行的措施就是关键了。这就是领导的保证作用。对于专科类院校和相关专业来说，贯彻“以学生为中心、教师是关键、领导是保证”的指导思想就更加重要了。因此，我们认为首先是大家有没有认识、能不能把数学建模的思想和方法融入大学数学主干课程中去的问题。如果教师和学生得不到领导的鼓励和支持，有关建模竞赛等课外活动就很难开展了。专科类院校中相关专业的学生参加大学生数学建模竞赛的人数也许不会很多，但是学习并掌握数学建模的思想和方法对于他们将来的事业发展同样是十分重要的。我访问过一个部队医学院，他们的数学课时很少，但是每年都有同学积极参加竞赛，成绩也相当不错。教师热情地利用周末的时间给学生补充有关的数学和数学软件等方面的知识和技能，更激励学生提高自己的自学能力。我们和该校的学生、老师和领导座谈时，领导认为医学院有一部分学生学习更多的数学和数学建模的思想和方法绝对不是坏事，这不仅是因材施教的问题，对于提高办学水

平也是大有帮助的。有关教师也认为这样做自己不仅仅是付出，自己必须进修提高，在教学的过程中也不断地提高了自己的学术和教学水平。同学们更认为不仅增强了自己的能力，对后继课程的学习和专业实践活动都很有帮助。我们相信这对所有专科类院校和相关专业的师生来说都是有可能做到，甚至可能做得更好。因此，我们在编写本书时，把重点放在有助于教师 and 领导更好地认识数学建模的重要性以及数学建模教育在培养各种人才中的重要作用，探讨怎样把数学建模的思想和方法融入大学数学主干课程中去的具体的教学单元，以起到抛砖引玉的作用。至于种种数学建模的方法已经出版了大量的教材和专著，教师不难找到并能选择使用。

由于我们的水平有限，本书中难免有不妥错误之处，希望读者批评指正。

最后我们要感谢湖南教育出版社的领导，特别是郑绍辉编审的耐心和大力支持，本书才能顺利出版。

叶其孝

于北京理工大学，2008 年 3 月

目 录

序言	1
第一章 数学建模的本质特征	1
引言	1
§ 1.1 什么是数学建模?	1
§ 1.2 数学建模是用数学来解决实际问题的桥梁	13
§ 1.3 初步的例子——人口增长的数学模型	17
第二章 大学生数学建模竞赛的由来和发展	21
引言	21
§ 2.1 普特南数学竞赛	22
§ 2.2 大学生数学建模竞赛	25
§ 2.3 为什么要参加大学生数学建模竞赛	28
§ 2.4 怎样参加大学生数学建模竞赛	30
2.4.1 培训阶段	30
2.4.2 三天的拼搏	31
2.4.3 赛后继续阶段	32
附录 数学建模竞赛的深化与拓展	42
第三章 可以融入高等数学课程的数学建模教学单元	49
引言	49
§ 3.1 复利、年金及其应用	51
3.1.1 基本模型	52
3.1.2 例子	53
3.1.3 连续模型(微分方程模型)及其和离散模型的关系	62
§ 3.2 可口可乐易拉罐的优化设计	67

§ 3.3 传染病流行的数学模型	98
§ 3.4 减(增)肥的数学模型	105
第四章 数学建模讲座资料	117
引言	117
§ 4.1 数学:科学的王后和仆人 (<i>Mathematics: Queen and Servant of Science</i>)	117
§ 4.2 数学建模和数学建模竞赛——从天文学的发展谈起	149
第五章 若干最新科技进展中数学和数学建模所起的重要作用	169
引言	169
§ 5.1 21 世纪是科学和工程领域“数学化”的世纪	169
5.1.1 美国国家科学基金会着手启动数学重大创新项目	169
5.1.2 美国国家科学基金会的数学科学创新项目	176
5.1.3 数学:关键技术的关键	178
5.1.4 资深评估小组对美国数学科学的国际评估报告(摘译)	212
§ 5.2 数学建模和 Google	219
5.2.1 正在进行的高效万维网搜索算法的探索	219
5.2.2 万维网信息检索本征向量方法综述	230
5.2.3 计算机科学家优化创新的广告拍卖系统	236
§ 5.3 数学建模和医学	244
5.3.1 对心血管系统进行建模——数学的令人激动的历程	244
5.3.2 数学建模和癌症	258
§ 5.4 数学建模和交通	265
5.4.1 自然界真正的神秘:是什么原因造成了交通堵塞——从冷战到拥阻的高速公路/大科学转移其注意力	

.....	265
§ 5.5 数学建模和艺术	271
5.5.1 M. C. Escher: 比眼睛看到的要更多的数学	271
§ 5.6 数学建模与海量数据	281
5.6.1 数学将震撼你的世界	281
附录 1 2001—2006 年中国大学生数学建模竞赛试题	294
引言	294
2001 年“网易杯”全国大学生数学建模竞赛试题	294
2002 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛试题	300
2003 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛试题	305
2004 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛试题	311
2005 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛试题	325
2006 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛试题	332
附录 2 2001—2007 年美国大学生数学建模竞赛试题	341
引言	341
2001 年美国大学生数学建模竞赛试题	342
2002 年美国大学生数学建模竞赛试题	349
2003 年美国大学生数学建模竞赛试题	354
2004 年美国大学生数学建模竞赛试题	360
2005 年美国大学生数学建模竞赛试题	366
2006 年美国大学生数学建模竞赛试题	368
2007 年美国大学生数学建模竞赛试题	376

第一章 数学建模的本质特征

引言

数学模型(Mathematical Model)这个名词(术语)早就为科学界、工程界,甚至经济学界所熟知,因为他们就是用这种方法来研究他们要处理解决的问题的,也就是通过近似表示他们要处理的复杂问题——数学模型——来解决问题的。不过,数学建模(Mathematical Modeling)这个名词(术语)大概是20世纪60年代才出现并迅速流行开来,虽然不能说无人不晓数学模型和数学建模这两个名词,但是至少可以说,它们已经是无处不在的了,甚至普通的报刊上也常常出现这两个名词。

本章将重点阐述数学建模的本质特征或难点。数学建模是用数学来解决实际问题的桥梁,从人口问题的三个简单的数学模型的分析引起读者对数学建模的本质特征或难点的具体理解。

§ 1.1 什么是数学建模?

什么是数学建模?

数学模型(Mathematical Model)是用数学符号对一类实际问题或实际系统发生的现象的(近似的)描述,而数学建模(Mathematical Modeling)则是获得该模型、求解该模型并得到结论以及验证结论是否正确的全过程。数学建模不仅是了解系统的基本规律的强有力的工具,而且从应用的观点来看更重要的是预测和控制所建模系统的行为的强有力的工具。许多出现的物理现象,常常是从某个实际问题的简化的数学模型的求解中发现,并给以明

确的数学表述，例如，混沌、孤立子、奇异吸引子等。

数学建模本身并不是什么新发现。纵观科学技术发展史，我们可以看到数学建模的思想和方法是自古以来天文学家、物理学家、数学家等用数学作为工具来解决各种实际问题的主要方法。不过数学建模这个术语的出现和频繁使用是 20 世纪 60 年代以后的事情。很重要的原因是，由于计算的速度、精度和可视化手段等长期没有解决，以及其他种种原因，导致有了数学模型，但是解不出来，或者算不出来或不能及时地算出来，更不能形象地展示出来，从而无法验证数学建模全过程的正确性和可用性，数学建模的重要性逐渐被人“淡忘”了。然而，恰恰是在 20 世纪后半叶，计算机、计算速度和精度、并行计算、网络计算等计算技术以及其他技术突飞猛进的飞速发展，给了数学建模这一技术以极大的推动，不仅重新焕发了数学建模的活力，更是如虎添翼地显示了数学建模的强大威力。而且，通过数学建模也极大地扩大了数学的应用领域，甚至在抵押贷款和商业谈判等日常生活中都要用到数学建模的思想和方法。人们越来越认识到数学和数学建模的重要性。学习和初步应用数学建模的思想和方法已经成为当代大学生，甚至是生活在现代社会的每一个人，都必须学习的重要内容。下面我们只是引用一些专家的论述来说明这一点。

“没有数学建模的广泛应用就不可能设想会有现代科学。数学建模的方法的本质就是把原来的对象用它的‘像’——数学模型来替代，并在计算——逻辑算法的帮助下深入研究该模型。研究、构造和设计的这个‘第三种方法’把理论和实验的优势都结合在一起了。不是对对象本身而是对它的模型进行研究就能使我们便宜地、容易地和快速地在任何可以想象到的情景下研究模型的性质和行为(这是理论的优势)。同时也要感谢现代计算方法的威力对模型的数值实验就能得到纯理论的方法不能得到的有关对象的仔细和深入的研究(这是实验的优势)。数学建模的方法在覆盖着从技术系统的研制及其控制到复杂的经济和社会发展过程的分

析的新领域得到广泛的研究是不足为奇的。”^①

“把对外部世界各种现象或事件的研究化归为数学问题的数学建模的方法，在各种研究方法，特别是与电子计算机的出现有关的研究方法中，占有主导地位。数学建模的方法能使人们在解决复杂的科学技术问题时设计出在最佳情势下可行的新的技术手段，并且能预测新的现实。”^②

“一切科学和工程技术人员的教育必须包括数学和计算科学的更多的内容。数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具。科学家正日益依赖于计算方法，而且在选择正确的数学和计算方法以及解释结果的精度和可靠性方面必须具有足够的经验。对工程师和科学家的数学教育需要变革以反映这一新的现实。”^③

数学建模的主要步骤

数学建模的全过程大体上可归纳为以下步骤：

1. 对某个实际问题进行观察、分析(是否抓住主要方面)；
2. 对实际问题进行必要的抽象、简化，作出合理的假设(往往是很不容易的)；
3. 确定要建立的模型中的变量和参数；
4. 根据某种“规律”(已知的各学科中的定律，甚至是经验的规律)，建立变量和参数间确定的数学关系(明确的数学问题或

① A. A. Samarskii, A. P. Mikhailov, *Principles of Mathematical Modeling—Ideas, Methods, Examples* (《数学建模的原理——思想、方法、例子》), Taylor & Francis, 2002, pp. 1~5.

② A. H. Тихоносов, *Mathematical Model*, “Encyclopaedia of Mathematics”, Kluwer Academic Publishers, 1995, Vol. 3, pp. 784~785. 中译本:《数学百科全书》第3卷, pp. 647~648, “数学模型”条目, 科学出版社, 1997.

③ A. Friedman, J. Glimm, J. Lavery, *The mathematical and computational sciences in emerging manufacturing technologies and management practices* (《新兴的制造技术和管理实践中的数学和计算科学》) — SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences, SIAM, 1992, pp. 62~63.

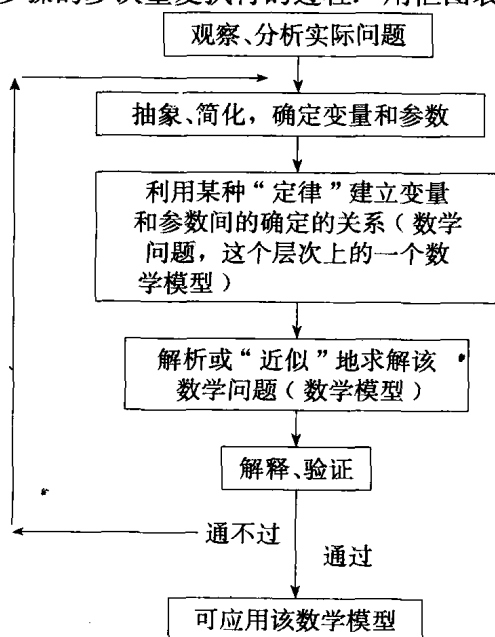
在这个层次上的一个数学模型)，这可能是一个非常具有挑战性的数学问题；

5. 解析或近似地求解该数学问题，这往往涉及复杂的数学理论和方法，其中包括近似方法和算法；

6. 数学结果能否展示、解释甚至预测实际问题中出现的现象，或用某种方法（例如，历史数据、实验数据或现场测试数据等）来验证结果是否正确（这也是很不容易的）；

7. 如果第6步的结果是肯定的，那么就可以付之试用；如果是否定的，那就要回到第1~6步进行仔细分析，重复上述建模过程。

因此，如果要对数学建模下定义的话，那就是：数学建模就是上述7个步骤的多次重复执行的过程。用框图表示如下：



定义：数学建模就是上述框图多次执行的过程。

由此可见，数学建模过程中最重要的三个要素，也是三个最大的难点是：

1. 怎样从实际情况出发作出合理的假设，从而得到可以执行的合理的数学模型；
2. 怎样简明、合理、快捷地求解模型中出现的数学问题，它可能是非常困难的问题；
3. 怎样验证模型是合理、正确、可行的。

数学建模的难点

所以，当你看到一个数学模型时，就一定要问问或者想一想它的假设是什么，是否合理？模型中的数学问题的求解是否很难，数学上是否已经解决？怎样验证该模型的正确性与可行性？当你亲自参加数学建模时牢记这三条，一定会受益匪浅。

下面摘引一段某位专家对这个问题的论述。

Michael Mesterton - Gibbons 曾在其著作 *A Concrete Approach to Mathematical Modelling* (《数学建模的具体方法》) 中讲到建模的 ABC (Assume, Borrow, Critize) 也强调了假设等的重要性，值得参考。

“A 就是假设

如果你的数学经验教给你的是，永远不要假设没有向你提供的前提或事实，那么本书将会使你感到吃惊。(在建模过程中) 给你的假设或事实极少是足够的，所以你必须作出一些假设——有关什么是重要的以及什么是不重要的，确信什么是超出了可以合理怀疑的范围，以及什么是迄今仍未解决的问题。确实，在非常现实的意义下，模型就是你所作出的若干假设。数学能够使你从这些假设推断出结论，这些结论，(a)不用数学推断的话不会那么清晰可见，(b)能够用你们的数学模型与试图去解释的物理现象的观测数据进行比较。两者符合的程度决定了该模型的价值。两者符合很差不见得(不应该!)表示你所用到的数学是错误的，而可能是你所作的一个(或多个)假设的有效性令人怀疑。于是你就要修改你的模型(即修改你所作的假设)，建模的步骤就要再执行一遍。

B 就是借鉴

为什么要借鉴呢？数学模型就是企图通过抽象的形式来抓住所观察现

象的本质性的特征。这种企图能否成功很大(如果不是更大)程度上取决于建模者对那些现象的经验知识以及他的数学能力。如果你既没有这些知识,又没有时间来获得这些知识的话,你该怎么办呢?回答是从科学文献或比你更有经验的同事那里借来你需要的假设(当然,务必要感谢你的这种资料的来源和出处)。在对有影响的人物应有的尊敬的同时,比之于从零开始更为现实的做法是在现有明显的基础上进行建模。所以你一定要准备好不客气地借鉴。但是这样做会有危险,即你太轻易地接受了出版物中结论的权威性的危险。因此……

C 就是批判和分析

你还必须准备好批判:准备好不仅批判你自己所作的假设也要批判从别处借鉴来的假设。谁来判定这些假设是对还是错呢?回答就是你来判定!建模是一种多次反复的过程。你从假设或借鉴开始,借助于数学的帮助你得到了结论,你批判分析这些结论;如果你对结论不满意,那么你就再作假设或借鉴,再次得到结论并进行批判分析,如此重复执行这个过程直到得出你满意的结论(模型能够解释观察结果)为止。切莫忘记 A, B, C, 假设, 借鉴, 批判和分析。”

从简单到精细

在建模过程中还有一条不成文的原则:“从简单到精细”,也就是说,首先建立一个比较简单但尽可能合理的模型,对该模型中的数学问题有可能解决,从而有可能做到仅仅通过实验观察不可能做到的事,甚至发现重要的现象。如果在求解该模型时结果不合理,甚至完全错误,那么它也有可能告诉我们如何改进的方向。

Frederic Y. M. Wan (温耀明) 曾在其著作 *Handbook of Applied Mathematics—Selected Results and Methods* (《应用数学手册——精选的结果和方法》) 中谈到数学建模从简单到精细的过程。该书 p. 1048 中的一段话对我们有很大的启发, 即

“不完全的模型仍然是有用的, 因为从这些模型中获得的信息往往提供了对实际现象某些方面的洞察。在某种程度上, 在诸如社会和生物科学中没有面面俱到的模型, 对复杂的社会和生物变化的过程的有效研究通常是从最简单但也是重要的数学模型开始的, 包括具有附加作用和特征的更为精细的

模型是在对比较简单的模型的透彻的了解之后形成并进行分析的. 模型序列的选取通常是从各种基本的机理的相对重要性中得到启发的, 可以利用的能够分析不同类型模型的数学方法也会对模型序列的选取有影响. 对于先前未曾接触过或者很少探索过的领域的科学研究而言, 科学发展的历史极大地表明了‘从简单到精细’的方法的重要性.”

“双向翻译”的能力

要想比较成功地运用数学建模去解决真正的实际问题, 还要学习“双向翻译”的能力, 即能够把实际问题用数学的语言表述出来, 而且能够把数学建模得到的(往往是用数学形式表述的)结果, 用普通人(或者说要应用这些结果的非数学专业的人士)能够懂的语言表述出来.

通常人们从问题的性质出发把数学模型分为: 确定性模型和随机模型, 离散和连续模型; 按照从机理还是经验(数据)出发来建模, 分为: 机理模型和经验模型; 按照模型中出现的数学问题, 分为: 优化模型, 图论模型, 微分方程模型, 概率模型等等. 还可以论述: 怎样从子模型构造总体模型以及抽象成为数学问题的种种手段、方法和技巧. 各行各业的数学模型和建模技巧千千万万, 任何一本书是不可能概括全的, 基础数学的许多内容在数学建模的过程中也要用到. 我们后面将从非常有限的几个例子来说明数学建模的全过程(开普勒三定律、牛顿的万有引力定律和行星运动规律), 在这些例子中我们将详细叙述合理的简化假设是什么, 在当时困难的数学问题是什么, 模型是怎么验证的; 两个重要的建模方法(量纲分析和模拟); 从简单模型中发现的重要、普适的现象(气象学中的 Lorentz 模型和蝴蝶现象)以及若干与我们的日常生活密切相关的可以应用的数学模型.

数学建模涵义的工具书阐释

查一下英文字典和百科全书对了解模型和建模也有好处.

《英汉大词典》(缩印本), 上海译文出版社, 1991 年第 1