○ 高等学校教材

数学建模简明教程

○ 西北工业大学数学建模指导委员会 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学建模简明教程

西北工业大学数学建模指导委员会　编

高等教育出版社

内容简介

本教程共包含 10 章内容：前 8 章属于数学建模部分，第 9 章主要讲述如何写好一篇数学建模竞赛论文，第 10 章介绍了数学建模竞赛中常用的数学软件以及一些编程技巧。数学建模部分包含了数学建模竞赛常用的数学知识，主要有规划理论及模型、图论模型、常微分方程、线性回归分析、决策分析、排队论、多元统计分析、算法基础等内容。

本教程适合各类专业的大学生、研究生使用，也适合大学教师进行赛前培训，还可作为数学建模爱好者的参考读物。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模简明教程/西北工业大学数学建模指导委员会编. —北京：高等教育出版社，2008.9

ISBN 978-7-04-024899-9

Ⅰ. 数… Ⅱ. 西… Ⅲ. 数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 120855 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 王凌波
责任绘图 黄建英 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 朱惠芳
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	人民教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2008 年 9 月第 1 版
印 张	13.75	印 次	2008 年 9 月第 1 次印刷
字 数	250 000	定 价	16.30 元

物料号 24899-00

郑重声明

前　　言

大学生数学建模竞赛在我国经过 15 年的发展，已经成为全国规模最大的大学生课外科技活动。近两年，每年有超过 900 多所院校、一万多个参赛队、三万多名来自各个专业的学生参加。

西北工业大学自 1992 年起组织学生参加全国大学生数学建模竞赛以及美国大学生数学建模竞赛；自 2000 年起为了扩大学生受益面，开始组织西北工业大学大学生数学建模竞赛，现已举办过 9 届，参赛人数累计超过 9500 人。为了通过数学建模教育提高学生的创新能力，我校开设数学建模必修课、选修课、赛前培训课以及赛前讨论课。在实践过程中发现，要找到一本既适合学生学习、又适合教师讲授的教材非常困难。为此，我校自 2005 年开始，由全国大学生数学建模竞赛陕西赛区评卷委员会组长叶正麟教授指导，组织了一批具有多年数学建模竞赛教学和培训经验的教师，着手编写一本简明实用教程。经过几年的试用，在多次修改的基础上，现出版发行。

本书具有如下两个特点：

实用性　编写人员都是长期从事数学建模教育的指导教师，能够充分理解学习数学建模所需要的知识以及学生的接受能力，本书既适合大学生独立学习，也适合指导教师实际培训。在选择数学知识点时，我们分析了 15 年来全国大学生数学建模竞赛优秀论文，根据优秀论文所用到的相关数学知识的频率，选择了使用频率最高的 8 个部分相关知识作为数学建模部分的内容。教材每一章内容都是沿着提出问题 (以历届竞赛题目为例) — 分析问题 — 相关知识点 — 解决问题的思路进行安排，每一讲都是一次独立的、完整的数学建模过程，适合学生学习和教师讲授。

系统性　本书的内容包含了数学建模过程的三个环节：建模、写作、计算机编程，这三部分内容既相互独立又相互补充，构成一个统一完整的体系；同时本书内容也基本包含了数学建模常用的知识。因此，本书的系统性体现在知识的系统性、过程的系统性以及内容的系统性上。

本书共包含 10 章内容：前 8 章属于数学建模部分，第 9 章主要讲述如何写好一篇数学建模竞赛文章，第 10 章介绍了常用数学建模软件使用技巧以及常用编程技巧，最后在附录中收录了西北工业大学数学建模赛前培训部分试题。

本书第 1章由徐根玖编写，第 2 章由王力工编写，第 3 章由雷佑铭编写，第

4 章和第 10 章由肖华勇编写, 第 5 章及附录部分由孙浩编写, 第 6 章由许勇编写, 第 7 章由孙中奎编写, 第 8 章由聂玉峰编写, 第 9 章由叶正麟编写。全书由孙浩统稿, 叶正麟教授审阅。

本书已在参加竞赛学生的赛前培训中试用了两次, 但仍会存在错漏和不足之处, 希望读者不吝赐教, 以便我们不断完善此书。

编　者

2008 年 5 月于西安

目　　录

第 1 章　规划理论及模型

1.1　引言

2005 年 “高教社杯” 全国大学生数学建模竞赛的 B 题 “DVD 在线租赁” 问题前三个要求是这样的:

考虑如下的在线 DVD 租赁问题. 顾客缴纳一定数量的月费成为会员, 订购 DVD 租赁服务. 会员对哪些 DVD 有兴趣, 只要在线提交订单, 网站就会通过快递的方式尽可能满足要求. 会员提交的订单包括多张 DVD, 这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的. 网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发. 每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次, 每次获得 3 张 DVD. 会员看完 3 张 DVD 之后, 只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回 (邮费由网站承担), 就可以继续下次租赁. 请考虑以下问题:

问题一　网站正准备购买一些新的 DVD, 通过问卷调查 1000 个会员, 得到了愿意观看这些 DVD 的人数 (附表 1① 给出了其中 5 种 DVD 的数据). 此外, 历史数据显示, 60% 的会员每月租赁 DVD 两次, 而另外的 40% 只租一次. 假设网站现有 10 万个会员, 对附表 1 中的每种 DVD 来说, 应该至少准备多少张, 才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月内能够看到该 DVD? 如果要求保证在三个月内至少 95% 的会员能够看到该 DVD 呢?

问题二　附表 2② 中列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单, 如何对这些 DVD 进行分配, 才能使会员获得最大的满意度? 请具体列出前 30 位会员 (即 C0001~C0030) 分别获得哪些 DVD.

问题三　继续考虑附表 2, 并假设附表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0. 如果你是网站经营管理人员, 你如何决定每种 DVD 的购买量, 以及如何对这些 DVD 进行分配, 才能使一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD, 并且满意度最大?

我们知道, 在租赁过程中, 网络经营者主要关注的是预测、购买和分配.

对于问题一中的需求预测, 可以通过简单随机抽样、分类预测和关联预测等方法进行. 比较好的方法是利用来自网站调查问卷的统计数据, 得到观看各种 DVD 的人数所服从的二项分布, 在此基础上, 可以预测出各种不同可靠度下应购买的 DVD 数量.

---

①② 参见原竞赛题中的附表.

在这里, 我们主要讨论其中的问题二和问题三, 先从第二个问题谈起. 这是一个如何分配有限资源, 从而达到人们期望目标的优化分配数学模型. 这类问题在运筹学中处于中心的地位.

这类问题一般可以归结为数学规划模型, 规划模型的应用极其广泛, 其作用已为越来越多的人所重视. 随着计算机的逐渐普及, 它越来越急速地渗透于工农业生产、商业活动、军事行为和科学研究的各个方面, 为社会节省的财富、创造的价值无法估量.

特别是在数模竞赛过程中, 规划模型是最常见的一类数学模型. 从 1992—2006 年全国大学生数模竞赛试题的解题方法统计结果来看, 规划模型共出现了 15 次, 占到了 50%, 也就是说每两道竞赛题中就有一道涉及利用规划理论来分析、求解. 这就需要对常用的规划模型的结构、模型及其特点、求解的算法进行了解.

下面我们介绍几种常见的规划模型及其求解方法. 这需要掌握基本的线性代数、高等数学知识及凸分析理论, 要求了解程序设计的基本思想并掌握一门程序设计语言, 如 MATLAB 语言,VC 语言等.

1.2　线性规划模型

线性规划模型是所有规划模型中最基本、最简单的一种, 同时也是学习其他特殊的线性规划问题的基础.

1.2.1　线性规划模型的标准形式

首先来看一个简单的例子.

例 1.1 (食谱问题)　设有 n 种食物, 各含 m 种营养素, 每单位第 j 种食物中第 i 种营养素的含量为 a_{ij}, n 种食物的价格分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 请确定食谱中 n 种食物的数量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 要求在食谱中 m 种营养素的含量分别不低于 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的情况下, 使得总的费用最低.

解　首先根据食物数量及价格可写出食谱费用为

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

我们的目标是总的费用最低, 也就是使上述表达式的值最小.

其次食谱中第 i 种营养素的含量为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,$$

且要求其含量不能低于规定的下限 b_i. 显然, 食物的数量不能为负值, 即

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.$$

因此, 要求食谱满足营养素含量且使费用最低的问题可用数学语言表述为:

$$\min c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n;$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}$$

上述食谱问题就是一个典型的线性规划问题.

它是指在一组线性的等式或不等式的约束条件下, 去寻求以线性函数的最大 (小) 值为目标的数学模型.

线性规划问题的**标准形式**为:

$$\min c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n;$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n= b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n= b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n= b_m,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}$$

常写出简洁的矩阵形式:

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

通常称 $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 为目标函数, $\boldsymbol{c}$ 为价值系数, $\boldsymbol{x}$ 为决策变量, $\boldsymbol{A}$ 为约束系数矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为右端向量.

对于一般在实际问题中建立的线性规划模型, 并不一定具有标准形式, 但对于所有的线性规划问题, 我们都可将其转化为标准形式. 转化步骤如下:

(1) 若目标函数为极大值, 可将其转化为极小值, 即: $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 转化为 $\min(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$.

(2) 若约束条件为不等式约束, 可转化为等式约束: 约束条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ 可转化为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \geqslant 0, \end{cases}$$

此时称 x_{n+i} 为松弛变量; 约束条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$ 可转化为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \geqslant 0, \end{cases}$$

此时称 x_{n+i} 为剩余变量.

(3) 若 $b_i \leqslant 0(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则在该方程两边同乘以 -1.

(4) 若某 x_j 无符号限制, 则引入两个非负变量 $x_j' \geqslant 0, x_j'' \geqslant 0$, 令 $x_j = x_j' - x_j''$, 代入目标函数和约束方程中, 化为非负限制.

1.2.2　线性规划模型的求解

由上面分析可以知道, 线性规划问题的求解可以归结为其标准形式的求解. 针对标准形式的线性规划问题, 其解的理论分析已经很完备. 满足所有约束条件的 x 称为线性规划问题的**可行解**, 所有的可行解构成的集合称为**可行域**, 可行域是若干个半平面的交集, 形成有界或无界的凸多边形. 如果可行域为空集, 则问题**无解**. 可行域非空, 对应的问题可能**无界**, 即问题没有最小值. 如果有界, 则一定有最优值, 且最优值可以在可行域中的基本可行解上达到, 且基本可行解的数目是有限的, **基本可行解**即对应凸多边形的顶点. 线性规划的对偶理论说明对于任何一个最小化的线性问题, 都有一个相应的最大化的**对偶线性规划问题**, 反之亦然. 两个问题的价值向量和右端向量之间, 约束条件和变量约束之间, 满足确定的对应关系. 他们如果有最优值, 则最优值相同, 且对应的最优解满足所谓的**互补松弛性条件**. 在此基础上, 提出了求解标准形式线性规划问题很好的算法 —— **单纯形方法**及其相应的变化形式 (**两阶段法**, **对偶单纯形法**). 单纯形方法是线性规划问题的最基础, 也是最核心的算法. 它是一个迭代算法, 先从一个特殊的可行解 (极点) 出发, 通过判别条件去判断该可行解是否为最优解 (或问题无界), 若不是最优解, 则根据相应规则, 迭代到下一个更好的可行解 (极点), 直到最优解 (或问题无界). 关于线性规划问题解的理论和单纯形法具体的求解过程可见参考文献 [1].

然而在实际应用中, 特别是数学建模过程中, 遇到线性规划问题的求解, 我们一般都是利用现有的软件进行求解, 此时通常并不要求线性规划问题是标准形式. 比较常用的求解线性规划模型的软件包有 LINGO 和 LINDO. 本章中, 我们结合例子给出几个简单的 LINGO 程序, 第 10 章中, 我们将重点介绍数学建模求解过程中 LINGO 软件的使用技巧.

例 1.2 用 LINGO 软件求解线性规划问题:

$$
\max 2x_1 + x_2;
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 8, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant 3. \end{cases}
$$

对于该变量有界线性规划问题, LINGO 可以直接求解, 其格式为: @bnd(l,x,u), 其中 l 表示下界, u 表示上界, 相应的 LINGO 程序如下:

```
MODEL:
 SETS:
  row/1..3/:b;
  col/1..2/:c,x,l,u;
  matrix(row,col):A;
 ENDSETS
 max=@sum(col:c*x);
  @for(col:@bnd(l,x,u));
   @for(row(i):
    @sum(col(j):A(i,j)*x(j))<=b(i));
 DATA:
  c=2,1;
  b=3,8,3;
  A=1,-1,
     1,-2,
     -1,1;
  l=0,0;
  u=3,1000;
 ENDDATA
END
```

在上界的说明部分, 对于无上界变量 x_1, 我们用一个较大的数来代替 (取 u_2=1000). 用 LINGO 软件求解, 得到最优解 $x^* = (3,6)^{\mathrm{T}}$, 最优值 $f^* = 15$.

另外, 我们介绍一个特殊的线性规划模型 —— 运输问题. 而且, 现实生活和生产中的很多问题都可以抽象为一个运输问题, 从而其应用相当广泛.

例 1.3 (运输问题)　设有某种物资需要从 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 运到 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 其中每个产地的产量为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$, 每个销地的销量为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 并满足产销平衡, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. 设从产地 A_i 到销地 B_j 的运费单价为 $c_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 问如何调运总运费最少?

解　(1) 目标函数

设从产地 A_i 到销地 B_j 的运量为 x_{ij} 个单位, 则总运费最小为:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

(2) 约束条件

每个产地的输出平衡　$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m;$

每个销地的输入平衡　$\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n;$

非负约束　$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n.$

因此运输问题的数学表达形式为

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, \cdots, m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \cdots, n, \\ x_{ij} \geqslant 0, & i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

若其中各产地的总产量等于各销地的总销量, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, 则称该问题为平衡的运输问题. 否则, 称为不平衡的运输问题, 包括: 总产量 > 总销量, 总产量 < 总销量. 类似于将一般的线性规划问题转化为其标准形式, 我们总可以通过引入假想的销地或产地, 将不平衡的运输问题转化为平衡的运输问题. 从而, 我们的重点就是解决平衡运输问题.

显然, 运输问题是一个标准的线性规划问题, 因而当然可以运用单纯形方法求解. 但由于平衡的运输问题的特殊性质, 它还可以用其他的一些特殊方法求解, 其中最常用的就是表上作业法, 该方法将单纯形法与平衡的运输问题的特殊性质结合起来, 很方便地实现了运输问题的求解. 关于运输问题及其解法的进一步介绍可见参考文献 [2].

1.3 整数线性规划模型

对于线性规划问题, 如果要求其决策变量取整数值, 则称该问题为整数线性规划问题. 对于整数线性规划问题的求解, 其难度和运算量远大于同规模的线性规划问题. Gomory 割平面法和分支定界法是两种常用的求解整数线性规划问题的方法 (见参考文献 [1]). 此外, 同线性规划模型一样, 我们也可以运用 LINGO 和 LINDO 软件包来求解整数线性规划模型.

我们以 1988 年美国大学生数学建模竞赛 B 题为例, 说明整数线性规划模型的建立及用 LINGO 软件包如何求解整数线性规划模型.

例 1.4 有 7 种规格的包装箱要装到两节铁路平板车上去. 包装箱的宽和高是一样的, 但厚度 (t, 以 cm 计) 及重量 (w, 以 kg 计) 是不同的. 表 1.1 给出了每种包装箱的厚度、重量以及数量. 每节平板车有 10.2m 长的地方可用来装包装箱 (像面包片那样), 载重为 40t. 由于当地货运的限制, 对于 C_5, C_6, C_7 类包装箱的总数有一个特别的限制: 这类箱子所占的空间 (厚度) 不能超过 302.7cm. 试把包装箱装到平板车上去使得浪费的空间最小.

表 1.1 包装箱装运明细表

种类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
t/cm	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
w/kg	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
n/件	8	7	9	6	6	4	8

解 令 x_{ij} 为在第 j 节车上装载第 i 件包装箱的数量 ($i = 1, 2, \cdots, 7; j = 1, 2$); n_i 为第 i 种包装箱需要装的件数; w_i 为第 i 种包装箱的重量; t_i 为第 i 种包装箱的厚度; cl_j 为第 j 节车的长度 ($cl_j = 1020$); cw_j 为第 j 节车的载重量; s 为特殊限制 ($s = 302.7$). 下面我们建立该问题的整数线性规划模型.

(1) 约束条件

两节车的装箱数不能超过需要装的件数, 即:

$$x_{i1} + x_{i2} \leqslant n_i, \quad i = 1, 2, \cdots, 7,$$

每节车可装的长度不能超过车能提供的长度:

$$\sum_{i=1}^{7} t_i x_{ij} \leqslant cl_j, \quad j = 1, 2,$$

每节车可装的重量不能超过车能够承受的重量:

$$\sum_{i=1}^{7} w_i x_{ij} \leqslant cw_j, \quad j = 1, 2,$$

对于 C_5, C_6, C_7 类包装箱的总数的特别限制:

$$\sum_{i=5}^{7} t_i (x_{i1} + x_{i2}) \leqslant s,$$

变量 x_{ij} 应满足 $x_{ij} \geqslant 0$, 且只能取整数.

(2) 目标函数

我们的目标是希望浪费的空间最小, 即装得越满越好, 从而包装箱的总厚度最大:

$$\max\ f(x) = \sum_{i=1}^{7} t_i (x_{i1} + x_{i2}).$$

(3) 整数线性规划模型

$$\max \sum_{i=1}^{7} t_i (x_{i1} + x_{i2});$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{i1} + x_{i2} \leqslant n_i, \ i = 1, 2, \cdots, 7, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} t_i x_{ij} \leqslant cl_j, \ j = 1, 2, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} w_i x_{ij} \leqslant cw_j, \ j = 1, 2, \\ \displaystyle\sum_{i=5}^{7} t_i (x_{i1} + x_{i2}) \leqslant s, \\ x_{ij} \geqslant 0 \text{ 取整数}, \ i = 1, 2, \cdots, 7; j = 1, 2. \end{cases}$$

(4) 模型求解

我们利用现有的 LINGO 软件求解上述整数线性规划模型, 相应的 LINGO 程序如下:

```
MODEL:
  SETS:
```