JS

文心英才教育研究所 组编

# “希望”数学竞赛教程

1234567

## 七年级

邓 凯 田 勇 袁蓓莺 主编

7890

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# "希望"数学竞赛教程

## 七年级

文心英才教育研究所　组编

本册主编　邓　凯　田　勇　袁蓓莺

本册编委　唐作明　崔燕艳　彭　静

唐建文　赵艳辉　柏少敏

王卫华　欧阳日红　熊玲玲

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

“希望”数学竞赛教程. 七年级/邓凯,田勇,袁蓓莺主编. —杭州:浙江大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-308-06657-0

Ⅰ.希… Ⅱ.①邓…②田…③袁… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 036973 号

**“希望”数学竞赛教程(七年级)**

邓 凯 田 勇 袁蓓莺 主编

---

**责任编辑** 石国华

**封面设计** 刘依群

**出版发行** 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

**排　　版** 杭州大漠照排印刷有限公司

**印　　刷** 杭州浙大同力教育彩印有限公司

**开　　本** 787mm×1092mm 1/16

**印　　张** 12.25

**字　　数** 300 千

**版 印 次** 2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

**书　　号** ISBN 978-7-308-06657-0

**定　　价** 18.00 元


---




浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

# 前　　言

中学生学科竞赛的开展，在我国已有多年的历史，其中数学竞赛是开展最早、覆盖面最广的一项竞赛，数学竞赛活动由于其对少年儿童智力开发的重大促进作用而备受广大青少年的喜爱。

随着数学竞赛活动的蓬勃发展，各级各类数学竞赛活动也相继开展。其中比较大型的竞赛活动主要有：中国数学会主办的全国高中数学联赛，全国初中数学联赛；中国科协普及部、《数理天地》杂志等主办的"希望杯"全国数学邀请赛；中国奥数教学联盟、《数学竞赛之窗》杂志主办的"联盟杯"数学竞赛；华杯赛组委会主办"华罗庚金杯"少年数学邀请赛；《中学数学研究》杂志主办的"五羊杯"数学邀请赛；小学生数学报主办的"小数报邀请赛"等等。

这些竞赛活动对广大青少年数学素养的培养、思维方法的开拓起了很好的促进作用，很多这些竞赛的优胜者在后来的人生路上都取得了辉煌的成就。

如何才能在这些竞赛中取得好成绩，并提升自己的数学素养，促进自己的数学思维就成了广大家长和学生关注的问题。为解决这个问题，我们特组织了一批竞赛教学一线的专家老师编写了本套丛书，以期给广大读者一个良好的开端。

本丛书分为七年级、八年级和高一、高二分册。

丛书的内容涵盖初中和高中的各部分内容，在课本的基础之上，加以提升，整个难度控制在中考之上，全国联赛之下，服务于中考和竞赛，又不拘泥于中考和竞赛，对各校中档以上学生，参加中考和竞赛，最有帮助。

本书整体难度大致和"希望杯"全国数学邀请赛相当，作为"希望杯"全国数学邀请赛的培训教程最为合适。

使用建议：

1. 参加"希望杯"全国数学邀请赛的同学做赛前冲刺，请将本书所有内容均做完。

2. 希望中、高考提高的同学，请将每章中的例题全部过关，练习题部分中的前8题全部过关。

3. 参加全国初中数学联赛和全国高中数学联赛的同学，请在本书的基础上，再做一些更难的问题，以提高自己的数学素养。

限于作者水平，书中不妥之处请广大读者批评指正。联系电话是：0512－68184173，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：wenxinjiaoyu@163.com。

**文心英才教育研究所**

**2009年3月**

# 目　录

Contents

# 第一讲　初等数论

## 赛题再现

1. （2008 年第 2 试）$a,b,c$ 是前 3 个质数，并且 $a<b<c$，现给出下列四个判断：

① $(a+b)^2$ 不能被 $c$ 整除　② $a^2+b^2$ 不能被 $c$ 整除　③ $(b+c)^2$ 不能被 $a$ 整除　④ $a^2+c^2$ 不能被 $a$ 整除

其中不正确的判断是　　（　　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ③④

**【分析】** 最小的质数是 2，然后是 3，再接着是 5，因此，从 $a<b<c$ 可知 $a,b,c$ 分别是 2，3，5. 然后可以把 $a,b,c$ 的值分别代入四个代数式，对四个命题逐一验证其正确性.

**【解】** 从题意可知 $a=2,b=3,c=5$，把这三个值分别代入 ①、②、③、④，得知命题 ①③ 不正确，故答案选(B).

**【说明】** 这道题考查的知识点有质数与合数，整除，命题判断等. 题目很简单，但也有不少学生出错，原因在于这些学生不能准确理解题意，更准确地讲，是因为他们对两个“不”的含糊. 当然，如果连 $a,b,c$ 表示的质数都不能写出，那就是知识掌握的问题了. 参加数学竞赛的选手，100 以内的质数必须非常熟悉，具体见下表：

<table>
<tr><td colspan="4">10 以内(4 个)</td><td colspan="4">10 ~ 20(4 个)</td><td colspan="2">20 ~ 30(2 个)</td><td colspan="2">30 ~ 40(2 个)</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>11</td><td>13</td><td>17</td><td>19</td><td>23</td><td>29</td><td>31</td><td>37</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">40 ~ 50(3 个)</td><td colspan="2">50 ~ 60(2 个)</td><td colspan="2">60 ~ 70(2 个)</td><td colspan="3">70 ~ 80(3 个)</td><td colspan="2">80 ~ 90(2 个)</td><td>90 ~ 100<br>(1 个)</td></tr>
<tr><td>41</td><td>43</td><td>47</td><td>53</td><td>59</td><td>61</td><td>67</td><td>71</td><td>73</td><td>79</td><td>83</td><td>89</td><td>97</td></tr>
</table>

2. （2008 年第 2 试）一个 2000 位数的最高位数字是 3. 这个数中任意相邻的两个数位的数字可看做一个两位数，这个两位数可被 17 整除或被 23 整除. 则这个整数的最后六个数位的数字依次是________或________.

**【分析】** 这道题看起来很复杂，尤其是有 2000 位数，但是，对于这样“很多数字”的问题，我们往往要有“探究规律”的思维意识. 事实上，能被 17 整除的两位数只有 17，34，51，68，

85;能被 23 整除的两位数只有 23,46,69,92. 因此,可以从首位数字 3 开始"排位",排出前 6 位之后即可发现其中蕴含的规律.

**【解】** 因为能被 17 整除的两位数只有 17,34,51,68,85;能被 23 整除的两位数只有 23,46,69,92. 从首位数字 3 开始排位,依次只能是 4,6,其后可排 8 也可排 9. 排 8 后,其后只能是 5,1,7,然后就不能排下去了;排 9 后,其后可以排 2,3,这时出现了周期性规律,即可继续依次往后排. 按照这个规律,可知最后六个数位的数字依次是 234692 或 234685. 故答案分别填 234692,234685.

**【说明】** 这道题考查的知识点有约数与倍数,数位与数字,周期性,带余数除法等. 积极探寻解题的突破口以及解决方式方法是解决本题的非智力因素. 建议参赛选手做竞赛题时要有勇有谋.

**3.** (2008 年第 2 试) 设 $n$ 是满足 $3 < n \leqslant 8$ 的整数,2008 除以 $n(n+1)$ 得余数 $r$,则 $r$ 中最大值与最小值之比是________.

**【分析】** 显然,$n$ 的取值为 4,5,6,7,8,于是根据题意可分别求得余数 $r$ 的值.

**【解】** 当 $n = 4$ 时,求得 $r = 8$;

当 $n = 5$ 时,求得 $r = 28$;

当 $n = 6$ 时,求得 $r = 34$;

当 $n = 7$ 时,求得 $r = 48$;

当 $n = 8$ 时,求得 $r = 64$.

从而可以求得最大值与最小值之比是 8 : 1. 故答案填 8 : 1.

**【说明】** 这道题考查的知识点有带余数除法,取整数,求比值. 这道题比较简单,但很容易出错,原因在于代数式相除时不能先约分!

**4.** (2007 年第 2 试) 今天(2007 年 4 月 15 日,星期日)是第 18 届"希望杯"全国数学邀请赛举行第 2 试的日子,那么今天以后的第 $2007^4 + 15$ 天是星期________.

**【分析】** 解决这道题的关键是求出 $2007^4 + 15$ 除以 7 所得的余数. 做除法 $2007 \div 7$,余数为 5,所以 $2007^4 \div 7$ 的余数即为 $5^4 \div 7$ 的余数,由此可以求得答案.

**【解】** $2007 \div 7$,余数为 5,易求得 $5^4 \div 7$ 的余数为 2,又 $15 \div 7$ 余数为 1,所以 $2007^4 + 15$ 除以 7 所得的余数为 3,故答案填:三.

**【说明】** 这道题考查的知识点是带余数除法. 这道题比较简单,但很容易出错,原因在于考生在解决这道题时受求末位数字的思维负迁移,而求 $2007^4 + 15$ 的末位数字. 训练时发现有不少考生答案填"二",出错的原因应该就在此.

**5.** (2007 年第 2 试) 已知 $\overline{7x} \cdot \overline{yz6} = 41808$,其中 $x, y, z$ 代表非零数字,那么 $x^2 + y^2 + z^2 =$ ________.

**【分析】** 求出 $x, y, z$ 的值是解决这道题的关键,由积的末位数字是 8,一个因数的末位数字为 6,可知 $x$ 只能是 3 或者 8,因为 $41808 \div 73 = 572 \cdots\cdots 52$,$41808 \div 78 = 536$,从而可以求解.

**【解】** 根据题意,可知 $x$ 只能是 3 或者 8,因为 $41808 \div 73 = 572 \cdots\cdots 52$,$41808 \div 78 =$

536，因此，$x=8$，$y=5$，$z=3$，从而可求得 $x^2+y^2+z^2=98$.

【说明】 这道题考查的知识点有数位的表示，整除，末位数字，逆向思维方法，有理数的运算等. 解决这类题往往要根据末位数字寻求突破口.

**6.** (2004 年第 2 试)若正整数 $x$，$y$ 满足 $2004x=15y$，则 $x+y$ 的最小值是________.

【分析】 观察已知的等式，因为 2004 和 15 有公约数 3，等式两边先同除以 3，得 $668x=5y$，此时，对于正整数 $x$，$y$ 而言，要使等式成立，只有 $x=5k$，$y=668k$($k$ 取正整数)，从而可以求得答案.

【解】 等式 $2004x=15y$ 可以变形为 $668x=5y$，

对于正整数 $x$，$y$ 而言，要使等式成立，只有 $x=5k$，$y=668k$($k$ 取正整数)，

因为要求 $x+y$ 的最小值，所以 $x=5$，$y=668$，即 $x+y=673$. 故答案填 673.

【说明】 这道题考查的知识点有公约数，等式性质. 将等式两边同除以公约数是解决本题的关键. 类似的，还可以设计一些变式题，但约分和化简始终是这类题求解的突破口.

**7.** (2006 年第 2 试) 三角形三边的长 $a$，$b$，$c$ 都是整数，且 $[a,b,c]=60$，$(a,b)=4$，$(b,c)=3$(注：$[a,b,c]$ 表示 $a$，$b$，$c$ 的最小公倍数，$(a,b)$ 表示 $a$，$b$ 的最大公约数)，则 $a+b+c$ 的最小值是　　(　　)

A. 30　　B. 31　　C. 32　　D. 33

【分析】 求出 $a$，$b$，$c$ 可能的取值是解决这道题的关键，因为 $b$ 只可能取 12 或 24，又因为要求的是 $a+b+c$ 的最小值，所以，可以确定 $b=12$，而且在满足任意两数之和大于第三个数的条件下，$a$ 和 $c$ 的值越小越好，先定 $a=4$，$c=15$，符合题意，从而可以求得答案.

【解】 因为 $(a,b)=4$，$(b,c)=3$，则 $a=4$，$b=4\times3$，则 $a=4$，$b=4\times3$，又 $[a,b,c]=60$，则 $c=3\times5$，$a+b+c=31$. 故答案选(B).

【说明】 这道题考查的知识点有三角形两边之和大于第三边，约数与最大公约数，倍数与最小公倍数等，解决这类题常用的方法是验证法，即根据题中所给条件，逐一验证，进而求得符合题意的答案.

**8.** (2004 年第 2 试) 用若干条长为 1 的线段围成一个长方形，长方形的长和宽的最大公约数是 7，最小公倍数是 $7\times20$. 则围成这个长方形最少需要________条长为 1 的线段，它的面积是________.

【分析】 由题意可知，这个长方形的长和宽的长度只能在 $7\times1$，$7\times2$，$7\times3$，$7\times4$，…，$7\times20$ 这 20 个数中，符合本题条件的只有 $7\times4$ 和 $7\times5$，从而可以求得答案.

【解】 根据题意，可知这个长方形的长和宽的长度分别为 28 和 35，所以这个长方形的周长为 126，面积为 $28\times35=980$，故答案分别填 126 和 980.

【说明】 这道题考查的知识点有最大公约数，最小公倍数，长方形的周长和面积等，解题的关键是根据两个数的最大公约数和最小公倍数求出这两个数. 类似的问题都是这样的解题思路.

**9.** (2006 年第 2 试)(1) 求证：奇数的平方被 8 除余 1.

(2) 请你进一步证明：2006 不能表示为 10 个奇数的平方之和.

**【分析】** 对于第(1) 题，先设奇数为 $2k+1$，然后根据题目要求进行计算和变形，最终整理成一个整数能被 8 整除的数与 1 的和；而第(2) 题的解决，需要用到第(1) 题的结论.

**【证明】** (1) 设奇数为 $2k+1$($k$ 为整数)，则 $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$；

(i) 当 $k$ 为奇数时，$4k(k+1)$ 能被 8 整除，故 $4k(k+1)+1$ 被 8 除余 1；

(ii) 当 $k$ 为偶数时，$4k(k+1)$ 能被 8 整除，故 $4k(k+1)+1$ 被 8 除余 1.

故奇数的平方被 8 除余 1.

(2) $2006\div 8=250\times 8+6$，10 个奇数的平方和为：$8k+10=8m+2$，

故 2006 不能表示为 10 个奇数的平方之和.

**【说明】** 这道题考查的知识点有奇数的表示，整式的乘法，分类讨论的数学思想，带余数除法. 解决这道题的关键在于首先设奇数为 $2k+1$($k$ 为整数). 对于偶数的问题，只要设偶数为 $2k$($k$ 为整数)，可以类比本题的思路解决.

**10.** (2006 年第 2 试) 设 $[a]$ 是有理数，用 $[a]$ 表示不超过 $a$ 的最大整数，如 $[1.7]=1$，$[-1]=-1$，$[0]=0$，$[-1.2]=-2$，则在以下四个结论中，正确的是 (　　)

A. $[a]+[-a]=0$　　　　B. $[a]+[-a]$ 等于 0 或 $-1$

C. $[a]+[-a]\neq 0$　　　　D. $[a]+[-a]$ 等于 0 或 1

**【分析】** $a$ 的值可能为正数，也可能为负数，或者为零，所以，就分三种情况讨论.

**【解】** 当 $a$ 为正数时，如 $[1.7]=1$，$[-1.7]=-2$，$[a]+[-a]=-1$；

当 $a$ 为负数时，同理可得，$[a]+[-a]=-1$；

当 $a=0$ 时，由 $[0]=0$，可知 $[a]+[-a]=0$. 故答案选(B).

**【说明】** 这道题考查的知识点有高斯记号，分类讨论的数学思想. 尽管这类题很简单，但也有学生做错，原因是这些学生对这种“定义型”计算不熟练.

**11.** (2006 年第 2 试) $2^{m+2006}+2^m$($m$ 是正整数) 的末位数字是________.

**【分析】** 原式变形为：$2^{m+2006}+2^m=2^m\times(2^{2006}+1)$，$2^{4n+1}$ 的末位数字是 2，$2^{4n+2}$ 的末位数字是 4，从而可以求得 $2^{2006}$ 的末位数字是 4，进而可知 $2^{2006}+1$ 的末位数字是 5，由任意一个偶数与 5 的积，末位一定是 0 可求得正确答案.

**【解】** $2^{m+2006}+2^m=2^m\times(2^{2006}+1)$，

因为 $2^{2006}=2^{4\times 501+2}$，其末位数字是 4，所以 $2^{2006}+1$ 的末位数字是 5，

所以 $2^{m+2006}+2^m$($m$ 是正整数) 的末位数字是 0.

**【说明】** (1) 这道题考查的知识点是求末位数字，整式的乘法.

(2) 求解正整数指数幂的末位数字时，往往要用到以下两个规律：

其一，设 $m$，$n$ 都是正整数，$a$ 是 $m$ 的末位数字，则 $m^n$ 的末位数字就是 $a^n$ 的末位数字.

其二，设 $p$，$q$ 都是正整数，$m$ 是任意正整数，则 $m^{4p+q}$ 的末位数字与 $m^q$ 的末位数字相同.

**12.** 有若干苹果，两个一堆多一个，3 个一堆多一个，4 个一堆多一个，5 个一堆多一个，6 个一堆多一个，问这堆苹果最少有多少个?

【分析】 这道题可以看做是余数相同的问题，可以将问题转化为最小公倍数来解决.

【解】 设这堆苹果最少有 $x$ 个，依题意得

$$\begin{cases} x = 2q_1 + 1, \\ x = 3q_2 + 1, \\ x = 4q_3 + 1, \\ x = 5q_4 + 1, \\ x = 6q_5 + 1, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x - 1 = 2q_1, \\ x - 1 = 3q_2, \\ x - 1 = 4q_3, \\ x - 1 = 5q_4, \\ x - 1 = 6q_5. \end{cases}$$

由此可见，$x-1$ 是 2,3,4,5,6 的最小公倍数，

因为 $[2,3,4,5,6] = 60$，所以 $x - 1 = 60$，即 $x = 61$.

答：这堆苹果最少有 61 个.

【说明】 选讲这道题是因为这是一类比较典型的题. 尤其是其解题思路值得学习和借鉴. 类似的，还可以进行多种形式的变式，比如将"多一个"换成"少一个"等.

**13.** (2007 年第 2 试) 满足 $1 + 3n \leqslant 2007$，且使得 $1 + 5n$ 是完全平方数的正整数 $n$ 共有多少个?

【分析】 显然，$n$ 的取值为 4,5,6,7,8，于是根据题意可分别求得余数 $r$ 的值.

【解】 由条件 $1 + 3n \leqslant 2007$ 得，$n \leqslant 668$($n$ 是正整数)，

设 $1 + 5n = m^2$($m$ 是正整数)，则 $n = \dfrac{m^2 - 1}{5}$，故 $\dfrac{m^2 - 1}{5}$ 是正整数，

可设 $m + 1 = 5k$，或 $m - 1 = 5k$($k$ 是正整数).

(1) 当 $m + 1 = 5k$ 时，$\dfrac{m^2 - 1}{5} = 5k^2 - 2k \leqslant 5k^2 \leqslant 668$，

由 $5k^2 \leqslant 668$ 得，$k \leqslant 11$.

当 $k = 12$ 时，$5k^2 - 2k = 696 > 668$，

所以，此时有 11 个满足题意的正整数 $n$ 使 $1 + 5n$ 是完全平方数，

(2) 当 $m - 1 = 5k$ 时，$n = \dfrac{m^2 - 1}{5} = 5k^2 + 2k$，

又 $5k^2 - 2k < 5k^2 + 2k$，且当 $k = 11$ 时，$5k^2 + 2k = 627 < 668$，

所以，此时有 11 个满足题意的正整数 $n$ 使 $1 + 5n$ 是完全平方数.

因此，满足 $1 + 3n \leqslant 2007$ 且使 $1 + 5n$ 是完全平方数的正整数 $n$ 共有 22 个.

【说明】 这道题考查的知识点有完全平方数，带余数除法，取整数，求比值. 这道题比较简单，但很容易出错，原因在于相除时不能先约分!

## 趋势预测

初等数论的相关知识始终是各级各类数学竞赛的热点. 近几年，希望杯试题越来越重视对初等数论知识的考查，每年的第 2 试试卷中，至少要出 3 道题. 涉及的知识点在上述例题

中均有所涉及,题型有选择题、填空题和解答题.试题难度一般为中档题,有时作为解答题出现在试卷中,难度就比较大.有些难度较低的试题,也往往比较灵活.

根据历年考查的情况分析,很难预测今后某个时期内的某个热点,因为无论是质数与合数、约数与倍数、整除与同余、奇数与偶数、完全平方数与末位数字、数位与进位,以及高斯记号等单个知识的考查,还是这些知识的综合运用,都有可能出现在任何一次数学竞赛试卷中.但有一个大体的趋势,可以预计今后的考查将更加重视多个知识点的综合,当然,也不能忽视对单个知识点的熟练掌握.

## 针对模型

**一、选择题**

1. 对于彼此互质的三个正整数 $a,b,c$,有以下判断:

① $a,b,c$ 均为奇数 ② $a,b,c$ 中必有一个偶数 ③ $a,b,c$ 没有公因数 ④ $a,b,c$ 必有公因数

其中,不正确的判断的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 对于数 $x$,符号 $[x]$ 表示不大于 $x$ 的最大整数.例如,$[3.14]=3$,$[-7.59]=-8$,则满足关系式 $\left[\frac{3x+7}{7}\right]=4$ 的 $x$ 的整数值有 ( )

A. 6 个 B. 5 个 C. 4 个 D. 3 个

3. 已知 $a,b,c$ 都是整数,$m=|a+b|+|b-c|+|a-c|$,那么 ( )

A. $m$ 一定是奇数 B. $m$ 一定是偶数

C. 仅当 $a,b,c$ 同奇偶时,$m$ 是偶数 D. $m$ 的奇偶性不能确定

(**提示:** 因为 $m$ 中如果有 $a,b,c$ 出现,则都是以它们的偶数倍形式出现的.)

4. 已知 $a=123456789$,记 $a^2$ 的个位数字是 $x$,十位数字是 $y$,则 $x+y$ 的值是 ( )

A. 3 B. 7 C. 13 D. 15

5. 若大于 1 的整数 $n$ 可以表示成若干个质数的乘积,则这些质数称为 $n$ 的质因数,则下面四个命题中正确的是 ( )

A. $n$ 的相反数等于 $n$ 的所有质因数的相反数之积

B. $n$ 的倒数等于 $n$ 的所有质因数的倒数之积

C. $n$ 的倒数的相反数等于 $n$ 的所有质因数的倒数的相反数之积

D. $n$ 的相反数的倒数等于 $n$ 的所有质因数的相反数的倒数之积

6. 当 $x$ 取 1 到 10 之间的质数时,在四个整式 $x^2+2$,$x^2+4$,$x^2+6$,$x^2+8$ 的值中,共有质数有 ( )

A. 6 个 B. 9 个 C. 12 个 D. 16 个

7. 已知 $a=|-2004|+15$，则 $a$ 是 ( )

A. 合数 B. 质数 C. 偶数 D. 负数

8. 2009 年 2 月 23 日是星期日，那么 2009 年元旦是 ( )

A. 星期二 B. 星期三 C. 星期四 D. 星期五

9. Digits of the product of $25^{16}\times 2^{38}$ is ( )

A. 32 B. 34 C. 36 D. 38

10. 2009 年 6 月 3 日依照美语习惯写作 6/3/2009，依照英语习惯写作 3/6/2009. 像 6/3/2009 就难以判断是美语日期还是英语日期，也难以判断是哪一天，称为易混日期. 而 4/18/2009 显然是美语日期，可以准确断定为 2009 年 4 月 18 日；18/4/2009 显然是英语日期，可以准确断定为 2009 年 4 月 18 日；2/2/2009 虽不能断定是美语日期还是英语日期，但总可以断定为 2009 年 2 月 2 日，这些都是不混日期，那么每月的易混日期有 ( )

A. 10 个 B. 11 个 C. 12 个 D. 无数个

## 二、填空题

11. $n$ 是自然数，如果 $n+20$ 和 $n-21$ 都是完全平方数，则 $n$ 等于________.

12. $a,b,c$ 是三个不同的自然数，两两互质. 已知它们任意两个之和都能被第三个整除，则 $a^3+b^3+c^3=$________.

13. 两个正整数 $x$ 和 $y$ 的最大公约数是 4，最小公倍数是 20，则 $x^2y^2+3xy+1=$________.

14. 我们用记号“|”表示两个正整数间的整除关系，如 $3\mid 12$ 表示 3 整除 12，那么满足 $x\mid(y+1)$ 与 $y\mid(x+1)$ 的正整数组 $(x,y)$ 共有________组.

15. 若 $a,b,c,d,e$ 为互不相等的正偶数，满足 $(2008-a)(2008-b)(2008-c)(2008-d)(2008-e)=24^2$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ 的末位数字是________.

16. $a,b,c$ 都是质数，且满足 $a+b+c+abc=99$，则 $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|=$________.

17. 5 位数 $\overline{2x9y1}$ 是某个自然数的平方，则 $3x+7y=$________.

18. 一个四位数添上一个小数点后所得的数比原数小 2059.2，则这个四位数是________，它除以 4，得到的余数是________.

19. 若 $\overline{k45k9}$ 是能被 3 整除的五位数，则 $k$ 的可能取值有________个；这样的五位数中能被 9 整除的是________.

20. 设 $m$ 和 $n$ 为大于 0 的整数，且 $3m+2n=225$.

① 如果 $m$ 和 $n$ 的最大公约数为 15，则 $m+n=$________.

② 如果 $m$ 和 $n$ 的最小公倍数为 45，则 $m+n=$________.

# 第二讲　有理数

**赛题再现**

1.（2008 年第 2 试）$a$ 是最大的负整数，$b$ 是绝对值最小的有理数，则 $a^{2007}+\frac{b^{2009}}{2008}$ 等于（　　）

A. $-1$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2008}$　　D. 2007

**【分析】** 最大的负整数是$-1$，绝对值最小的有理数是 0. 接下来只要按有理数的运算法则，即可得到正确答案.

**【解】** 根据题意可知 $a=-1, b=0$，把 $a$ 和 $b$ 的值代入所求的式子，求得其值为$-1$，故选(A).

**【说明】** 这道题考查的知识点有最大的负整数，绝对值最小的有理数，有理数的乘除法法则，有理数的乘方等. 题目很简单，解题只要细心就不会出错. 这类问题往往作为送分题在竞赛以及中考中出现，而且出现的频率比较大.

2.（2008 年培训题）有如下四个命题：① 任何有理数都有相反数；② 一个有理数和它的相反数之间至少还有一个有理数；③ 任何有理数都有倒数；④ 一个有理数，如果有倒数，则它们之间至少还有一个有理数. 其中真命题的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**【分析】** 对于命题真假的判断题，必须一个一个的判断，判断假命题的方法主要是“举反例”.

**【解】** 因为任意有理数 $a$ 的相反数为 $-a$，所以任何有理数都有相反数，故命题 ① 是真命题；0 的相反数是 0，两者之间没有任何有理数，所以命题 ② 是假命题；0 没有倒数，所以命题 ③ 也是假命题；比如 1 的倒数是它本身，两者之间没有任何有理数，所以命题 ④ 是假命题. 故答案选(A).

**【说明】** 这道题考查的知识点有相反数，倒数，实数的有序性，命题的真假判断. 重点考查学生对相反数、倒数等定义的掌握，由于不少考生对 0，1 这些数的特殊性不熟练，导致解答本题时出错. 为此，建议考生在解题时要细心求稳. 另外，这类题连续几年来一直出现在希

望杯的竞赛卷中，但都作了变式改动，以后的备考还需要注意.

**3.** (2008 年第 1 试)"嫦娥一号"第一次入轨时运行的椭圆轨道如图 2-1 所示，其中黑色圆圈表示地球，其半径 $R=6371\text{km}$，$A$ 是近地点，距地球 205km，$B$ 是远地点，距地球 50930km(已知地心、近地点、远地点在一条直线上)，则 $AB=$ ________ km(用科学记数法表示).

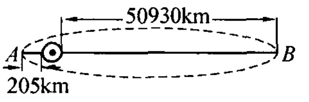


图 2-1

**【分析】** 地球的直径是 $6371\times2=12742(\text{km})$，地球的直径与 205、50930 的和即为 $AB$ 的距离.

**【解】** $205+6371\times2+50930=63877=6.3877\times10^4$. 所以答案填 $6.3877\times10^4$.

**【说明】** 这道题考查的知识点有科学记数法，有理数的加法与乘法. 通过分析近年来的竞赛题和中考题，考查科学记数法时，往往是用最新国际国内重大时事作为试题背景，考生应注意这个趋势.

**4.** (2006 年第 2 试) $1\frac{1}{2}-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{12}-4\frac{19}{20}+5\frac{1}{30}-6\frac{41}{42}+7\frac{1}{56}-8\frac{71}{72}+9\frac{1}{90}=$ ________.

**【分析】** 由裂项相消法解 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots=1-\frac{1}{4}\cdots$ 的过程可以类比解决这道题.

**【解】** $1\frac{1}{2}-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{12}-4\frac{19}{20}+5\frac{1}{30}-6\frac{41}{42}+7\frac{1}{56}-8\frac{71}{72}+9\frac{1}{90}$

$$=1+\frac{1}{2}-2-\frac{5}{6}+3+\frac{1}{12}-4-\frac{19}{20}+5+\frac{1}{30}-6-\frac{41}{42}+7+\frac{1}{56}-8-\frac{71}{72}+9+\frac{1}{90}$$

$$=5+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}\right)+\left(\frac{1}{6}-1\right)+\left(\frac{1}{20}-1\right)+\left(\frac{1}{42}-1\right)+\left(\frac{1}{72}-1\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}$$

$$=1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$$

$$=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{10}=2-\frac{1}{10}=\frac{19}{10}.$$

故答案填 $\frac{19}{10}$.

**【说明】** 这道题考查的知识点有裂项相消法，有理数加法交换律、结合律. 这道题方法简单、思路单纯，但计算比较麻烦，很容易出错，做题时需要耐心和细心. 有理数的计算还有很多常用方法，诸如倒序相加法、整体代换法、凑整数等速算法、公式法、发现规律法、配方法、数形结合法等.

5. (2006 年第 2 试) $\dfrac{1+2+3+4+5+\cdots+2005+2006}{\left(1-\frac{1}{1004}\right)\left(1-\frac{1}{1005}\right)\left(1-\frac{1}{1006}\right)\left(1-\frac{1}{1007}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2005}\right)\left(1-\frac{1}{2006}\right)}=$ ________.

**【分析】** 解决诸如本题这样貌似繁杂的题，首先可以尝试“部分计算”的办法，即先分别计算分子和分母的值，然后再两数相除. 事实上，部分计算过后，问题即可迎刃而解. 另外需要补充一个计算公式：$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

**【解】** 因为 $1+2+3+\cdots+2005+2006=\frac{1}{2}\times2006\times2007$，

且 $\left(1-\frac{1}{1004}\right)\left(1-\frac{1}{1005}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2005}\right)\left(1-\frac{1}{2006}\right)=\frac{1003}{1004}\times\frac{1004}{1005}\times\cdots\times\frac{2004}{2005}\times\frac{2005}{2006}=\frac{1}{2}$，

所以，原式 $=\frac{1}{2}\times2006\times2007\times2=4026042$.

故答案填 4026042.

**【说明】** 这道题考查的知识点有有理数的加减，连续有限正整数求和，约分等. 在竞赛题中，有理数的计算往往暗藏有一定的计算技巧，如果能运用技巧解题，计算会简便得多.

6. (2007 年第 1 试) 计算：$\left(-\frac{2}{3}\times2\%\right)^4\times\left(-\frac{3}{4}\times3\%\right)^3\times\left(-\frac{4}{5}\times4\%\right)^2\times\left(-\frac{5}{6}\times5\%\right)\times10^{20}=$ ________.

**【分析】** 这道题有多条解决途径，我们不妨这么解答，首先确定积的符号，容易得知积的符号为正；然后将括号内的算式变形，比如第一个括号内变为 $\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{100}\right)^4$，再利用积的乘方公式，比如将第一个变形后的式子再变形为 $\left(\frac{4}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{10}\right)^8$，从而将计算简化.

**【解】** 原式 $=\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{100}\right)^4\times\left(\frac{3^2}{4}\times\frac{1}{100}\right)^3\times\left(\frac{4^2}{5}\times\frac{1}{100}\right)^2\times\left(\frac{25}{6}\times\frac{1}{100}\right)\times10^{20}$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{10}\right)^8\times\left(\frac{3^2}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{10}\right)^6\times\left(\frac{4^2}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{10}\right)^4\times\frac{25}{6}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times10^{20}$

$=\frac{4^4}{3^4}\times\frac{3^6}{4^3}\times\frac{4^4}{5^2}\times\frac{25}{6}=1536$.

故答案填 1536.

**【说明】** 这道题考查的知识点有有理数的乘法、乘方，同底数幂的乘法与除法，以及积的乘方公式等，解决这类比较繁琐的题的主要策略就是化繁为简，切不可直接计算.

7. (2007 年第 1 试) 如果 $|m-2005|$ 与 $(n-2006)^2$ 互为相反数，那么 $(m-n)^{2007}=$ ________.

**【分析】** 由题意可知 $|m-2005|+(n-2006)^2=0$,这就转化为非负数之和等于 0 的情形,由非负数之和等于 0,即表示每个非负数等于 0,从而可以求得 $m,n$ 的值,进而求得答案.

**【解】** 根据题意可知 $|m-2005|+(n-2006)^2=0$,

所以,$m=2005,n=2006$,从而 $m-n=-1$,

所以 $(m-n)^{2007}=-1$.

故答案填 $-1$.

**【说明】** 这道题考查的知识点有非负数之和等于 0 即表示每个非负数等于 0,相反数的意义,有理数的乘方等.这是一类很常见的简单的竞赛题型,必须掌握好.

**8.** (2007 年第 2 试) 若有理数 $m,n,p$ 满足 $\frac{|m|}{m}+\frac{|n|}{n}+\frac{|p|}{p}=1$,则 $\frac{2mnp}{|3mnp|}=$ ________.

**【分析】** 根据绝对值的定义可知,当 $a>0$ 时,$\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=1$;当 $a<0$ 时,$\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=-1$,所以,根据这道题的条件,我们可以判断 $m,n,p$ 三个数中,必有两个正数和一个负数,从而得出答案.

**【证明】** 因为有理数 $m,n,p$ 满足 $\frac{|m|}{m}+\frac{|n|}{n}+\frac{|p|}{p}=1$,

所以 $m,n,p$ 三个数中,必有两个正数和一个负数,可知 $mnp<0$,

所以 $\frac{2mnp}{|3mnp|}=-\frac{2}{3}$,故答案填 $-\frac{2}{3}$.

**【说明】** 这道题考查的知识点有绝对值的意义和分类讨论的数学思想.这道题是一类比较典型的绝对值的问题,解题的关键是对绝对值意义的理解.

**9.** (2006 年第 1 试) 如图 2-2 所示,圆的周长为 4 个单位长度,在圆的 4 等分点处标上 0,1,2,3.先让圆周上数字 0 所对应的点与数轴上的数 $-1$ 所对应的点重合,再将数轴按逆时针方向绕在该圆上,那么数轴上的数 $-2006$ 将与圆周上的数字________重合.

**【分析】** 事实上,这道题所反映的数学现象是周期变化,4 个数字一个周期,所以可以根据这个规律解题.

**【解】** 从 $-1$ 至 $-2006$,共有 2005 个数,而 $2005\div4$,余数为 1.根据图 2-2 可以看出数轴上的数 $-2006$ 将与圆周上的数字 3 重合.故答案填 3.

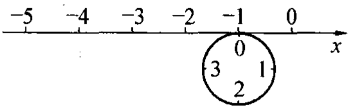

图 2-2

**【说明】** 这道题考查的知识点有数轴,带余数除法,发现规律并根据规律解题的数学方法.解这类题的关键在于准确地发现规律.

**10.** (2003 年第 2 试) 数轴上的 $A$、$B$、$C$ 分别对应数 $0,-1,x$,$C$ 与 $A$ 的距离大于 $C$ 与 $B$ 的距离,则 (　　)

A. $x>0$　　B. $x>-1$　　C. $x<-\frac{1}{2}$　　D. $x<-1$

【分析】 涉及数轴的问题,一般都需要先画一条数轴,然后在数轴上探求答案,就此题而言,可以直接在数轴上求得答案.

【解】 如图2-3所示,$C_1$与$A$的距离大于$C_1$与$B$的距离;$C_2$与$A$的距离等于$C_2$与$B$的距离;$C_3$与$A$的距离小于$C_3$与$B$的距离,由此可知,点$C$应该在$C_2$的左边,而$C_2$对应的数值是$-\frac{1}{2}$,故答案选(C).

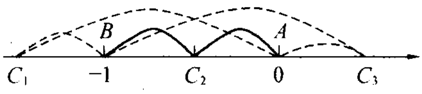

图2-3

【说明】 (1) 涉及数轴与绝对值的问题,很多时候需要画出数轴,并运用数轴来解决.

(2) 像本例,通过画出数轴并作图解决代数问题的方法称为数形结合法,这是一种重要的数学思想方法,这种思想方法能够解答很多数学问题.

**11.** (2004年第2试)观察下面的等式:

$$2\times 2=4, 2+2=4,$$

$$\frac{3}{2}\times 3=4\frac{1}{2}, \frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2},$$

$$\frac{4}{3}\times 4=5\frac{1}{3}, \frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3},$$

$$\frac{5}{4}\times 5=6\frac{1}{4}, \frac{5}{4}+5=6\frac{1}{4}.$$

小明归纳上面各式得出一个猜想:"两个有理数的积等于这两个有理数的和."小明的猜想正确吗?为什么?请你观察上面各式的结构特点,归纳出一个猜想,并证明你的猜想.

【分析】 小明归纳的猜想是否成立,一般的方法是尝试举一个反例,如果能举出反例,则说明其不成立,否则就可能成立.就本题而言,比如$1\times 3\neq 1+3$,所以不成立;因为第一个式子可以变形成$\frac{2}{1}\times 2=4, \frac{2}{1}+2=4$,所以,可以由此发现规律:分母是正整数$n$,分子是分母的值与1的和,这个分数与分子对应的数的积等于它们的和;证明的过程就是有理数运算的过程,既可以证明一边等于另一边,也可以证明两边等于同一个数或式子.

【解】 (1) 小明的猜想显然是不正确的,易举出反例,如$1\times 3\neq 1+3$.

(2) 将第一组等式变形为:$\frac{2}{1}\times 2=4, \frac{2}{1}+2=4$,

得出如下猜想:"若$n$是正整数,则$\frac{n+1}{n}\times(n+1)=\frac{n+1}{n}+(n+1)$."

证法1:左边$=\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+1)=(n+1)+\frac{n+1}{n}=$右边,所以猜想是正确的.

证法2:右边$=\frac{n+1}{n}+\frac{n(n+1)}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}=$左边,所以猜想是正确的.

【说明】 (1) 这道题主要考查学生探究、发现和猜想并证明自己的猜想是否正确的能