[美] A·D·惠伦 著

噪声中信号的检测

习题题解

姚玉英 编

前　言

在无线电电子学宽广的领域发展中，人们发现与其它科学技术一样，迫切需要对“不确定性”问题进行处理和解决。我们知道，“不确定性”问题可分为两大类，一类是事件的概念外延是明确的，但事件的发生，或事件的取值是随机性的，这类问题就是概率统计问题，而另一类“不确定性”问题则是概念的外延是不确定的，也就是概念是模糊的，这类问题称为模糊性问题，这是近几年正在迅速发展着的一项新兴技术，而前一类概率统计性问题，在无线电电子学领域中已获得相当程度的发展，也得到广泛的重视，因而发表的专业文献和科研成果非常多，真有看不过来之感。高等院校，科研单位，以及从事无线电电子学的广大科技工作者，都迫切需要一本统计无线电技术方面的基本教材，而美国惠伦著的“噪声中信号的检测”就是很受欢迎的这样的一本书。现在中国科技大学无线电系钱玉美、刘渝、景中起、郭新劳等几位同

志，按… 文的题目

译文，… 修订，并

在每章… 阅了内

容提要… 学系和

五机部… 印刷出版，作为内部参考资

料发行有关单位。这本习题集的出版，对于学习和掌握统计无线电技术无疑是有益的，故特向广大读者推荐。

五机部第二〇六研究所

王越谨启

1981.3.

目　录

第一章　概率论

内容提要

概率论是信号检测理论所应用的主要数学工具之一。对于学习过此课程的读者来说，本章带有复习性质，对于初学者而言，它是一个简要的入门。

为了计算本章各题，必须掌握以下基本概念、定理与公式。

1. 实验的全部可能结果的集合构成实验的样本空间。样本空间的元素或其集合构成事件。

2. 若事件$\{A\}$和$\{B\}$互不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{1-1}$$

3. 若A_i，B_j是完备事件，则

$$\sum_i\sum_j P(A_i,B_j)=1$$

$$\sum_i P(A_i,\ B_j)=P(B_j),$$

$$\sum_j P(A_i,\ B_j)=P(A_i)$$

4. 概率分布函数与概率密度函数

概率分布函数定义为$P(X\leqslant x)$，它满足

$0\leqslant P(X\leqslant x)\leqslant 1$，

$$P(X<-\infty)=0, \qquad P(X<\infty)=1$$

$$P(x_i<X\leqslant x_j)=P(X\leqslant x_j)-P(X\leqslant x_i)$$

概率密度函数定义为概率分布函数的导数

$$p(x)=dP(X\leqslant x)/dx \tag{1-2}$$

离散随机变量的概率密度函数定义为

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\delta(x-x_i) \tag{1-3}$$

5. 两个随机变量X和Y的联合概率密度函数定义为

$$p(x, y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(X\leqslant x, Y\leqslant y) \tag{1-4}$$

边缘密度函数

$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x, y)dy, \qquad p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x, y)dx \tag{1-5}$$

6. 条件概率和条件概率密度

条件概率定义为

$$P(B|A)=P(A, B)/P(A), \; P(A)\neq 0 \tag{1-6}$$

条件概率密度函数定义为

$$p(y|x)=p(x, y)/p(x), \; p(x)\neq 0 \tag{1-7}$$

$$p(y_1,\cdots,y_n|x_1,\cdots,x_m)=\frac{p(y_1,\cdots y_n,x_1,\cdots,x_m)}{p(x_1,\cdots,x_m)} \tag{1-8}$$

7. 统计独立

(1)用概率表示：若两个事件$\{A\}$和$\{B\}$满足

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1-9}$$

或$P(A|B)=P(A)$ (1-10)

则称事件$\{A\}$和$\{B\}$**统计独立**。

（2）用概率密度函数表示：若

$$p(x_1,\cdots,x_n)=p(x_1)\cdots p(x_n) \tag{1-11}$$

则称随机变量$X_1,\cdots,X_n$统计独立。

8. 随机变量函数 即以随机变量为自变量的函数

当函数的自变量为随机变量时，此函数即为随机变量函数。

若已知一组随机变量$X_1,\cdots,X_N$的联合概率密度函数为$p_X(x_1,\cdots,x_N)$，求一组新的随机变量$Y_1,\cdots,Y_N$的联合概率密度函数，而

$$Y_1=g_1(X_1,\cdots,X_N)$$
$$\vdots$$
$$Y_N=g_N(X_1,\cdots,X_N)$$

求得
$$X_1=f_1(Y_1,\cdots,Y_N)$$
$$\vdots$$
$$X_N=f_N(Y_1,\cdots,Y_N)$$

则$Y_1,\cdots,Y_N$的联合概率密度

$$p_Y(y_1,\cdots,y_N)=p_X(x_1=f_1(y_1,\cdots,y_N),\cdots,x_N=f_N(y_1,\cdots,y_N))|\mathbf{J}| \tag{1-12}$$

其中J是雅可比(Jacobian)式

$$\mathbf{J}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial Y_1}\cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial Y_1}\\ \vdots & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial Y_N}\cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial Y_N}\end{vmatrix} \tag{1-13}$$

9. 平均

(1)离散随机变量X的统计平均(也叫均值，期望)定义为

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \tag{1-14}$$

连续随机变量X的统计平均定义为

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \tag{1-15}$$

(2)离散随机变量X的函数平均

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) P(x_i) \tag{1-16}$$

连续随机变量X的函数平均

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx \tag{1-17}$$

(3)随机变量X的n阶原点矩、n阶中心矩、方差、离差

X的n阶原点矩定义为

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \tag{1-18}$$

X的n阶中心矩定义为

$$E\{(X-m)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n p(x) dx \tag{1-19}$$

其中m是X的均值。

X的一阶中心矩恒等于零。

X的二阶中心矩

$$V\{X\}=E\{(X-m)^2\}=E\{X^2\}-m^2=\sigma^2 \quad (1\text{-}20)$$

称为方差，它描述了随机变量分散程度。

$$\sigma=+\sqrt{E\{(X-m)^2\}}$$

称为标准离差。

（4）两个连续随机变量X和Y的$(n+k)$阶联合矩定义为

$$E\{X^nY^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^ny^kp(x, y)dxdy \quad (1\text{-}21)$$

$(n+k)$阶联合中心矩定义为

$$\mu_{nk}=E\{(X-m_x)^n(Y-m_y)^k\} \quad (1\text{-}22)$$

其中，$m_x=E\{X\}$，$m_y=E\{Y\}$

随机变量X和Y的协方差定义为

$$\sigma_{xy}=E\{(X-m_x)(Y-m_y)\} \quad (1\text{-}23)$$

相关系数定义为

$$\rho_{xy}=\frac{E\{(X-m_x)(Y-m_y)\}}{[E\{(X-m_x)^2\}E\{(Y-m_y^2)\}]^{1/2}} \quad (1\text{-}24)$$

$$=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

式中σ_x，σ_y分别是X和Y的标准离差。

若 $E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}$ (1-25)

则称X，Y不相关($\rho=0$)。

若两个随机变量统计独立则不相关，反之不一定成立。

若 $E\{XY\}=0$，则称X和Y正交。

10．特征函数

（1）一维随机变量X的特征函数定义为

$$C(j\omega)=E\{e^{j\omega X}\}=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{j\omega x}dx \tag{1-26}$$

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(j\omega)e^{-j\omega x}d\omega \tag{1-27}$$

（2）二维随机变量X和Y的特征函数定义为

$$C(j\omega,\ j\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\ y)e^{j\omega x}e^{j\nu y}dxdy \tag{1-28}$$

$$p(x,\ y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C(j\omega,\ j\nu)e^{-j\omega x}e^{-j\nu y}d\omega d\nu \tag{1-29}$$

（3）若随机变量X和Y统计独立，则$Z=X+Y$的特征函数

$$C_Z(j\omega)=C_X(j\omega)C_Y(j\omega) \tag{1-30}$$

（4）若已知随机变量X的特征函数为$C_X(j\omega)$，则随机变量$Y=X/n$的特征函数为

$$C_Y(j\omega)=C_X(j\omega/n) \tag{1-31}$$

（5）用特征函数求各阶矩

$$E\{X\}=-j\frac{dC(j\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=0} \tag{1-32}$$

$$\vdots$$

$$E\{X^n\}=(-j)^n\frac{d^nC(j\omega)}{d\omega^n}\bigg|_{\omega=0} \tag{1-33}$$

习　题

1.1　考虑一个掷钱币实验，正面概率为p，反面概率为$q=1-p$。

(a) 证明在N次独立试验中正面正好出现i次的概率由二项式分布给出为

$$\binom{N}{i}p^i q^{N-i}, \qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

(b) 证明i的均值和方差分别为Np和Npq。

(c) 证明特征函数$E\{e^{j\omega i}\}$等于$(pe^{j\omega}+q)^N$。

(d) 利用特征函数求i的头两个矩。

证明：

(a) 设第j次试验出现正面的事件记为A_j，出现反面的事件记为$\overline{A_j}$，则在N次独立试验中出现i次正面和$(N-i)$次反面的事件有$\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\overline{A}_{i+1}\cap\cdots\cap\overline{A}_N\}$，$\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap\overline{A}_i\cap A_{i+1}\cap\overline{A}_{i+2}\cap\cdots\cap\overline{A}_N\}$，$\cdots$，$\{\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{N-i}\cap A_{N-i+1}\cap\cdots\cap A_N\}$，共有$\binom{N}{i}$个基本事件。利用式(1-9)，

$$P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_i\cap\overline{A}_{i+1}\cap\cdots\cap\overline{A}_N)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_i)P(\overline{A}_{i+1})\cdots P(\overline{A}_N)$$

$$=p^i q^{N-i}$$

因此，N次试验中正面正好出现i次的事件X的概率

$$P(X=i)=\binom{N}{i}p^i q^{N-i}, \qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

(b)

由式(1-14)定义，X的均值

$$E\{X\}=\sum_{i=0}^{N} iP(X=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N} i\binom{N}{i} p^i q^{N-i} = \sum_{i=0}^{N} \frac{iN!}{i!(N-i)!} p^i q^{N-i}$$

$$= Np \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(i-1)![(N-1)-(i-1)]!} p^{i-1} q^{(N-1)-(i-1)}$$

令$i-1=k$，则

$$E\{X\} = Np \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k q^{(N-1)-k}$$

$$= Np(p+q)^{N-1} = Np$$

$$E\{X^2\} = \sum_{i=0}^{N} i^2 \binom{N}{i} p^i q^{N-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} i(i-1)\binom{N}{i} p^i q^{N-i} + \sum_{i=0}^{N} i\binom{N}{i} p^i q^{N-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} i(i-1) \frac{N!}{i!(N-i)!} p^i q^{N-i} + Np$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{i=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(i-2)!(N-i)!} p^{i-2} q^{N-i} + Np$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{i=2}^{N} \binom{N-2}{i-2} p^{i-2} q^{(N-2)-(i-2)} + Np$$

令 $k=i-2$，则

$$E\{X^2\} = N(N-1)p^2 \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-2}{k} p^k q^{(N-2)-k} + Np$$

$$= N(N-1)p^2 + Np = N^2p^2 + Npq$$

X的方差利用式(1-20)得

$$V\{X\} = E\{X^2\} - [E\{X\}]^2$$

$$= Npq$$

(c)

特征函数由(1-26)式定义

$$C(j\omega) = E\{e^{j\omega i}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} e^{j\omega i}\binom{N}{i}p^i q^{N-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(pe^{j\omega})^i q^{N-i} = (pe^{j\omega}+q)^N$$

(d)

$$\frac{dC(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(pe^{j\omega}+q)^N = jNpe^{j\omega}(pe^{j\omega}+q)^{N-1}$$

$$\frac{d^2C(j\omega)}{d\omega^2} = jNp[je^{j\omega}(pe^{j\omega}+q)^{N-1} + jp(N-1)e^{2j\omega}$$

$$(pe^{j\omega}+q)^{N-2}]$$

利用式(1-32)和(1-33),

$$E\{X\} = -j\left.\frac{dC(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = Np$$

$$E\{X^2\} = (-j)^2\left.\frac{d^2C(j\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} = Npq + N^2p^2$$

1.2 泊松(Poisson)分布为

$$P(k)=\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}，k\text{为整数，}k\geqslant 0$$

(a) 证明均值和方差等于μ。

(b) 证明特征函数为$\exp[\mu(e^{j\omega}-1)]$。

证明：

$$(a)E\{X\}=\sum_{k=0}^{\infty}kP(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$$

$$=\mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{k-1}}{(k-1)!}$$

令 $i=k-1$，则

$$E\{X\}=\mu\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}=\mu$$

$$E\{X^2\}=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}=\mu\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\mu}\mu^{k-1}}{(k-1)!}$$

令 $i=k-1$，则

$$E\{X^2\}=\mu\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}$$

$$=\mu\sum_{i=0}^{\infty}\frac{ie^{-\mu}\mu^i}{i!}+\mu\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}$$

$$=\mu^2+\mu$$

$$V\{X\}=E\{X^2\}-[E\{X\}]^2=\mu$$

(b)

$$C(j\omega)=E\{e^{j\omega k}\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\omega k}\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}=e^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\mu e^{j\omega}]^k$$

$$=\exp[\mu(e^{j\omega}-1)]$$

1.3 指数概率密度函数是

$$p(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\right],\quad x\geqslant\alpha,\ \sigma>0$$

(a) 证明x的均值和方差分别为$\alpha+\sigma$和σ^2。

(b) 证明特征函数为

$$C(j\omega)=\frac{e^{j\omega\alpha}}{1-j\omega\sigma}$$

证明：

(a) x的均值

$$E\{X\}=\int_{\alpha}^{\infty}xp(x)dx=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{x}{\sigma}\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\right]dx$$

令 $\frac{x-\alpha}{\sigma}=y$，则

$$E\{X\}=\alpha\int_{0}^{\infty}e^{-y}dy+\sigma\int_{0}^{\infty}ye^{-y}dy$$

$$=\alpha+\sigma$$

$$E\{X^2\}=\int_{\alpha}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{x^2}{\sigma}\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\infty} (\alpha + \sigma y)^2 e^{-y} dy$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\sigma + 2\sigma^2$$

x的方差

$$V\{X\} = E\{X^2\} - [E\{X\}]^2 = \sigma^2$$

(b)特征函数

$$C(j\omega) = \int_{\alpha}^{\infty} e^{j\omega x} p(x) dx = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{j\omega x}}{\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) \right] dx$$

令 $\frac{x-\alpha}{\sigma} = y$，则

$$C(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp[j\omega(\alpha + \sigma y) - y] dy$$

$$= e^{j\omega\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y(1-j\omega\sigma)} dy$$

由于被积函数在全平面解析，因此

$$C(j\omega) = \frac{e^{j\omega\alpha}}{1 - j\omega\sigma}$$

1.4 具有零均值的均匀概率密度函数可以表示成

$$p(x) = \begin{cases} 1/2\alpha, & -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0, & \text{其 余} \end{cases}$$

证明方差为$\alpha^2/3$，特征函数为

$$C(j\omega) = \frac{1}{\alpha\omega} \sin\omega\alpha$$

证明：

$$V\{X\} = E\{X^2\} = \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p(x) dx$$