翟连林　主编

中小学数学双基导学与自测丛书

高中数学总复习

下　册

中央民族学院出版社

中小学数学双基导学与自测丛书

高中数学总复习

下册

主　编　翟连林
副主编　王乾岭　叶龄逸　吕则周

中央民族学院出版社

(京)新登字184号

内容简介

本书共分三部分，第一部分为高中数学的解题思想、方法与技巧，通过"怎样审题"、"巧用数形结合"、"分类讨论与参数问题"、"立体几何中的解题技巧"、"善用解题策略化难为易"这五个专题的辅导与训练，使学生重点了解高中数学的基本思想方法；第二部分为11套系列训练题，旨在使学生巩固和掌握各部分的基本知识点；第三部分共10套综合模拟训练题，力图提高学生灵活运用基础知识和基本方法解决综合问题的能力．为方便学生使用，各部分的解答题均留有空白，答案或提示附在书后，供师生参考．

本书最适合高三学生第二轮复习使用．

高中数学总复习

下　册

主　编　翟连林

副主编　王乾岭　叶龄逸　吕则周

*

中央民族学院出版社出版

（北京市海淀区白石桥路27号）

邮政编码　100081

全国各地新华书店经销

河北望都中学印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　6.375印张　189千字

1993年12月第1版　1993年12月第1次印刷

印数1—10000册

ISBN7－81001－442－0/G·184

定价：4.50元

前 言

为了贯彻国家教委颁发的九年义务教育全日制小学、初中数学教学大纲和现行数学教学大纲，切实把中小学数学教学引向围绕提高民族素质，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的“四有”人才的轨道上来，由中国管理科学研究院能力研究所编辑部组织全国十几个省市的部分特级教师、高级教师、青年骨干教师和教学研究人员，总结多年教学经验，吸收国内外教学科研成果，编写了“中小学数学双基导学与自测丛书”。这套丛书由著名数学普及读物作家翟连林副教授担任编委会主任。

这套丛书紧扣各级学校教学大纲和“招生考试要求”，重点放在帮助青少年学好基础知识，掌握基本技能（基础知识和基本技能简称“双基”）。在双基导学与自测的各册中，按教材的章节顺序编写，所用知识不超前，难度与灵活性稍低，适合初学者的特点，有利于大面积提高数学教学质量。在总复习与试题分类精编的各册中，按专题或课时划分，既注重数学思想方法的归纳和总结，又强调了灵活与综合应用，适应考试要求，提高应试能力。

这套丛书共 21 册，其中：

小学 8 册：《小学数学双基导学与自测》1～6 册，《小学数学总复习》，《小学升学数学试题分类精编》。

初中 6 册：《初中数学双基导学与自测》1～3 册，《初中数学总复习》（上、下册），《初中升学数学试题分类精编》。

高中7册：《高中代数双基导学与自测》（上、下册），《立体几何双基导学与自测》、《平面解析几何双基导学与自测》，《高中数学总复习》（上、下册），《高考数学试题分类精编》。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评、指正。

中国管理科学研究院

能力研究所编辑部

1993.4，于北京

目　录

第一部分　高中数学的解题思想、方法与技巧

§1　怎样审题

伍宏华　钟载硕

解题之行，始于审题.审题的目的在于弄清题目的条件（包括隐含条件）是什么；要解决什么问题（解题目标），以及解决问题的最佳方法是什么.有的同学，拿到试题未读懂题意就盲目解之，或者错用（漏看、更改、滥加）条件，解答之后又不检验，结果必然出错，考后一看答案，方觉醒悟，捶胸顿足，懊悔莫及，因此，走马观花的审题方式是解题大忌，要实现准确、快速解题之愿望，必须在审题上下功夫.注意以下几点：

一、审题要三清

一要清概念，看清题目中出现了哪些概念，可用上哪些定义、定理或公式，有哪些具体要求，特别要留心括号内的"小条件"，从而迅速找到解题的突破口；二要清数形，看清题目中出现的已知数据与几何图形间的关系，要一边读题，一边在附图上作辅助线段、辅助角等记号，或者由数思形，巧妙地沟通数形关系，寻觅转换思路的机遇；三要清关键字、词、句，仔细弄清题目中的某些抽象的词句、术语或符号，用通俗的语言将其"翻译"过来，使问题变得浅显具体，思路就会豁然开朗.

例1　（1988·广东）设复数 $z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，那么 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的代数形式是_______.

不少考生对题后的要求视而不见，将 z 的代数式或 $\bar{z}$ 的三角式填入横线上，白白丢分，正确答案应为 $\sqrt{3}-i$.

例2　方程 $\frac{x}{2^2}+\frac{y}{3^2}=1$ 表示的图形是（　）

(A)圆. (B)椭圆. (C)直线. (D)线段.

若看题时走马观花，一眼而过，则会错选(B).

例 3 $\sqrt{1-\sin 10}$可化为(　　)

(A)$\sin 5^\circ-\cos 5^\circ$.　　(B)$-\sin 5^\circ+\cos 5^\circ$.

(C)$\sqrt{2}\sin(5-\frac{\pi}{4})$. (D)$\sqrt{2}\cos(5+\frac{\pi}{4})$.

若不认真审题，则会把条件中的 sin10 误认为是 sin10°而错选(A)或(B). 正确答案应选(D).

例 4 正三棱锥的侧面积是底面积的$\sqrt{5}$倍，那么侧棱与底面所成的角为________.

许多考生误填 $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. 错因在于把侧棱当成了斜高，按底面与侧面所成的二面角来求. 应填 45°.

例 5 (1984 · 全国)已知圆柱的侧面展开图是边长为 2 和 4 的矩形，求圆柱的体积.

本题有两解，多数考生概念不清，误认为这个矩形一定是长为 4，宽为 2，而只得一解.

例 6 (1990 · 广东)设 z 是复数，$z+2$ 的辐角为$\frac{\pi}{3}$，$z-2$ 的辐角为$\frac{5}{6}\pi$，那么 z 等于(　　)

(A)$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

(C)$-\sqrt{3}+i$.　　(D)$-1+\sqrt{3}i$.

许多问题直接从"数"本身去考虑，往往难以洞察其本质，但若从形的角度入手，作出相应的图象，则错综复杂的关系就清晰可辨，解题思路便茅塞顿开.

图 1-1

解：$\arg(z+2)=\frac{\pi}{3}$的图象是以-2的对应点 Z_1 为端点，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的射线；$\arg(z-2)=\frac{5}{6}$

π的图象是以 2 的对应点 Z_2 为端点，倾斜角为$\frac{5}{6}\pi$的射线.两射线的交点 Z 即是复数 z 的对应点（如图 1-1）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle Z_1ZZ_2$ 中，$|OZ|=2$，$\angle Z_2OZ=\frac{2}{3}\pi$，

$\therefore\ z=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)=-1+\sqrt{3}\,i$，故选(D).

例 7　(1991·全国)在球面上有四个点 P、A、B、C，如果 PA、PB、PC 两两互相垂直，且 $PA=PB=PC=a$，那么这个球面的面积是______.

分析：关键句子是"PA、PB、PC 两两互相垂直"，PA、PB、PC 是球内接正方体一个顶点上的三条棱，这正方体的一条对角线就是球的一条直径.

解：$\because\ (2R)^2=3a^2$，$\therefore\ S_{球面}=4\pi R^2=3\pi a^2$.

二、审题的层次性

审题过程一般含三个层次：1. 解题前的初审；2. 解题过程中的续审；3. 解题后的复审（检验）.

例 8　二次方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根分别为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，求点 $P(a,b)$的轨迹方程.

初审：由 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 是方程的二根联想韦达定理，消去 θ 即得 $P(a,b)$的轨迹方程.

解：由韦达定理，得 $\begin{cases}a=\sin\theta+\cos\theta,\\ b=\sin\theta\cdot\cos\theta.\end{cases}$

消去参数 θ，得　$a^2-2b=1$.

续审：只得出上述结果，是初学者易犯的一种错误，凡属于一元二次方程有实根问题，都应当考虑判别式 Δ 非负.参数方程化直角坐标方程时容易扩大变量的取值范围，本题应考虑到 $|\sin\theta|\leqslant 1$、$|\cos\theta|\leqslant 1$.

续解：$\Delta=a^2-4b=(\sin\theta-\cos\theta)^2\geqslant 0$ 恒成立.

由 $a=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，$b=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 知

$$|a|\leqslant\sqrt{2},\ |b|\leqslant\frac{1}{2}.$$

故点 $P(a,b)$的轨迹方程是 $a^2-2b=1(|a|\leqslant\sqrt{2})$.

复审：检查所给条件全部用上，答案与所求一致，运算过程无误，至

此解题过程圆满结束.

说明:① $|a|\leqslant\sqrt{2}$ 与 $|b|\leqslant\frac{1}{2}$ 中只需限制一个就行了.

②复审(检验)这一关是非常重要的,若做完了事,从不检验,就会"差之毫厘,谬之千里".检验时宜精细入微,忌粗枝大叶.先细查答案是否有重解、漏解或与题设矛盾的解,再细察运算是否有错漏疏忽,及推理过程是否有谬误,然后及时予以订正.

例9 求函数 $y=\frac{1}{2x^2-3x+1}$ 的值域.

错解:由原函数可得 $2yx^2-3yx+y-1=0$ ⊛

$\because\ x\in R,\therefore\ \Delta=(-3y)^2-4\times 2y(y-1)\geqslant 0$

$\Rightarrow y(y+8)\geqslant 0,\Rightarrow y\leqslant -8$ 或 $y\geqslant 0$.

评析:错因在于⊛式未必是关于 x 的二次方程.上述结果应是在 $y\neq 0$ 条件下得到的,且⊛式及原函数中 $y=0$ 是不可能的.应订正为 $y\leqslant -8$ 或 $y>0$.

例10 (1988·上海)设方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个实根为 x_1,x_2.记 $\alpha=\mathrm{arc\ tg}x_1$,$\beta=\mathrm{arc\ tg}x_2$,求 $\alpha+\beta$.

错解:由韦达定理,得 $\begin{cases}x_1+x_2=-3\sqrt{3},\\ x_1\cdot x_2=4.\end{cases}$

$\because\ \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$,$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

评析:①错因是未从条件 $x_1+x_2<0$,$x_1\cdot x_2>0$ 中发现 $x_1<0$ 且 $x_2<0$,正确答案应是 $-\frac{2}{3}\pi$.

②还应注意到条件是否满足判别式 Δ 大于或等于零.将本题中的 $3\sqrt{3}x$ 换成 $3x$,则无解(错题);若形式地套用上述解法,则是错题错解,得出 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$(或 $-\frac{3}{4}\pi$).

三、审题过程中的联想

联想才能展开思维的翅膀.任何习题都存在着自身固有的数学结构,通过细致的审题,联想与题目相关的定义、定理、图形、数学方法等,可以准确地把握其结构特征.而只有开展全方位的联想、多角度的分

析，才能掌握习题的各种结构特征，寻求巧解，才能使准确、快速这一对解题矛盾得到完美的统一.

例 11 如图 1－2，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，试求顶点 D_1 到截面 AB_1C 的距离.

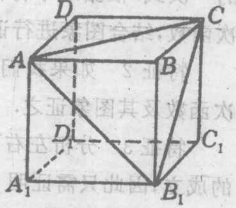

图 1－2

分析：特征 1　对角线 $D_1B\perp$ 截面 AB_1C，垂足为截面 $\triangle AB_1C$ 的中心，所求距离为对角线长 D_1B 与点 B 到截面的距离之差.

特征 2　三棱锥 D_1-AB_1C 是棱长为 $\sqrt{2}a$ 的正四面体，D_1 到截面的距离是该截面上的高.

特征 3　三棱锥 D_1-AB_1C 可由正方体截去四个与三棱锥 $B-AB_1C$ 等积的三棱锥形成，用"体积法"可得到所求距离.

特征 4　过点 A_1、C_1、D 作截面 A_1C_1D 与截面 B_1AC 平行，两截面三等分对角线 D_1B.

从以上不同的结构特征出发，可以得到不同的解法，其中从特征 2 出发可获巧解，答案为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$.

例 12　(1983・全国)如图 1-3，已知椭圆长轴长 $|A_1A_2|=6$，焦距为 $|F_1F_2|=4\sqrt{2}$，过椭圆焦点 F_1 作一直线，交椭圆于 M、N 两点. 设 $\angle F_2F_1M=\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，当 θ 取何值时，$|MN|$ 等于椭圆短轴的长？

分析：由 $\angle F_2F_1M=\theta$，可联想到建立极坐标系，而线段 MN 的长恰为极坐标系下 M、N 两点的极径之和. 此法尤为简捷. 也可在直角坐标系下，设出直线 MN 的参数方程

$$\begin{cases}x=-2\sqrt{2}+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta.\end{cases}$$

代入椭圆方程解之，而若按直线的点斜式方程来解运算量最大. 本题答案为：

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$.

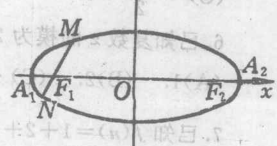

图 1－3

例 13 设 a、b、$c\in(0,2]$. 试证：

$4a+b^2+c^2+abc\geqslant 2bc+2ca+2ab$，并说明等号何时成立.

分析：特征 1　式中 a、b、c 不对称也不呈轮换式. 然而，它是关于 a 的一次式. 根据这个特征，可将右端的式子移到左端，看成关于 a 的一次函数，结合图象进行证明.

特征 2　如果我们能观察到 b（或 c）是二次这个特征，则可联想二次函数及其图象证之.

特征 3　分析左右两端的关系，首先可联想到不等关系 $b^2+c^2\geqslant 2bc$ 的成立，因此只需证明 $4a+abc\geqslant 2ca+2ab$（比差法），此法最为简捷.

总之，细审题、善联想、重检验，才能既获得巧妙解法又能得出正确结论.

练　习　一

1. 双曲线 $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=-1$ 的焦点坐标是________.

2. 已知方程 $\dfrac{x^2}{2+\lambda}-\dfrac{y^2}{1+\lambda}=1$ 表示双曲线，则 λ 值的范围是________.

3. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2}$ 的值是________.

4. 若集合 $A=\{x\mid x\leqslant 10, x\in N\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$________.

5. 方程 $x^2+|x|+1=0(x\in C)$ 的根为（　　）

(A) $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.　　(B) $\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$.

(C) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}i$.　　(D) 不存在.

6. 已知复数 z 的模为 2，则 $|z-i|$ 的最大值为（　　）

(A) 1.　(B) 2.　(C) $\sqrt{5}$.　(D) 3.

7. 已知 $f(n)=1+2+3+4+\cdots+n$，$n\in N$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n^2)}{f^2(n)}$ 这（　　）

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 4.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$，对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，试比较 $f(1)$、$f(2)$、$f(4)$ 的大小.

9. 已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E、F 分别是 AB、AD 的中点，GC 垂直于 $ABCD$ 所在平面且 $GC=2$，求点 B 到平面 EFG 的距离.

10. 定长为 3 的线段 AB 的两个端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，记线段 AB 的中点为 M，求 M 到 y 轴的最短距离，并求此时点 M 的坐标.

11. 已知 $a>0, a\neq 1$，求使方程 $\log_a(x+ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

12. 已知椭圆的中心在坐标原点 O，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆交于 P 和 Q 两点，且 $OP\perp OQ$，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 求椭圆方程.

13. 已知 $z\in C$，且 $|z|=1$. 设 $u=(3+4i)z+(3-4i)z$. (1)证明 u 为实数；(2)求 u 的最大值和最小值.

§2 巧用数形结合

叶龄逸

数形结合，就是用"数"与"形"的相互转化来解决数学问题的思想方法. 数缺形时欠直观，形离数时难入微. 若能巧妙地利用这种以数解形和以形助数的思想方法，使形与数相互渗透，许多较难的综合问题就会迎刃而解. 由于形象直观、思路简捷，学生可在轻快中学到知识、提高能力.

本节主要涉及的是以形助数方面的问题，需要指出：许多代数问题本身并不涉及图形，但具有"形"的潜在因素，我们可以通过观察与联想，构造出其代表图形，然后经过数形分析，直观地探究出解题思路或者估计出结果. 另外，以形助数只起"助"的作用，有时还不能代替演算与论证.

一、巧用复数运算的几何意义

例 1 设 $M=\{z\,|\,|z-\sqrt{2}|\leqslant 1, z\in C\}\cap\{z\,|\,|z|\leqslant 1, z\in C\}$，(1) 求 M 中模最小的复数；(2) 集合 M 中辐角主值的取值范围.

解：集合 $\{z\,|\,|z-\sqrt{2}|\leqslant 1, z\in C\}$ 和 $\{z\,|\,|z|\leqslant 1, z\in C\}$ 的几何意义分别是以 $(\sqrt{2},0)$，$(0,0)$ 为圆心，1 为半径的圆面（包括圆周）. 所以集合 M 的图形即是图 1-4 中的阴影部分，由此直观地得到模最小的复数是 $z_D=\sqrt{2}-1$.

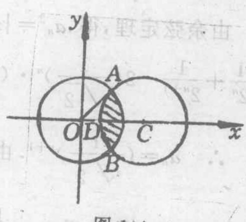

图 1-4

连结 OA、OB，$\because$ $OA=OB=1, OC=\sqrt{2}$，

$\therefore$ $\angle OAC=\dfrac{\pi}{2}$. $\therefore$ OA、OC 均为圆 C 切线，且有 $\angle AOx=\angle BOx=\dfrac{\pi}{4}$，故 $\arg z\in[0,\dfrac{\pi}{4}]\cup[\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$.

说明：辐角主值的取值区间为 $[0,2\pi)$，所以，本题中答案不能写成

$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

例 2　若 $z_n=(\frac{1+i}{2})^n$，$a_n=|z_{n+1}-z_n|$，$n\in N$，试求数列 $\{a_n\}$ 的所有项之和.

解：∵ $z_n=(\frac{1+i}{2})^n=[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^n$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\cdot(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}),$$

$$z_{n+1}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}\cdot[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}],$$

∴　z_n，z_{n+1} 在复平面上对应的向量 $\overrightarrow{OZ_n}$ 和 $\overrightarrow{OZ_{n+1}}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，且 $z_{n+1}-z_n$ 对应的向量为 $\overrightarrow{Z_nZ_{n+1}}$ 如图 1－5 所示.

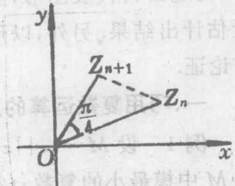

图 1－5

在 $\triangle Z_nOZ_{n+1}$ 中，

$|\overrightarrow{OZ_{n+1}}|=|z_{n+1}|=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$，

$|\overrightarrow{OZ_n}|=|z_n|=(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$，

$\angle Z_{n+1}OZ_n=\frac{\pi}{4}$.

由余弦定理，得，$a_n{}^2=|z_{n+1}-z_n|^2=|\overrightarrow{Z_nZ_{n+1}}|^2$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}-2(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^{n+1}},$$

∴　$a_n=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$. 由于 $a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，

∴　$\{a_n\}$ 是首项 $a_1=\frac{1}{2}$，公比 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的无穷递缩等比数列，

故　$S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

二、活用曲线与方程之间的对应关系

例 3　试在直线 $l:2x-y+3=0$ 上求一点 P，使点 P 到 $A(-1,0)$