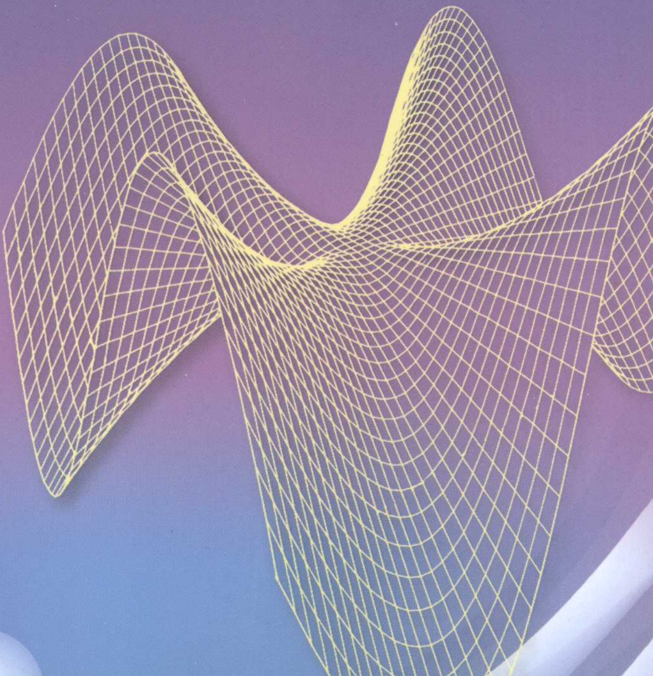
高等学校教材

# 线性代数

黄廷祝　成孝予



Linear Algebra

高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

# 线性代数

黄廷祝　成孝予

高等教育出版社

## 内容提要

本书是在作者编写的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《线性代数与空间解析几何(第三版)》的基础上,针对未将线性代数与空间解析几何融为一门课程的院校,和不同高等院校对线性代数课程的不同要求,在保持原有教材的内容体系和编写风格的基础上,以线性代数作为独立内容简化修改而成。

本书对线性代数的传统内容进行了重新处理,特别是将初等变换作为贯穿全书的计算方法和重要的理论推导工具,使得理论体系处理更加科学和简洁,易教易学。本书主要内容包括矩阵及其初等变换,行列式,$n$ 维向量空间,特征值与特征向量,二次型。

本书可作为高等院校非数学类各专业的线性代数课程教材,也可供有关人员学习参考。


**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/黄廷祝,成孝予. —北京:高等教育出版社,2009.2

ISBN 978-7-04-025536-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①黄…②成… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 004685 号

**策划编辑** 宋瑞才 **责任编辑** 宋瑞才 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 尹 莉
**版式设计** 马敬茹 **责任校对** 王 超 **责任印制** 陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京市白帆印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2009 年 2 月第 1 版 |
| 印　　张 | 11 | 印　　次 | 2009 年 2 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 200 000 | 定　　价 | 12.50 元 |





**物料号　25536-00**

# 前　言

本教材的前身为黄廷祝、成孝予编“十五”和“十一五”国家级规划教材《线性代数与空间解析几何》。上述教材将线性代数与空间解析几何融为一体，并融入了较多的应用实例，该教材被许多高等院校采用。

考虑到一些学校没有将“线性代数”与“空间解析几何”融为一门课程开设，使用上述教材时感到有些不便，作者在保持原有教材内容体系、特色和风格等的基础上，以“线性代数”作为独立内容，特别是充分考虑不同高等院校的教学要求，又满足教育部教学基本要求和研究生入学考试要求，适当降低要求、难度和篇幅，修改成为本教材，使得该教材适用于教学要求不同的高等院校非数学类专业。

教材在对相关内容的处理上，比如行列式与矩阵的初等变换，克拉默法则的证明，齐次方程组有非零解与非齐次方程组有解的充要条件，特征值与特征向量的几何意义等，都融入了编者对相关问题多年的思考与实践经验。例如：

1. 在第一章就引出初等变换的方法，并在其后的计算与证明过程中有意识地反复使用，有利于计算过程与计算格式的程序化，同时使理论（系列重要结论）推导更加简单和便于理解，如将方阵可逆与齐次方程组只有零解、非齐次方程组有唯一解、矩阵等价于单位矩阵、可表为有限个初等矩阵的乘积等建立等价关系；

2. 向量组的线性相关性、线性方程组解的结构中若干个重要定理采用一系列等价命题的叙述与证明方法，使其内在关系揭示得更加深刻、明确、清楚，证明过程更加简洁、易懂；

3. 用伴随矩阵的方法处理逆矩阵的计算后，紧接着利用逆矩阵与伴随矩阵的方法证明克拉默法则，使克拉默法则的证明比通常证法简明易懂；

4. 为代数理论提供几何背景。如三维向量空间中线性相关性、特征值与特征向量的概念、正交变换、基变换与坐标变换，都给出了相应的几何解析，使代数方法的几何意义更加清晰；

5. 兼顾科学性与很好的可读性。

配套的电子教案（高等教育出版社出版）是在两位作者多年教学实践和授课实践基础上制作而成的。教案融入了教材两位编者多年讲课经验、教学创意与设计，实现讲课与多媒体课件的有机结合。例题配备与分析完整、丰富和

新颖。

修改后的该教材是一本简明教材。

限于编者水平，不妥之处在所难免，恳请读者和使用该教材的教师批评指正。

编　者

2008 年 8 月于成都

# 目　录

# 第一章 矩阵及其初等变换

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关,并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究. 甚至有些性质完全不同的,表面上完全没有联系的问题,归结成矩阵问题以后却是相同的. 这就使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的工具,因而也就成为代数,特别是线性代数的一个主要研究对象,尤其是随着计算机的广泛应用,矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础.

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵.

## §1.1 矩阵及其运算

### 一、矩阵的概念

在物资调运中,某类物资有 3 个产地、5 个销地,它的调运方案可在表 1.1 中反映.

表 1.1 单位:t

| 调运数 / 产地 \ 销地 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | 0 | 3 | 4 | 7 | 5 |
| Ⅱ | 8 | 2 | 3 | 0 | 2 |
| Ⅲ | 5 | 4 | 0 | 6 | 6 |

如果我们用 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4,5)$ 表示从第 $i$ 个产地运往第 $j$ 个销地的运量(如 $a_{12}=3,a_{24}=0,a_{35}=6$),这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

用这种数表来表达某种状态或数量关系,在自然科学、技术科学以及实际生活中也是常见的. 这种数表我们称为**矩阵**.

**定义 1　由 $m\times n$ 个数排成的 $m$ 行 $n$ 列数表**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**称为一个 $m$ 行 $n$ 列矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵,其中 $a_{ij}$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列处的元,$i$ 称为 $a_{ij}$ 的行指标,$j$ 称为 $a_{ij}$ 的列指标.**

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或者 $(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$ 表示矩阵. 若需指明矩阵的行数和列数,常写为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

为一个 $2\times 3$ 矩阵.

$n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数可以组成一个 $m$ 行 $n$ 列矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组的**系数矩阵**;而系数及常数项可以组成一个 $m$ 行 $n+1$ 列矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组的**增广矩阵**. 我们将利用矩阵这一工具来研究线性方程组.

元全为零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 如

$$O_{2\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad O_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $m=n$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ **阶矩阵**(或 $n$ **阶方阵**).

只有 1 行($1\times n$)或 1 列($m\times1$)的矩阵

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$$

分别称为**行矩阵**和**列矩阵**.

若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元 $a_{ij}=0\ (i\neq j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**,$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对角元**,记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(-1,5)$$

为二阶对角矩阵.

对角元全为数 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**,$n$ 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}_n$,在不致混淆时也记为 $\boldsymbol{I}$,即

$$\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵分别称为**上三角形矩阵**和**下三角形矩阵**.

## 二、矩阵的线性运算

矩阵是线性代数的基本运算对象之一,为了讨论矩阵的运算,我们首先给出矩阵相等的概念.

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,如果它们为同型矩阵,且对应元相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & x & -1\\ 3 & 4 & y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}z & 3 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则立即得

$$x=3,\quad y=2,\quad z=0.$$

现在我们介绍矩阵的加法运算及矩阵与数的乘积.

设有两种物资(单位:t)，要从 3 个产地运往 4 个销地，其调运方案分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}30 & 25 & 17 & 0\\ 20 & 0 & 14 & 23\\ 0 & 20 & 20 & 30\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & 15 & 13 & 30\\ 0 & 40 & 16 & 17\\ 50 & 10 & 0 & 10\end{pmatrix},$$

那么，从各产地运往各销地两种物资的总运量是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}40 & 40 & 30 & 30\\ 20 & 40 & 30 & 40\\ 50 & 30 & 20 & 40\end{pmatrix}.$$

**定义 2(矩阵的加法)　设矩阵**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

**是两个 $m\times n$ 矩阵，将它们的对应元相加，得到一个新的 $m\times n$ 矩阵**

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix},$$

**则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.**

值得注意的是，只有同型矩阵才能相加，且同型矩阵之和仍为同型矩阵. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不能相加.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，若把它的每一元换为其相反数得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记为 $-\boldsymbol{A}$. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

利用矩阵的加法与负矩阵的概念,我们可以定义两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差,即矩阵的**减法**:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}),$$

就是把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元相减.

显然,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 等价.

下面介绍矩阵与数的乘积.

设从某三个地区分别到另两个地区的距离(单位:km)可用下列 $3\times 2$ 的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 90 & 60 \\ 120 & 70 \\ 80 & 55 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{甲} & \text{乙} \end{array} & \end{array}.$$

已知货物的运费为 2 元/(吨 · 千米),那么,各地区之间每吨货物的运费只要将 $\boldsymbol{A}$ 中每一元都乘以 2,即得

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 180 & 120 \\ 240 & 140 \\ 160 & 110 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{甲} & \text{乙} \end{array} & \end{array}.$$

矩阵与数的乘积的定义如下.

**定义 3(矩阵的数乘)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,$k$ 是一个数,则称矩阵**

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

**为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 $k$ 的乘积(简称矩阵的数乘),记为 $k\boldsymbol{A}$.**

也就是说,用数 $k$ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 中的每一元都乘 $k$.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**.

容易证明，设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，$k,l$ 为数，那么矩阵的线性运算满足下列八条性质：

1° $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

2° $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

3° $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

4° $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

5° $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

6° $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

7° $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

8° $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

**例 1**　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 5 & -4\\ 5 & 1 & 9\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

**解**　由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7-3 & 5-(-1) & -4-2\\ 5-1 & 1-5 & 9-7\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 三、矩阵的乘法

设甲、乙两家公司生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的计算机，月产量(单位：台)为

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ}\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}25 & 20 & 18\\ 24 & 16 & 27\end{pmatrix} & \begin{matrix}\text{甲}\\ \text{乙}\end{matrix}\end{array}.$$

如果生产这三种型号的计算机每台的利润(单位：万元/台)为

$$\begin{pmatrix}0.5\\ 0.2\\ 0.7\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{Ⅰ}\\ \text{Ⅱ}\\ \text{Ⅲ}\end{matrix},$$

则这两家公司的月利润(单位：万元)应为

$$\begin{pmatrix} 25\times0.5+20\times0.2+18\times0.7 \\ 24\times0.5+16\times0.2+27\times0.7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29.1 \\ 34.1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{甲} \\ \text{乙}\end{matrix}.$$

可见,甲公司每月的利润为 29.1 万元,乙公司的利润为 34.1 万元.

矩阵的乘法的定义如下:

**定义 4　设 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$,$p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$,则由元**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

**构成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.**

由定义可知:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的列数必须等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘;

(2) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数;

(3) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列元 $c_{ij}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列元对应乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

**例 2**　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{AD}$.

**解**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times3+3\times2 & 1\times3+2\times1+3\times2 \\ 3\times1+2\times3+1\times2 & 3\times3+2\times1+1\times2 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{AD}$ 无意义.

**例 3**　对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}\tag{1.1}$$

若令矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=b.$$

即方程组(1.1)可表为如下矩阵形式：

$$AX=b.$$

矩阵乘法满足下列运算规律：

1° 结合律　$(AB)C=A(BC)$；

2° 数乘结合律　$k(AB)=(kA)B=A(kB)$，$k$ 为数；

3° 分配律　$A(B+C)=AB+AC$，

$$(B+C)A=BA+CA.$$

这里只证明结合律，其他两条请读者自证.

设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $n\times p$ 矩阵，$C$ 是 $p\times s$ 矩阵，则 $AB$ 是 $m\times p$ 矩阵，$BC$ 是 $n\times s$ 矩阵，故 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 都是 $m\times s$ 矩阵，因而是同型矩阵.

现在比较它们的对应元.

矩阵 $(AB)C$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元为

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

矩阵 $A(BC)$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元为

$$\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}\right)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{il}b_{lk}c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

上式成立是由于双重有限项求和符号可以交换次序，所以 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的对应元相等，故有

$$(AB)C=A(BC).$$

**例 4**　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $AB$ 和 $BA$.

显然

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

在例 4 中,我们已经看出矩阵乘法一般不满足交换律,即一般

$$AB\neq BA.$$

当 $AB\neq BA$ 时,称 $A$ 与 $B$ **不可交换**,当 $AB=BA$ 时,称 $A$ 与 $B$ **可交换**.

从例 4 还可见,$A,B$ 都是非零矩阵,但 $AB=O$. 由此可知,矩阵的乘法不满足消去律,即 $A\neq O$ 时,由 $AB=AC$ 不能推出 $B=C$. 事实上,由

$$AB-AC=A(B-C)=O,$$

不能推出

$$B-C=O.$$

矩阵乘法一般不满足交换律,但是,容易得到如下常用结果:

$$I_mA_{m\times n}=A_{m\times n},$$
$$A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}.$$

可见,单位矩阵在矩阵乘法中的作用与数 1 在数的乘法中的作用类似.

我们称

$$kI=\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=\begin{pmatrix}k&&&\\&k&&\\&&\ddots&\\&&&k\end{pmatrix}\quad(k\neq 0)$$

为**数量矩阵**.

$n$ 阶数量矩阵 $kI$ 与任意 $n$ 阶矩阵 $A$ 也是可交换的. 这是因为

$$(kI)A=k(IA)=kA,$$
$$A(kI)=k(AI)=kA.$$

我们还可定义方阵的幂和方阵的多项式.

**定义 5　设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,$k$ 为正整数,定义**

$$\begin{cases}A^1=A,\\A^{k+1}=A^kA,\quad k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由定义可以证明:当 $m,k$ 为正整数时

$$A^mA^k=A^{m+k},$$
$$(A^m)^k=A^{mk}.$$

但需注意,一般

$$(AB)^k\neq A^kB^k.$$

当 $AB=BA$ 时,$(AB)^k=A^kB^k=B^kA^k$,但其逆不真.

**定义 6　设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 $x$ 的 $k$ 次多项式,$A$ 是 $n$**