



中等职业教育国家规划教材  
全国中等职业教育教材审定委员会审定

# 数学

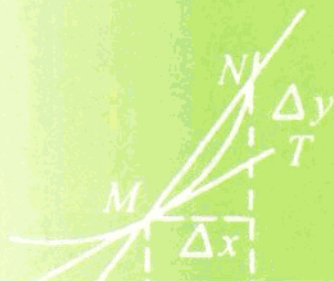
基础版

第四册

(修订本)

4

主编 乔家瑞



语文出版社 <http://www.ywcb.com>

中等职业教育国家规划教材  
全国中等职业教育教材审定委员会审定

# 数 学

基础版

第 四 册

(修订本)

主 编 乔家瑞  
责任主审 李文林  
审 稿 杨浩菊

语 文 出 版 社

中等职业教育国家规划教材

**数 学**

**基础版**

**第四册**

(修订本)

主编 乔家瑞

\*

**语文出版社出版**

100010 北京朝阳门南小街51号

E-mail: ywp@ywcb.com

新华书店经销 北京通州皇家印刷厂印刷

\*

787毫米×1092毫米 16开本 14.5印张 371千字

2005年11月第2版 2008年12月第9次印刷

定价: 14.50元

ISBN 978-7-80126-924-9

---

本书如有缺页、倒页、脱页,请寄本社发行部调换。

# 中等职业教育国家规划教材 出版说明

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神，落实《面向 21 世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，根据教育部《中等职业教育国家规划教材申报、立项及管理意见》（教职成〔2001〕1 号）的精神，我们组织力量对实现中等职业教育培养目标和保证基本教学规格起保障作用的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和 80 个重点建设专业主干课程的教材进行了规划和编写，从 2001 年秋季开学起，国家规划教材将陆续提供给各类中等职业学校选用。

国家规划教材是根据教育部最新颁布的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和 80 个重点建设专业主干课程的教学大纲（课程教学基本要求）编写的，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过。新教材全面贯彻素质教育思想，从社会发展对高素质劳动者和中初级专门人才需要的实际出发，注重对学生的创新精神和实践能力的培养。新教材在理论体系、组织结构和阐述方法等方面均作了一些新的尝试。新教材实行一纲多本，努力为教材选用提供比较和选择，满足不同学制、不同专业和不同办学条件的教学需要。

希望各地、各部门积极推广和选用国家规划教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

教育部职业教育与成人教育司  
2001 年 10 月

# 前 言

—

本教材编写的指导思想是：

1. 切实落实新《大纲》精神。新《大纲》继承和发扬了以往我国中等职业教育数学大纲的优良传统，致力于弥补我国中等职业学校数学教育的不足，建立了实施素质教育的中等职业学校数学课程的新体系，并首次正式提出使用计算器计算、要求形成基本计算工具使用能力的问题，为数学教学改革提出了新课题。基于对新《大纲》的理解和认识，我们完全按照新《大纲》的精神编写教材，同时根据中等职业学校某些专业的教学需求，适当增加了少量必需的内容。

2. 加强改革意识，加大改革力度。在教材编写中，要在培养学生创新意识和实践能力上多下功夫，这是一个重要目的和一条基本原则，是实施素质教育的核心。为了充分体现这一指导思想，我们在教材的编写中，力求突出知识的交汇性、再生性及应用性，建立数学教学的全新模式。在教材的编写中，尽可能地吸纳国内外数学教材编写的先进思想、方法和经验，走创新之路，努力编出职教特色，编出新特色，编出自己的特色。

3. 把握学生的认知规律。在教材编写中，我们认真遵循知识发生、发展的客观规律，从学生的年龄特征和现有的知识水平出发，尽量贯彻深入浅出，由易到难，由实际到抽象，循序渐进的原则；注意了教材的系统性、科学性以及各部分内容的相互独立；还兼顾了与专业课程的衔接。

4. 加强教材的实用性和适用性。在教材的编写中，我们充分考虑到我国地域辽阔，各地经济、文化发展不平衡，职教专业多等实际情况，力求使教材适用于不同地区、不同类型的职业学校，适合于不同专业、不同学习程度的学生使用。

二

本教材有如下特点：

1. 注重在知识浅层挖掘。从教学改革的要求和教学实际出发，教材将最基础部分的知识，从不同的起点、不同的层次、不同的侧面，进行了变通性强化、方法性强化和对比性强化，从而使基础知识得到充实、丰富和发展。

2. 注重培养学生的创新意识和实践能力。教材在内容的安排上，切实落实新《大纲》的认知要求三层次（了解、理解、掌握）和能力培养六方面（基本运算能力、基本计算工具使用能力、空间想像能力、数形结合能力、简单实际应用能力、逻辑思维能力）的要求，注重培养学生的创新意识和实践能力。

3. 注重加强学法指导，教会学生学习。进行学习方法的指导，教材除了在各章节的内容上不断渗透外，在每章之后，还专门编入了“学法指导”的内容，集中指导学习方法，让学生在知识学习的同时，不断地改进学习方法，逐步掌握科学的思维方式。

· 1 ·

4. 注重让学生参与实现教育目标的过程, 寓教学方法于教材之中。教材十分重视学生的认识过程和探索过程。例如, 在概念、定理、公式后, 安排“想一想”的内容, 提出具有启发性的问题, 让学生进行思考、讨论。又如, 安排让学生根据要求自己编制题目的内容, 使学生动手动脑, 把课堂教学变成师生的共同活动。再如, 教材中的例题, 除了给出解法外, 还在解法前安排分析, 解法后安排小结, 为学生自学创造条件。还适当地安排了“阅读空间”的内容, 提供有关材料供学生课外阅读或课堂上讨论。

5. 在例题和习题的编排上有较大改革。主要是: 把例题和习题的题量、难度进行量化; 引进客观题, 增加开放题和建模题等新题型; 采用串联成组的方法, 以使发挥题目的个体功能转变成发挥题目的整体功能; 选择富有代表性、启发性的题目, 进行详尽透彻的分析, 并在此基础上进行横向或纵向的演变, 最大限度地发挥题组的潜在功能; 在适当位置设计“条件填空题”或“结论填空题”, 以缩小知识跨度, 减少学习困难。

6. 《教学参考书》从内容到形式, 都有较大突破。在“教参”的编写中, 将教学参考、进修、考核三项内容融为一体。以教材中的章为编写单位, 安排了如下内容: 教材分析、课时分配、优秀课程设计介绍、习题思路分析与解答等。

### 三

为了编写出高质量、高水平的面向 21 世纪中等职业教育国家规划教材, 我社成立了国家规划中等职业文化基础课教材编写委员会。编委会主任: 史习江; 编委会副主任: 杨曙望; 编委会委员 (按姓氏笔画排列): 王立善、方鸣、史习江、李建国、乔家瑞、杨曙望、赵大鹏、赵曾、隆林、戴宗显。

本教材共四册, 供两学年四学期使用, 每学期一册。每册教材均有配套《教学参考书》和《练习册》。为满足中职学生参加高职、成考、自考等各类高等教育升学考试的需要, 另配有《数学复习考试教科书》。

本教材由乔家瑞任主编, 主审是张景斌、罗声雄。

参加编写方案讨论及教材编写的有张秋立、岳荫巍、彭林、陈斯、王永琛、逯新丽、张宗慈、李励信、朱林、马仲华、孙满立、王匡强、蒙锦杰、方曦、王刚、伊全才、钟致诚、方鸣、张程、郑力等。

责任编辑是赵曾、张程。

语文出版社  
2002 年 10 月

## 修订说明

为了全面、深入地落实《中等职业学校数学教学大纲（试行）》的精神，加强改革意识，加大改革力度，我们召开了多种形式的座谈会，进行了多方面的调查研究。通过调查研究使我们认识到，教材在使用过程中，应根据实际情况及时地进行修订，使之不断完善和提高。在保持教材原有特色的前提下，于2004年初我们对教材进行了较大幅度的修订，使教材更加贴近中职数学教学的实际情况，更全面地贯彻素质教育思想。

由于本册教材所编内容大部分为选学内容，考虑到中职学生的需求及教材本身对这些内容编写的难度就不大，因此，本次修订主要将教材中的某些错误进行了更正，同时，将“学法指导”改为“小结”，对重要的知识点采用填空式，更加明确了这部分内容编写目地，使之更加实用。

参加本次教材修订及编写工作的有乔家瑞、张秋立、彭林、张程，主编仍由乔家瑞担任。

语文出版社  
2005年9月

# 目 录

## 第一章 概率与统计

一 随机变量	( 1 )
1.1 离散型随机变量的分布列	( 1 )
1.2 离散型随机变量的期望与方差	( 7 )
二 统计	( 15 )
1.3 抽样方法	( 15 )
1.4 总体分布的估计	( 18 )
1.5 正态分布	( 23 )
1.6 一元线性回归	( 26 )
小结	( 30 )
附表 1 随机数表	( 37 )
附表 2 标准正态分布表	( 40 )

## 第二章 极限

一 数学归纳法	( 41 )
2.1 数学归纳法	( 41 )
二 极限	( 46 )
2.2 数列的极限及运算	( 46 )
2.3 函数的极限及运算	( 52 )
2.4 函数的连续性	( 57 )
2.5 两个重要极限	( 60 )
小结	( 63 )

## 第三章 导数与微分

一 导数与微分	( 68 )
3.1 导数	( 68 )
3.2 几种常见函数的导数	( 71 )
3.3 函数的和、差、积、商的导数	( 74 )
3.4 复合函数的导数	( 77 )
3.5 反函数的导数	( 79 )
3.6 微分的概念与运算	( 82 )
二 导数的应用	( 85 )
3.7 函数的单调性	( 85 )
3.8 函数的极值	( 87 )
3.9 函数的最大值与最小值	( 90 )



3.10 近似计算·····	( 93 )
小结·····	( 96 )
<b>第四章 积分</b>	
一 不定积分·····	(106)
4.1 不定积分的定义·····	(106)
4.2 不定积分的运算法则·····	(108)
4.3 求不定积分的方法·····	(113)
二 定积分·····	(120)
4.4 定积分的概念·····	(120)
4.5 微积分基本公式·····	(123)
4.6 平面图形的面积·····	(125)
4.7 旋转体的体积·····	(129)
小结·····	(132)
<b>第五章 无穷级数</b>	
一 数项级数·····	(136)
5.1 常数项级数的概念和性质·····	(136)
5.2 正项级数·····	(141)
5.3 任意项级数·····	(145)
二 幂级数·····	(147)
5.4 幂级数的有关概念·····	(147)
5.5 将初等函数展开为幂级数·····	(150)
小结·····	(155)
<b>第六章 简单的微分方程</b>	
一 一阶微分方程·····	(163)
6.1 可分离变量的微分方程·····	(163)
6.2 一阶线性微分方程·····	(167)
二 可降阶的二阶微分方程·····	(172)
6.3 可降阶的二阶微分方程·····	(172)
小结·····	(175)
<b>第七章 线性代数初步</b>	
一 行列式·····	(178)
7.1 行列式的概念·····	(178)
7.2 行列式的性质·····	(183)
7.3 克莱姆法则·····	(192)
二 矩阵·····	(196)
7.4 矩阵的概念·····	(196)
7.5 矩阵的运算·····	(199)
7.6 逆矩阵·····	(211)
小结·····	(218)

# 第一章 概率与统计

## 一 随机变量

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. 离散型随机变量的分布列</li><li>2. 离散型随机变量的期望与方差</li></ol> |
|---|

### 1.1 离散型随机变量的分布列

#### 1. 随机变量

为了全面深入地研究随机现象，我们需要将随机试验的结果数量化。例如，

某人射击一次，可能出现命中0环、命中1环、…、命中10环等结果，也就是说，可能出现的结果可以用0, 1, 2, …, 10这11个数表示，并且这个数在射击前是无法预先确定的，在不同的随机试验中，结果可能发生变化。即这个随机试验的结果是一个变量。

又如，在20件产品中，有15件正品、5件次品，从中任取3件，那么其中含有的次品数可能是0件，1件，2件，3件，也就是说，可能出现的结果可以用0, 1, 2, 3这4个数表示，并且这个数在抽取前是无法预先确定的，在不同的随机试验中，结果可能变化。即这个随机试验的结果是一个变量。

综上知，如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做**随机变量**。随机变量一般用小写希腊字母 $\xi$ ,  $\eta$ , …来表示。

如果随机变量 $\xi$ 的所有可能取得的数值能够一一列举出来，则称 $\xi$ 为**离散型随机变量**。例如，上面射击的命中环数 $\xi$ 就是一个离散型随机变量：

$\xi=0$ ，表示命中0环；

$\xi=1$ ，表示命中1环；

$\xi=2$ ，表示命中2环；

……

$\xi=10$ ，表示命中10环。

又如，上面产品检验所取3件产品中含有的次品数 $\eta$ 也是一个离散型随机变量：

$\eta=0$ ，表示含有0件次品；

$\eta=1$ ，表示含有1件次品；

$\eta=2$ ，表示含有2件次品；

$\eta=3$ ，表示含有3件次品。

### 练一练:

请你举出一个离散型随机变量的例子.

有些随机试验的结果与数量没有直接关系,如抛掷一枚硬币,可能出现正面向上、反面向上两种结果,其结果是不确定的,要由具体结果而定.但我们可以设“正面向上”为1,“反面向上”为0使其数量化,显然它是一个离散型随机变量,用 $\xi$ 表示这个随机试验的结果应为

$\xi=1$ ,表示正面向上;

$\xi=0$ ,表示反面向上.

有些随机变量,它可以取某一区间内的一切值,这样的随机变量则称为连续型随机变量.如

某林场树木最高达20米,则此林场树木的高度 $\xi$ 是一个连续型随机变量,它可以取 $(0, 20]$ 内的一切值.

某人在上午去医院就诊,该患者候诊时间 $\eta$ 是一个连续型随机变量,它可以取 $[8:00, 12:00]$ 内的一切值.

### 练一练:

请你举出一个连续型随机变量的例子.

### 练习

写出下列各随机变量可能取得的值,并说明随机变量取值所表示的随机试验的结果:

- (1) 一个袋中装有4个白球和5个红球,从中任取3个,其中所含白球的个数 $\xi$ ;
- (2) 抛掷两个骰子,所得点数之和 $\eta$ .

### 2. 离散型随机变量的分布列

随机变量和其他变量一样,有它的取值范围,同时它还有别于其他变量,即需进一步研究随机变量取得的每个值的概率.如

抛掷一个骰子,设得到的点数为 $\xi$ ,它可能取得的值有

1, 2, 3, 4, 5, 6,

虽然在抛掷前,我们不能确定随机变量 $\xi$ 会取哪一个值,但是却知道取每个值的概率都是 $\frac{1}{6}$ ,如下表所示:

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

这个表反映了离散型随机变量 $\xi$ 在随机试验中取值的分布状况.

又如,前面提到的“在20件产品中,有15件正品,5件次品,从中任取3件”.

$\eta=0$ ,表示“没有次品”,它出现的概率为

$$\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} \approx 0.3991,$$

可以表示为  $P(\eta=0)=0.3991$ ;

$\eta=1$ , 表示“含有 1 件次品”, 它出现的概率为

$$\frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} \approx 0.4605,$$

可以表示为  $P(\eta=1)=0.4605$ ;

$\eta=2$ , 表示“含有 2 件次品”, 它出现的概率为

$$\frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} \approx 0.1316,$$

可以表示为  $P(\eta=2)=0.1316$ ;

$\eta=3$ , 表示“含有 3 件次品”, 它出现的概率为

$$\frac{C_5^3}{C_{20}^3} \approx 0.0088,$$

可以表示为  $P(\eta=3)=0.0088$ .

将离散型随机变量  $\eta$  的取值及取每个值的概率可列成下表:

$\eta$	0	1	2	3
$P$	0.3991	0.4605	0.1316	0.0088

一般地, 设离散型随机变量  $\xi$  可能取的值为

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots,$$

$\xi$  取每一个值  $x_i (i=1, 2, \dots)$  的概率  $P(\xi=x_i)=p_i$ , 则称下表

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_i$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_i$	$\dots$

为随机变量  $\xi$  的概率分布, 简称为  $\xi$  的分布列.

不难看出, 任一离散型随机变量的概率分布具有如下两个性质:

性质 1  $p_i \geq 0 (i=1, 2, 3, \dots)$ ;

性质 2  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i + \dots = 1 (i=1, 2, 3, \dots)$ .

例 1 从放有 4 个红球和 3 个黄球的袋子中, 同时取出 2 个球, 求其中所含红球个数  $\xi$  的分布列.

解:  $\xi$  可能取的值为 0, 1, 2.

$$\text{又 } P(\xi=0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7},$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7},$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}.$$

$\therefore$  红球个数  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

例2 抛掷一枚均匀的骰子,出现的点数为随机变量  $\xi$ ,

- (1) 求  $\xi$  的分布列;
- (2) 求“点数不小于3”的概率;
- (3) 求“点数不超过2”的概率;
- (4) 求“点数不小于4又不超过5”的概率.

解: (1)  $\xi$  的分布列为

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$(2) P(\xi \geq 3) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$(3) P(\xi \leq 2) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$(4) P(4 \leq \xi \leq 5) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

说明: 知道了分布列, 就可以求出随机变量在某一区间内取值的概率.

例3 某射手射击所得环数  $\xi$  的分布列如下:

$\xi$	4	5	6	7	8	9	10
$P$	0.02	0.03	0.07	0.11	0.27	0.29	0.21

求此射手“射击一次命中环数  $\xi \geq 7$ ”的概率.

分析: “射击一次命中环数  $\xi \geq 7$ ”是指互斥事件“ $\xi = 7$ ”, “ $\xi = 8$ ”, “ $\xi = 9$ ”, “ $\xi = 10$ ”的和. 根据互斥事件的概率加法公式, 可以求得此射手“射击一次命中环数  $\xi \geq 7$ ”的概率.

解: 根据射手射击所得环数  $\xi$  的分布列, 有

$$P(\xi = 7) = \underline{\hspace{2cm}} \text{①},$$

$$P(\xi = 8) = \underline{\hspace{2cm}} \text{②},$$

$$P(\xi = 9) = \underline{\hspace{2cm}} \text{③},$$

$$P(\xi = 10) = \underline{\hspace{2cm}} \text{④},$$

$\therefore$  所求的概率为

$$P(\xi \geq 7) = \underline{\hspace{2cm}} \text{⑤} = \underline{\hspace{2cm}} \text{⑥}.$$

答案: ①0.11; ②0.27; ③0.29; ④0.21; ⑤0.11 + 0.27 + 0.29 + 0.21; ⑥0.88.

说明: 离散型随机变量在某一范围内取值的概率, 等于它取这个范围内各个值的概率之和.

### 练习

1. 已知随机变量  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2	3	4	5	6
$P$	0.12	0.15	0.21	0.15	0.14	0.13	0.10

求: (1)  $P(\xi=3)$ ; (2)  $P(\xi<3)$ ; (3)  $P(3\leq\xi\leq 6)$ ;  
 (4)  $P(\xi>4)$ ; (5)  $P(2<\xi<3)$ ; (6)  $P(\xi\leq 6)$ .

2. 已知随机变量  $\xi$  只能取 0, 1, 2, 4 四个值, 且取每个值的概率都相同, 试写出其分布列, 并求  $P(\xi<4)$  的值.
3. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$$P(\xi=k) = \frac{Ak}{6}, \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

- (1) 确定系数  $A$ ;  
 (2) 用表格形式写出  $\xi$  的分布列;  
 (3) 求  $P(\xi\geq 2)$  的值.

### 3. 两种典型的离散型随机变量的概率分布

**例 4** 现有 20 只乒乓球, 其中正品有 17 只, 次品有 3 只, 从中抽取 1 只检验, 求取得正品的分布列.

**解:** 用  $\xi=0$  表示抽到 1 只是正品, 用  $\xi=1$  表示抽到 1 只是次品.

$$\therefore P(\xi=0) = \frac{C_{17}^1}{C_{20}^1} = \frac{17}{20},$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_3^1}{C_{20}^1} = \frac{3}{20}.$$

$\therefore$  所求分布列为

$\xi$	0	1
$P$	$\frac{17}{20}$	$\frac{3}{20}$

这个例题中的随机试验的结果只有两种情况, 相应的随机变量的取值只有 2 个, 即“抽到正品”记为“0”, “抽到次品”记为“1”, 结合概率分布的性质可知它的分布列为

$\xi$	0	1
$P$	$p_1\left(\frac{17}{20}\right)$	$1-p_1\left(\frac{3}{20}\right)$

我们称之为两点分布或 0~1 分布.

服从两点分布的随机变量经常遇到, 如

抛掷一枚硬币, 有两种结果, 即“正面朝上”和“正面朝下”;

某射手射击一个目标, 有两种结果, 即“击中”和“未击中”;

从装有 10 个白球和 7 个黄球的口袋中, 任意取出 1 个球, 有两种结果, 即“取到白球”和“取到黄球”;

掷一枚骰子, 结果有 6 种, 即得到“1 点”, “2 点”, “3 点”,  $\dots$ , “6 点”. 但可以将在上

述结果归结为“得到奇数点”和“得到偶数点”。

**例 5** 某批数量较大的商品的次品率是 5%，从中任意地连续取出 5 件，求其中次品数  $\xi$  的分布列。

**分析：**由于某批商品数量较大，故从中任意地连续取出 5 件，即是不放回的取出，可看做是独立重复试验， $n=5$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} P(\xi=0) &= C_5^0 (5\%)^0 \cdot (95\%)^5 = 0.95^5; \\ P(\xi=1) &= C_5^1 (5\%)^1 \cdot (95\%)^4 = 0.25 \times 0.95^4; \\ P(\xi=2) &= C_5^2 (5\%)^2 \cdot (95\%)^3 = 0.025 \times 0.95^3; \\ P(\xi=3) &= C_5^3 (5\%)^3 \cdot (95\%)^2 = 0.00125 \times 0.95^2; \\ P(\xi=4) &= C_5^4 (5\%)^4 \cdot (95\%)^1 = 4.75 \times 0.05^4; \\ P(\xi=5) &= C_5^5 (5\%)^5 \cdot (95\%)^0 = 0.05^5. \end{aligned}$$

$\therefore$  次品数  $\xi$  的分布列为

$\xi$	$P$
0	$C_5^0 (5\%)^0 \cdot (95\%)^5$ 0.95 <sup>5</sup>
1	$C_5^1 (5\%)^1 \cdot (95\%)^4$ $0.25 \times 0.95^4$
2	$C_5^2 (5\%)^2 \cdot (95\%)^3$ $0.025 \times 0.95^3$
3	$C_5^3 (5\%)^3 \cdot (95\%)^2$ $0.00125 \times 0.95^2$
4	$C_5^4 (5\%)^4 \cdot (95\%)^1$ $4.75 \times 0.05^4$
5	$C_5^5 (5\%)^5 \cdot (95\%)^0$ 0.05 <sup>5</sup>

本题目的随机试验中，某事件发生的概率是 5%，那么在  $n=5$  次独立重复试验中，此事件发生的次数为一随机变量  $\xi$ ，其取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5.  $\xi=k$  对应随机事件“此事件恰好发生  $k$  次”，因此概率

$$P(\xi=k) = C_n^k (5\%)^k \cdot (95\%)^{n-k},$$

其中  $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。

一般地，如果在一次试验中某事件发生的概率是  $p$ ，那么在  $n$  次独立重复试验中，这个事件恰好发生  $k$  次的概率是

$$P(\xi=k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

其中  $k=0, 1, 2, \dots, n, q=1-p$ 。

于是得到随机变量  $\xi$  的概率分布：

$\xi$	0	1	2	...	$k$	...	$n$
$P$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

因为  $C_n^k p^k q^{n-k}$  恰好是

$$(q+p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n q^0$$

中，二项展开式的第  $k+1$  项 ( $k$  取 0, 1, 2, ...,  $n$ ) 中的各个值，所以称这样的随机变量  $\xi$  服从二项分布，并记做  $\xi \sim B(n, p)$ ，从而本题中次品数  $\xi$  可记做  $\xi \sim B(5, 0.05)$ 。同时

记  $C_n^k p^k q^{n-k} = b(k; n; p)$ .

例6 某厂生产电子元件, 其产品的次品率为 5%, 现从一批产品中, 任意地连续取出 2 件, 其中次品数  $\xi$  的概率分布是

$\xi$	0	1	2
$P$			

解: 由题设条件“任意地连续取出 2 件”可知, 是两次独立重复试验, 次品数  $\xi$  服从二项分布, 即  $\xi \sim B(2, 0.05)$ .

$$\therefore P(\xi=0) = C_2^0 \cdot (5\%)^0 \cdot (95\%)^2 = 0.9025;$$

$$P(\xi=1) = C_2^1 \cdot (5\%)^1 \cdot (95\%)^1 = 0.095;$$

$$P(\xi=2) = C_2^2 \cdot (5\%)^2 \cdot (95\%)^0 = 0.0025.$$

$\therefore \xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1	2
$P$	0.9025	0.095	0.0025

### 练习

1. 现有乒乓球 50 只, 其中有正品 45 只, 从中抽取一只球, 求取得正品的分布列.
2. 已知随机变量  $\xi$  只取两个值  $x_1, x_2$ , 又知取  $x_1$  的概率与取  $x_2$  的概率之比为 2:3, 写出  $\xi$  的分布列.
3. 一批零件有 9 个合格品和 3 个不合格品, 安装机器时, 从中任取一个, 若取出不合格品不再放回去, 求在取得合格品前已取出的不合格品数的分布列.

## 1.2 离散型随机变量的期望与方差

离散型随机变量的概率分布, 反映了随机变量取值的统计规律. 为进一步研究离散型随机变量, 我们还经常通过特定的数值来反映随机变量某些方面的特征, 最重要的有期望与方差.

### 1. 期望

看下面的例子:

例1 某射手在相同的条件下射击, 其命中环数为随机变量  $\xi$ , 它的分布列为

$\xi$	10	9	8	7	6	5
$P$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

求命中环数  $\xi$  的均值.

分析: 由分布列可知, 某射手命中 10 环的概率是 0.5, 这表明他射出 100 发子弹, 约有 50 发命中 10 环. 同理, 约有 20 发命中 9 环, 约有 10 发命中 8 环和 7 环, 约有 5 发命中 6 环和 5 环. 这时, 他命中的平均环数应是



$$\frac{1}{100}(10 \times 50 + 9 \times 20 + 8 \times 10 + 7 \times 10 + 6 \times 5 + 5 \times 5).$$

我们变换一下写法, 即为

$$\begin{aligned} & 10 \times \frac{50}{100} + 9 \times \frac{20}{100} + 8 \times \frac{10}{100} + 7 \times \frac{10}{100} + 6 \times \frac{5}{100} + 5 \times \frac{5}{100} \\ & = 10 \times 0.5 + 9 \times 0.2 + 8 \times 0.1 + 7 \times 0.1 + 6 \times 0.05 + 5 \times 0.05. \end{aligned}$$

从最后一行可以看到, 利用分布列就可以计算出命中环数的均值.

解: 设  $\xi$  的均值为  $E\xi$ , 则

$$\begin{aligned} E\xi &= 10 \times 0.5 + 9 \times 0.2 + 8 \times 0.1 + 7 \times 0.1 + 6 \times 0.05 + 5 \times 0.05 \\ &= 8.85(\text{环}). \end{aligned}$$

答: 此射手命中环数的均值为 8.85 环.

一般地, 设离散型随机变量  $\xi$  的分布列为

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\cdots$	$p_n$

则称  $\sum_{i=1}^n x_i p_i$  为  $\xi$  的数学期望, 或平均数、均值, 数学期望又简称为期望. 并记做  $E\xi$ .

$$\text{即 } E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

如果  $\xi$  能取无穷多个可数值, 则只有当  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$  存在时, 才说  $\xi$  的数学期望存在.

$$\text{此时 } E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

例 2 有甲、乙两名工人生产同一种产品, 日产量相等, 在一天中出现的次品数分别为  $\xi$  和  $\eta$ , 其分布列分别为

$\xi$	0	1	2	3	4
$P$	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\eta$	0	1	2	3	4
$P$	0.5	0.1	0.2	0.1	0.1

试比较两个工人的技术情况.

$$\text{解: } E\xi = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0 = 1;$$

$$E\eta = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.1 = 1.2.$$

$$\therefore E\xi < E\eta.$$

即甲每天平均出现的次品数少于乙. 从这个意义上说, 甲的技术好于乙的技术.

数学期望是平均数概念在随机变量中的应用, 它反映了随机变量取值的平均水平. 其统计意义就是对随机变量进行长期观测或大量观测所得数值的理论平均数, 是一个客观存在的常数.

如果  $\eta = a\xi + b$  ( $a, b$  是常数), 则  $\eta$  也是随机变量.

$$\therefore P(\eta = ax_i + b) = P(\xi = x_i) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n),$$