弹性力学基础

井上达雄 著
刘凤丽 王德年 刘福林 朴仲玄 译
殷有泉 校

辽宁大学出版社

内 容 简 介

本书重点介绍了近代弹性力学的基本知识、基本理论和基本方法。全书共分十二章，前两章简单地介绍了有关笛卡尔张量的基本知识，以后各章精练地阐述了弹性力学的基本知识、基本方程，并用张量符号和工程符号两套记法给出。整个叙述数学方法严谨、简练，物理概念清楚，并且像应力强度因子、有限元法等新概念都有提及。每章书后配有足够数量的习题及习题解答。

本书可作为理、工科各类高等学校讲授少学时“弹性力学”课的教材或教学参考书，也可供相应专业的研究生、教师、工程技术人员参考。

绪 言

本书是作者把近几年在京都大学工学院执教时给机械系学生讲授的弹性力学以及给非机械系、特别是给金属系学生用的讲义，经过适当地修改、整理而成的，并打算把它作为北川浩所著“塑性力学基础”的姐妹篇。

简单回顾弹性力学的历史可知，力和变形成比例的虎克定律，早在17世纪已经被发现，因而在本书大部分章节中所讨论的线性理论的基本内容，多是早在100年前已经建立。然而，工程技术非常发达的今天，对机械结构的设计条件越来越苛刻，所以以前的技术人员只掌握材料力学的知识，已经远远适应不了现代工程的需要。譬如在实际运用方面，为了理解近十几年迅速发展起来的有限元法，必须先掌握弹性力学基础，特别是受到最近连续介质力学的迅速发展的影响，使得很多工程问题不能单纯看成弹性力学问题，而应当用包括流体力学、热力学在内的统一的观点去分析、处理问题，从这个意义上说，弹性力学是古老而又新的学问。

由于弹性力学的发展历史深远，国内外已经出版了包括古典名著在内的几十种弹性力学书籍，但是，还很难说都能满足如上所述的现代的需要。

本书的目的，是使已学过材料力学、结构力学基础的大学各系和工学院的学生以及工程技术人员在不太长的时间内深入地掌握弹性力学的基本内容，以提高他们解决实际工程问题的能力，因而本书的重点放在基础方面。不仅学习弹性力学，而且也有助于读者系统地学习材料力学、塑性力学以及流体力学等连续介质力学基础，在推导基本公式的同时尽可能解释它们的物理意义，包括热力学观点的解释。

目前，单个学科纵深发展，同时又横向联系发展。因此，过去只

是在数学课中学习的矢量和张量概念及其表示方法，现在已经在很多国家普遍应用于各个领域，成为技术人员的实用计算工具和常识，因此在本书中介绍了张量分析基础，并在推导基本公式时同时采用已有的常规表示方法和张量表示方法，这是本书特点之一。

在本书中用很大篇幅说明基础理论的同时，也重点论述了热力学的分析方法、应力强度因子、有限元法等新问题。但是由于本书篇幅所限，波动的传播和振动等动力学问题、三维问题等很多问题尚未讨论，对这些问题都望读者参阅别的参考书。

印有星号的章节，根据时间和目的可以省去不学，而这并不影响学习本书的系统性。

当执笔本书时，除了注意与姐妹篇“塑性力学基础”的连贯性以外，还参考了本书末所列的国内外参考资料。特别是从平修二主编的“现代弹性力学”、玉手统著“弹性体的变形”、竹内洋一等著“简明弹性理论”、川本眺万著“应用弹性理论”、国尾武著“固体力学基础”、Y.C.Fung著(大桥义夫、村山登男、神谷纪生译)“固体力学与理论”、B.A.Boley and J.H.Weiner著“Theory of Thermal Stresses”等著作中得到很大启发和教益。

本人在京都大学讲授和执笔本书时，承蒙工学院机械系有关教研室各位先生的热情鼓励和帮助，在此深表谢意。本书原稿是由大阪大学工学院北川浩副教授和京都大学研究院研究生长岐滋君详细校阅，并提出很多宝贵意见，由研究室的山口优子娘整理、誊写原稿。还有日刊工业新闻社的有关人员在本书的计划和出版过程中给予了不懈的努力和支持，在此一并表示感谢。

本人即将出席四个国际会议的同时，第二次出任波兰国家科学院基础工程研究所的客座研究员，临行之前本书虽已完稿，但本人才疏学浅，加之临行前匆忙，定有不少错误和不当之处，望读者给予批评指正。

井上达雄

1979年9月28日

译 者 的 话

本书是原作者在京都大学执教时给机械系等各系讲授“弹性力学”时所用的讲义，经过作者认真修改整理而成。全书共分十二章。

为了使初学“弹性力学”的读者能够尽快地掌握其基本内容，作者通过精心的处理和安排，使得该书内容精练，物理概念清楚，数学推理严谨。全书运用了张量符号和工程符号对照起来的方法，便于理论研究工作和工程上的应用。本书引进了新的概念，例如：应力强度因子、有限元法等，板和壳也各有一章。本书适合短学时课程讲授，一学期可以讲完并且涉及的面也較广，每一章后备有足够数量的习题并有相应的解答。是一本較为近代又适合于讲授的“弹性力学”教材。

本书是刘凤丽等四名同志合译，其分工如下：第一至第四章由刘凤丽译；第五章、第十章、第十二章由刘福林译；第九章、第十一章、附录由王德年译；第六章、第七章、第八章由朴仲玄译，由刘凤丽统稿，北京大学副教授殷有泉担任总审校。

在本书的翻译过程中，得到了译者老师王仁教授热情鼓励和指点，沈阳电力专科学校金玉良教授详细地审阅了本书的部分章节，徐立成、于勤、徐素春、钱晓松为绘制本书的插图作了大量的工作，辽宁大学出版社为出版本书作了大量的工作，在此一并致以谢意。

由于译者水平有限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

译　　者

1988年10月 7 日于沈阳

目　　录

第一章　绪　　论

关于弹性力学的学习

对于已经学过材料力学和结构力学基本知识的读者，在他们学习弹性力学的时候，我们首先叙述必要的基本的思考方法，也就是将实际物体理想化而得到的连续介质概念以及弹性力学在连续介质力学中的位置等，我们将对照材料力学的知识进行讲解。

1.1　连续介质的概念

在我们周围的物质中，从宏观角度来看，在一定温度和压力等条件下，它们或者作为固体存在，或者作为流体*存在。

在固体当中，以钢作为最常见的例子来给以说明。一般地，钢由许多结晶颗粒组成，把结晶颗粒的表面作为界面在力学和物理性质方面呈现很大的不连续性。这一点在珠光体（或珍珠岩）纯粒铁以及碳化铁体在性质上属于不同的相，这种不连续性更是显著。进一步从微观的角度来看，各个结晶粒包含着很多的位错或者原子空隙等缺陷，除此以外大部分是充满着由原子排列成的结晶格子和在它们中间运动的自由电子。这些都是熟知的事实。

然而，根据已经知道的这些原子和电子的运动以及它们的力学性质，来得到钢的全部特性，这种设想也许是遥远的将来的事情。即使发明了巨大的超高速的电子计算机，要搞清像钢这类的多晶体的性质，现在也是认为不可能的（但是在分子杂乱无章地分布的稀薄气体当中，按照统计学方法处理微观的分子运动，推

* 流体可分为液体和气体，从连续介质力学的角度来看，它们的区别不象固体和流体那样大。

导出宏观的气体的性质是统计力学的辉煌成就）。如果您是学过材料力学的读者，在分析钢梁的变形和应力的时候，不会把这种原子和电子的运动认为是问题吧！

那么，对于上述的具有多方面不连续性的物质，要从宏观的角度来处理时，应怎样考虑才好呢？

现在，在给定的物体内，取体积为 ΔV 的充分大的区域，设它的质量为Δm。这时物质的平均密度用$\Delta m/\Delta V$给出。然后，逐渐地使这个体积变小，这在钢的情况下将会遇到性质不同的结晶颗粒子和相，而且会落在原子和它的间隙上面。

用图 1.1 典型地表示这种情况。区域的取法充分大的时候 $\Delta m/\Delta V$ 的值变成平滑曲线，而如果把它取成充分小，则就像图那样$\Delta m/\Delta V$的值明显不稳定。

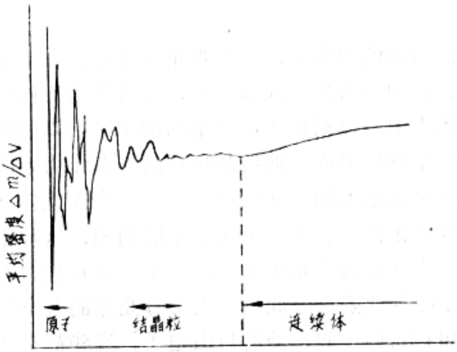

图 1.1　关于钢的平均密度

于是从宏观的角度来研究物体的密度时，考虑某点的邻域，其密度ρ定义：

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \Delta V_c} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{1.1}$$

于是，就不得不采用这样的值：

使ΔV一直小到不产生不稳定的区域ΔV_c为止时的值。

在第三章中叙述的关于应力矢量的定义也同样地能说明这个问题。即，由物体内部取的面积元素 ΔS 和作用其上的内力矢量 $\Delta \mathbf{P}$将应力向量T表示：

$$\overset{n}{\mathbf{T}}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} \tag{a}$$

但是，ΔS并不是无限地趋向于零，而是和

$$\mathbf{T}=\lim_{\Delta S\to \Delta S_c}\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} \tag{1.2}$$

一样，只能小到具有某一面积ΔS_c。

这样，依据研究的目的的需要，把ΔV和ΔS认为适当的小，在此范围内，物体应当看作是连续的。这样考虑假想的物体叫做连续介质（Continuous body; Continuum），讨论它的力学性质的科学叫做连续介质力学(Continuum mechanics)。

1.2 连续介质力学的体系

在上述意义下，就读者已经学过的刚体力学和材料力学当然是属于连续介质力学。在本书里处理的弹性力学、把具有粘性的物体作为对象的粘弹性力学、分析塑性变形的塑性力学和粘塑性力学*等固体力学，以及把流体动态宏观地加以研究的流体力学也都是连续介质力学的组成部分。

以图 1.2 来表示各种各样的连续介质力学间的相互联系。从图上的左栏向右逐次表示一般化。正象已经学过的那样，狭义材料力学和结构力学**是将杆的拉伸和扭转、梁的弯曲等本来具有

---

* 在处理具有时间相关性的塑性变形领域里，塑性变形是和蠕变变形的相互作用以及在高速度变形中问题还依赖于应变速度等，最近在这个领域的发展是显著的。

** 所谓材料力学和结构力学等用语，通常不仅属于在图1.2所示固体力学范围，而且它们还在包括从材料强度到在设计方面的应用等广泛的意义上被使用。但是，在这里仅用于狭义的意义。

三维的空间弹性物体当作一维问题来处理。从本书的结构可明显地看出，在弹性力学中一开始就是从三维问题开始研究。

象在第四章和第五章所接触到的那样，在本书里只处理物体的变形是微小的，所谓微小变形理论(infinitesimal theory)。从下面讨论可明显地看出这种考虑在实用上十分有效。在钢的拉

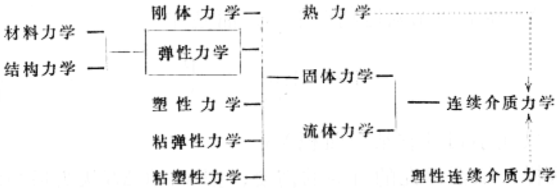

图 1.2 连续介质力学相互联系

伸实验中得到的典型的应力——应变曲线，如图 1.3 所示。现在假设抗拉弹性系数（杨氏模量）为 $E=21000kg/mm^2$，屈服应力$J_s=25kg/mm^2$，那么发生屈服时的应变，即弹性极限内的应变 $\varepsilon=\sigma/E\cong0.12\%$，它是极小的。但是，橡胶之类的某些高分子材料的弹性范围非常大。这时要注意的是微小变形理论是不充分的，必须用所谓有限变形理论(finite deformation theory)。

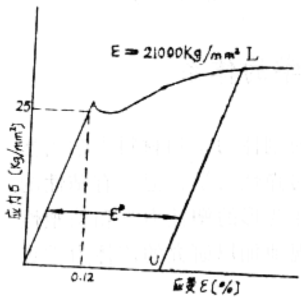

图 1.3 钢的应力——应变曲线图

在图 1.3 里随着应力的增加，从外边给与的荷载将对物体作功。这个功除了以能量的形式储存在钢内部以外，如果是弹性范围内，从实验里还明显地看到温度的降低。但是，当卸载时，应力和应变将恢复到为 0 的原来的状态。从热力学的角度来看，由外部作的功引起内能和温度变化的热力学第一定律是成立的，而且还知道弹性变形是可逆过程。

一方面，当越过屈服点时将发生塑性变形。考虑在图 1.3 的 L 点卸载而且到 U 点的情况，那么在 U 点残留着塑性应变 ε^p。对塑性变形即使作拉伸实验，温度还是上升的，而我们预想第一定律总是成立的。但是，塑性应变 ε^p 的残留，这一点表明了这个过程是不可逆变化的。这样从连续介质力学的角度处理固体变形时，也必须考虑热力学定律，这不仅在加深研究物理性质方面有利，而且考虑物体的温度变化时特别重要。

图 1.2 下面表示的理性连续介质力学（rational continuum mechanics）是一般地从上述的有限变形的研究和热力学方面的研究出发，不仅根据已经清楚了的物理事实而且立足于某些公理*研究连续介质力学的一般概念的体系。最近它的发展是很显著的。理性连续介质力学由于不一定依赖于物理事实，所以有时候不能说不归结于抽象论。这种研究对一般连续介质力学水平的提高将有很大的贡献。

1.3 弹性力学方法论和本书的结构

材料力学等主要是一维的近似，所以数学表达式极为简单，而处理三维弹性力学就复杂了。例如，细梁的挠度仅仅在荷重的方向发生，而三维物体的变位是具有三个方向的分量。同样，梁的应力，如果只考虑长度方向，那么从本质上来看是足够的，但是一般具有九个分量。

为了简洁地表示这样复杂的数学式子，本书从第二章到第六章采用下标变量表示法。同时，由于位移和力是矢量，应力和应变一般具有张量性质，所以在第二章里说明关于张量分析的简单情形。于是，数学的表达式是简单的，如果能充分理解，那么对

---

* 在几何学里由平行线不相交的一个公理出发，发展了欧几里得几何学。而不承认这个公理时，形成了非欧几里得几何学。像几何学一样，理性连续介质力学的体系依赖于公理的建立方式。

于掌握数学表达式的物理意义是有利的*。

下面在叙述弹性力学的方法论的时候，研究一下已经在材料力学里学过的梁的弯曲问题。

如图 1.4，取细梁的长度方向为 x 轴，挠度方向即变形的方向为 y 轴，由弯矩 M_x 产生了位移 u_y。设长度方向的应力为 σ_x，横断面积为 S，则由弯矩的平衡条件得

$$M_x=\int_S \sigma_x y d_S \tag{1.3}$$

图 1.4 梁

一方面，设弯曲曲率半径为 R，则 x 方向的应变是

$$\varepsilon_x=\frac{1}{R}y \tag{a}$$

由于

$$\frac{1}{R}=\frac{-d^2u_y/dx^2}{[1+(du_y/dx)^2]^{3/2}}=-\frac{d^2u_y}{dx^2} \tag{b}$$

所以最后应变表示

$$\varepsilon_x=\frac{-d^2u_y}{d x^2}y \tag{1.4}$$

另一方面，设抗拉弹性系数（杨氏模量）为 E，则应力应变之间存在关系：

$$\sigma_x=E\varepsilon_x \tag{1.5}$$

下面，研究一下这些公式的含义。(1.3) 式是根据断面内的力学平衡条件导出来的，表示应变和位移关系的 (1.4) 式是由变形的几何关系得来的，这些公式都不随材料是否弹性介质而改变。但是，(1.5) 式表示的是弹性材料的应力应变关系。显然我

* 反之，对下标变量理解不充分时，那么就只能流于形式，反而缺乏物理上的理解，因此希望不熟悉的读者，自己可按照公式的推演过程不断地加深理解。

们可以预料在弹塑性材料里它将取别的形式。

若给出作用于梁的荷重，则（1.3）式的弯矩就可以知道，结果在这样的条件下，对于应力σ_x，应变ε_x和位移v_y三个未知数，在边界条件下求解（1.3）、（1.4）、（1.5）式等三个方程，于是，梁的弯曲问题就得到了解决。

在一般的三维弹性体力学里也具有完全类似的一系列关系式。本书为了给出弹性力学的基本关系式作如下安排：

即，在第三章给出应力的定义，将力的平衡(即应力的平衡)方程作为力学条件导出。在第四章里相当于（1.4)式的应变——位移关系由几何条件来规定。这些关系与材料的特性是完全无关的，所以这些公式同样地不受弹性体的限制，比如对于流体几乎都有类似的关系式。

即使原先具有同样形状的物体，给出相同的边界条件，但是，它是弹性体呢？还是弹塑性体呢？或者是流体呢？根据不同的情况它的解答是不同的，这是显然的。实际上，在第三章以及第四章里处理的从力学和几何学关系导出来方程的个数，比未知数的个数少，因此用这些方程得不出确定的解。所以，在第五章里将弹性体的特性表示成数学的表达式，也就是对本构关系进行讨论研究。然而为了加深物理上的理解，帮助提高学习热情，在本构关系的讨论中对热力学进行了初步和必要的讨论，虽然在进行等温变形分析时不一定需要。

在这样的意义下，第三、四、五章的基本关系是极其重要的，对在这几章节里导出来的基本微分方程在边界条件之下求解，给出了具体的边值问题的解。

在第六章里将涉及到利用这些基本方程得到的能量原理，这不仅能够加深对第三——五章内容的理解，而且还给出了有限元法等的数值解的基础，因此，本章也是很重要的。

接着，第七章以后各章由上述导出来的基本方程和给出的边界条件，求解各种各样的定解问题，也就是，在第七章给出二维

问题，尤其是给出利用应力函数的求解方法，第八章里处理杆的弯曲和扭转等一般化问题。第九章和第十章叙述的重点放在薄板和壳问题的基本公式的推导上。上边所讲的都是等温变形，在物体里由于温度分布的存在产生的热应力问题在第十一章里介绍。

在上述问题里几乎在所有的情况，均讨论能解析地得出基本方程的解的问题，然而从工程学的角度看，由于边界条件复杂，不可能用解析的方法求解的问题是很多的。第十二章叙述解决这类问题的方法，即借助第六章的能量原理给出近似解的方法，把它作为例子来介绍。这里，有限元方法近年来特别受到重视，所以本书想要初步地介绍有限元方法。