算學叢書

第三種

虛數詳論

何魯
段子燮 合著

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂簹

上海商務印書館謹啓

中華民國十三年六月初版
民國廿二年二月印行國難後第一版

算學叢書 虛數詳論一冊（三五二四）
每冊定價大洋壹元貳角
外埠酌加運費匯費

著作者 何魯 段子燮
發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

二七四九上

虛數詳論

普通數學類之二

序

純粹數學入室之功。在能逐處推廣。虛數者。推廣代數運算符號之一也。自明實數之用。凡一次方程式。皆立可以解。而二次方程式。則有時不能。(參閱著者理論二次方程式)虛數既刱。其解乃廣。於是而無解之二次方程式亦有解矣。惟其解爲虛而已。實際上虛解恒無謂、然其用不惟不以減沒。且愈以發展。寖寖然括純粹數學之全部。(幾何學屬之)豈不以其有大助於理論乎。圖解雜數。俾渺然不可捉摩者。悉納諸片紙之中。按跡可籌。致用之宏。其在斯乎。

中華民國十三年一月

著者 何魯 段子燮 識

讀例

一是書爲著者普通數學類成書之二。名虛數詳論。

一是書凡分五章。一二章爲虛數索原及其運算。用別形所得慕氏公式。致用最廣。其論形數則爲圖解雜數運算張本。第三章推廣三角公式。第四章論三次方程式。末章論二項方程式。於 n 次單位根演論極詳。爲近行大代數三角學所不及。

一是書習題多有涉及微積分學範圍者。如讀者未治微積學。則可略之。(習題之有＊星點者)

一是書習題關於理論者最多。凡此皆未附答案。

一愈深治數學者。愈覺無時不藉虛數之助。故深讀虛數者。正易於深進者也。

一張鄭二君。既爲不佞等讎校行列式詳論矣。復殷然於是書再任此役。且爲酌訂名詞。蒐羅習題。匡裨獨多。故私心感謝無極焉。

釋　名

一.一數而糅合虛數二類數者。謂之雜數。其形爲 $a+bi$。$(i=\sqrt{-1})$

一.形數者。有大小有方位有向者也。如以一線節 AB 表之。其大小卽 AB 之長也。其方位卽 AB 對於某定軸之斜度也。其向則線節之正向也。(宜參閱著者初等代數倚數變跡)

一.一數 a 自乘 n 次之積。以 a^n 代之。謂之 a 之 n 次乘冪。(n 爲正整數)

一.三角上所用之圓。半徑恆爲單位。故量角之數與量弧同。或言弧。或言角。其歸一也。

一.如雜數之形爲 $a+bi$。則 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 謂之雜數之模。如其形爲 $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$。則 ρ 謂之此雜數之模。ω 其幅也。(今多作向角)。2π 或全周。(半徑爲 1 者)謂之全幅。$2k\pi$ 謂之全幅整倍數。k 整數也。近有以其模與幅爲雜數之軸樞經緯者。(極標位)著者惑焉。蓋在軸樞經緯。ρ 可正可負。而雜數之模。則不能爲負數也。

一.一雜數含兩種實數。一屬實數部者。一則虛數之係數。如視此二量附麗於某制。則在平面上定一點。謂之雜數之跡。反之平面上之任一點。可視爲某一雜數之跡。

一.$a+bi$ 及 $a-bi$ 謂之交錯虛數。其別形 $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$ 及 $\rho(\cos\omega-i\sin\omega)$ 亦謂之交錯虛數。

一.二項方程式最普通之形爲 $X^n-A=0$。中祇有一項未知數。一項常數。未知數之指數爲任一正整數。

一.$x^n-1=0$ 式之 n 根。謂之 n 次單位根。其根之普通公式爲 $x_k=cos\frac{2k\pi}{n}+i\,sin\frac{2k\pi}{n}$。如 k 與 n 互爲壹數時。則 x_k 謂之 n 次單位母根。

一.如 n 爲整數。k 亦爲一整數。則 kn 謂之 n 之整倍數。而 $\frac{n}{k}$ 謂之 n 之分倍數。

一.壹數者。除本數與1外。無數可以約之者也。如 2, 13,……, 29, 是也。兩數互爲壹數者。除1以外。無他數可爲之公約數也。譬如 18 非壹數。25 亦非壹數。而 18 與 25 可云互爲壹數。

一.兩數互爲倒數時。則其乘積爲一。反之兩數之積爲一。則是兩數互爲倒數。

目　　錄

虛數詳論

第一章　虛數之基本運算

§ 1.　虛數定義　虛數單位 $i=\sqrt{-1}$　代數學御乘法之律曰。

兩同號數(指實數)相乘。其積爲正。

兩異號數相乘。其積爲負。

例如
$$(+a)\times(+b)=+ab$$
$$(+a)\times(-b)=-ab$$
$$(-a)\times(-b)=+ab$$
$$(-a)\times(+b)=-ab$$

如 $a=b$ 則有
$$(+a)\times(+a)=+a^2$$
$$(-a)\times(-a)=+a^2$$

依定義。$+a^2$ 爲 $+a$ 或 $-a$ 之平方(或二次乘積)。反之 $+a$ 或 $-a$ 爲 $+a^2$ 之平方根。亦卽一實數之平方。恆爲一正數。而一正數必有二平方根。値同而號異也。準此。則一負數不能以一實數爲其平方根矣。換言之。卽下方程式

$$\lambda^2+a^2=0 \qquad (1)$$

爲無解。代數家不因而束手也。因搬新數。以繼運算之窮。以 $\sqrt{-a^2}$ 爲 $(-a^2)$ 之根。卽當有 $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-a^2}=-a^2$。是數者 $\sqrt{-a^2}$。純爲運算符號。以數値論。則無意義可言也。(習算術者。不知何爲 $\sqrt{-4}$。蓋非生於量者也。)

夫 $\sqrt{-a^2}$ 既爲運算符號。則御之之道。在求勿背運算之律。律不背。又可視之無異於他種數矣。

律有

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=ab$$

故亦有

$$\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2(-1)}=\sqrt{a^2}\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$$

令 $\sqrt{-1}=i$ 則

$$\sqrt{-a^2}=ia$$

ia 謂之虛數。i 謂之虛數單位。又凡 i^2 常以 -1 代之。於是 (1) 之解爲

$$\begin{cases}x_1=+ia\\x_2=-ia\end{cases}$$

§ 2.　雜數　一數而糅合虛實二類數者。謂之雜數。其形爲

$$a+bi$$

i 卽符號 $\sqrt{-1}$ 也。a b 爲二實數。a 謂之雜數中之實數部。b 則爲雜數中虛數之係數也。

一雜數 $(a+bi)$ 爲零時。必

$$a=0,\qquad b=0$$

謂兩雜數 $a+bi$　$a'+b'i$ 相等。必 $a=a', b=b'$

凡此皆本定義則然也。近行大代數。譯者勉勉然爲證明。非徒無益。又害其義。夫虛實二類數。卓然各別。其能糅和者。符號（$+-\cdots$）爲之介也。其不能相生則明矣。然讀者愼勿以虛實不

能相生之故病雜數。蓋其致用宏妙。皆以此也。是眞代數家意外之獲也。

§3. 雜數之運算　加法及減法

問題　求二雜數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 之和或較。

依定義

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(bi+b'i)$$

$$=(a+a')+(b+b')i=A+Bi$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(bi-b'i)$$

$$=(a-a')+(b-b')i=A'+B'i$$

卽以二雜數中之實數部與實部相加減。虛數係數與虛數係數相加減也。故二雜數之和。恒爲一新雜數。惟當 $B=0$ 時。卽

$$b+b'=0$$

時。則其和爲一實數

$$A=a+a'$$

矣。如 $a=a', b'=-b$ 則有二雜數

$$a+bi \qquad a-bi$$

其和爲一實數。$A=2a$。是二數謂之交錯虛數。二交錯虛數之較。爲一虛數。蓋

$$(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(bi+bi)=2bi$$

故也。

更推廣之。則有

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)\pm(a_3+b_3i)\pm\cdots\cdots\cdots\cdots\pm(a_n+b_ni)$$

$$=(a_1\pm a_2\pm a_3\pm\cdots\cdots\cdots\pm a_n)+(b_1\pm b_2\pm b_3\pm\cdots\cdots\pm b_n)i$$

$$=A_n+B_ni$$

§ 4. 乘法

問題 求二雜數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 之乘積。

依常律

$$\begin{array}{r} a+bi \\ a'+b'i \\ \hline aa'+a'bi \\ +ab'i+bb'i^2 \\ \hline aa'+(a'b+ab')i+bb'i^2 \end{array}$$

即

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

以 $i^2=-1$ 也。其積仍爲一雜數。

定理 二交錯虛數之乘積。爲一實數。蓋

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$$

更推廣而求 n 雜數之乘積。(n 爲有限者)

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)(a_3+b_3i)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a_n+b_ni)$$

則先求 $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$ 之積。依上法。立得

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$

命

$$a_1a_2-b_1b_2=\alpha_1 \qquad a_1b_2+b_1a_2=\beta_1$$

則

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=\alpha_1+\beta_1i$$

再求 $(\alpha_1+\beta_1i)(a_3+b_3i)$ 之積。同理可命之爲

$$(\alpha_1+\beta_1i)(a_3+b_3i)=\alpha_2+\beta_2i$$

逐漸以至

$$(\alpha_{n-2}+\beta_{n-2}i)(a_n+b_ni)=\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i$$

$\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i$ 卽所求之積也。

運算時。如任易各因子之次序。其結果終不變。此易得而實按者也。

§ 5. 設有四雜數

$$\begin{cases}a+bi\\a-bi\end{cases}\qquad\begin{cases}c+di\\c-di\end{cases}$$

中兩兩互爲交錯虛數。

令
$$\underset{1}{P=(a+bi)}\ \underset{2}{(a-bi)}\ \underset{3}{(c+di)}\ \underset{4}{(c-di)}$$

以 1,2 互乘。3,4 互乘。則

$$P=(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)$$

以 1,3 互乘。2,4 互乘。則

$$P=\Big\{(ac-bd)+(ad+cb)i\Big\}\Big\{(ac-bd)-(ad+cb)i\Big\}=(ac-bd)^2+(ad+cb)^2$$

後以 1,4 相乘。2,3 相乘。則有

$$P=\Big\{(ac+bd)+(bc-ad)i\Big\}\Big\{(ac+bd)-(bc-ad)i\Big\}=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

由此得公式焉

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+cb)^2$$

或

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

卽兩平方和之乘積。仍等於兩平方之和也。

§ 6. 虛數模

依定義雜數 $a+bi$ 之模爲 $+\sqrt{a^2+b^2}$。可以符號 $|a+bi|$ 表之。

意卽
$$|a+bi|=+\sqrt{a^2+b^2}$$

也。

兩交錯虛數 $a+bi$ 及 $a-bi$ 之模。同爲 $+\sqrt{a^2+b^2}$。其積爲此模之平方。蓋

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

故也。

比較雜數之法。視其模之大小而定。

一雜數之模爲零者。則此雜數爲零。反之雜數爲零。其模亦爲零。

一實數之模。卽是數之係以正號者也。

定理 數雜數乘積之模。等於各雜數之模之乘積。

先設二雜數 $a+bi, c+di$。其模各爲 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $+\sqrt{c^2+d^2}$。是二數之積。爲

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

是積之模爲 $+\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$ 惟

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

明兩數之模之乘積也。

更推廣之令 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\alpha_n$ 爲 n 雜數。$|\alpha_1|\ |\alpha_2|\cdots\cdots|\alpha_n|$ 各爲其模。

本上理

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2|=|\alpha_1|\,|\alpha_2|$$

$$|\underbrace{\alpha_1\alpha_2}\cdot\alpha_3|=|\alpha_1\alpha_2|\,|\alpha_3|$$

$$|\underbrace{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\cdot\alpha_4|=|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|\,|\alpha_4|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\underbrace{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\cdots\alpha_{n-1}}\cdot\alpha_n|=|\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\cdots\alpha_{n-1}|\,|\alpha_n|$$

$\underbrace{a \cdots\cdots a_n}$ 爲一雜數。即 $a_1 \cdots\cdots a_n$ 求得之積也。

兩端互乘。則得

$$|a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n| = |a_1|\,|a_2| \cdots\cdots\cdots\cdots |a_n|$$

故定理云云。

或書爲

$$mod\,(a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n) = mod\, a_1 \cdot mod\, a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots mod\, a_n$$

§7. 定理

欲 n 雜數之乘積爲零。必此 n 數中至少有一數爲零。(n 爲有限者)

如一雜數爲零。則其模必爲零矣。依上理。一乘積之模爲其因子之模之乘積。而此 n 模中有一爲零。於是而此 n 模乘積爲零矣。亦卽此 n 雜數之乘積之模爲零。凡模爲零者。數必從之。故此乘積爲零也。

§8. 除法

問題　求以 $c+di$ 除 $a+bi$。

令 $x+yi$ 爲得數。則有

$$\frac{a+bi}{c+di} = x+yi$$

或

$$a+bi = (c+di)(x+yi) = (cx-dy) + (dx+cy)i$$

欲此兩端相等。必也

$$cx - dy = a$$

$$dx + cy = b$$

由此求得 x y 之値爲(c d 不盡爲零)

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \qquad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

於是

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

此另可以捷便之法得之。

凡以一數乘一分數上下。則分數之值不變。即

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$$

故有

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

$c-di$ 者 $c+di$ 之交錯數也

§ 9. 乘冪

定義 一數 a 之 n 次自乘積。謂之此數之 n 次乘冪。以符號 a^n 表之。

問題 求 i^n 之值

依定義

$$i=i$$

$$i^2=-1$$

於是

$$i^3=i(i^2)=i(-1)=-i$$

$$i^4=(i^2)(i^2)=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4(i)=i$$

$$i^6=i^4(i^2)=-1$$

………………………………