AOSAI

MATHEMATICS

——新课程新奥赛系列丛书——

张志朝/主编

初中数学中考·奥赛一本通

CHUZHONGSHUXUEZHONGKAO
AOSAIYIBENTONG

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

张志朝

中学数学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练员，中学数学教授级高级教师，南京师范大学数科院硕士生指导教师，《中学数学月刊》编委，常州市高中数学名教师工作室领衔人。长期致力于高中数学教学实践与研究；担任学校数学奥林匹克教练员，积极从事数学竞赛培训工作。竞赛成绩卓著，在他辅导的学生中，有200多人次在全国数学联赛中获奖，其中有42人次荣获一等奖，4人入选冬令营。

新课程新奥赛系列丛书（初中部分）

初中英语中考·奥赛一本通

初中英语中考·奥赛实用题典

初中数学中考·奥赛一本通

初中数学中考·奥赛实用题典

初中物理中考·奥赛一本通

初中物理中考·奥赛实用题典

初中化学中考·奥赛一本通

初中化学中考·奥赛实用题典

初中生物中考·奥赛一本通

初中生物中考·奥赛实用题典

责任编辑 / 王书贞

封面设计 / 书衣坊·小刘

ISBN 978-7-81047-168-8

9 787810 471688 >

定价：18.00元

AOSAI

MATHEMATICS

CHUZHONGSHUXUEZHONGKAOAOSAIYIBENTONG

初中数学中考·奥赛一本通

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

书　　名　初中数学中考·奥赛一本通
主　　编　张志朝
责任编辑　王书贞
出版发行　南京师范大学出版社
地　　址　江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话　(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址　http://press.njnu.edu.cn
E－mail　nspzbb@njnu.edu.cn
照　　排　江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷　北京市世界知识印刷厂马鞍山分厂
开　　本　850×1168　1/32
印　　张　12.25
字　　数　313 千
版　　次　2008 年 7 月第 4 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81047-168-8/G·91
定　　价　18.00 元

前　言

进入初中以后，同学们对自己数学能力就有了新的要求，新课程也认为数学学习应掌握数学的一些现成结果和这些结果的形成过程，而且数学活动应是一个生动活泼、主动和富有个性的活动.《初中数学中考·奥赛一本通》就是一位引领你学习数学的好帮手.

本书在编写中渗透了以下两个宗旨：

一是注重初中数学知识的系统与深化，数学方法的展示与评点，以及数学思想的归纳与提炼，力求读者数学水平的大步提高.

二是融合近些年全国初中数学联赛及地方性数学竞赛的内容，力求读者能适应各级别的竞赛培训活动.

本书含有知识性专题和方法性专题两部分，共 18 讲，每讲根据相应内容设置“考点直击”“精题剖析”“基础练习”“培优训练”“赛场演习”等栏目，内容充实，解法精妙，理念新颖.

为了方便使用，我们把本书中所有习题的详细解答汇集在《初中数学中考·奥赛实用题典》一书中，两书配合使用，读者可悉知初中数学的每一细节之处.

“千里之行，始于足下.”愿此书能陪伴你整个的初中数学学习，为你打好数学基础，增加数学智慧，启迪数学感悟，成功应对各类数学选拔考试.

编　者

目　录

第1讲　整　数

整数的研究在数学里占有极为重要的地位，特别是整数问题的灵活性和独特性，有利于考查和培养学生的综合素质. 因此，各级各类数学竞赛，整数的问题涉及较多.

第 1 节　整数的基本知识

整数是“数”的基础，是数学中的重要基本知识，只有掌握了整数的一系列性质后，才能研究“数”的其他性质，并把研究结果应用到其他各学科中去.

考点直击

1. 自然数的十进制和它的应用

数的进位制很多，常用的是十进位制. 简单地说，就是用 10 个不同的数字符号(也叫数码)0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 和由低位向高位“满十进一”的位置原则，就可以写出一切正整数来，对于一切十进位制的数都可以用它的各数位上单位的和的形式来表示. 例如：$2005=2\times10^3+0\times10^2+0\times10+5$. 对于任意正整数 N 都可以表示为 $N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$ 的形式，这里 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1,a_0$ 各代表 0 到 9 这 10 个数字中的任一个，但 $a_n\neq0$. 有时还把正整数 N 表示成 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$$(a_n\neq0)$，在上面加上一横，意在避免与 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1,a_0$ 的乘积发生混淆.

2. 奇数与偶数

整数可以分为两大类：奇数和偶数. 凡能被 2 整除的数都叫做

偶数,而不能被 2 整除的整数都叫做奇数.我们常用 $2n$ 表示偶数,用 $2n+1$ 或 $2n-1$ 表示奇数(n 为整数).

奇数和偶数的简单性质有:

(1)奇数≠偶数,奇数+偶数≠0.

(2)两个奇数之和(差)是偶数,偶数与奇数之和(差)是奇数,两个偶数之和(差)是偶数.

(3)奇数个奇数之和是奇数,偶数个奇数之和是偶数,任意个偶数之和是偶数.

(4)奇数与奇数之积是奇数,偶数与任意整数之积是偶数.

(5)若 a 是整数,则 a 与 $|a|$、$-a$ 有相同的奇偶性.

(6)若 a,b 是整数,则 $a+b,a-b,|a+b|,|a-b|$ 都有相同的奇偶性.

上述性质看起来简单,但其应用十分广泛,并且有较强的技巧性和灵活性.正确地利用整数性质简捷解题是数学竞赛中的一项很重要的基本功.

3. **质数与合数**

一个大于 1 的正整数 a,若仅有 1 与 a 这两个正约数,则 a 叫做质数(或素数);若还有其他的正约数,则 a 叫做合数.

若将正整数按约数的个数分类,可分为三类:1、质数、合数.

质数、合数具有以下性质:

(1)1 既不是质数也不是合数.

(2)质数有无穷多个,不存在最大质数,但存在最小质数 2,它也是质数中唯一的偶数.

(3)若一个正整数 a 的一个约数 P 是质数,则约数 P 叫做 a 的质约数(质因数).

(4)任何一个大于 1 的正整数 N 都能分解成质因数的连乘积形式:

$$N=P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots P_n^{a_n}. \qquad (*)$$

其中,$P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为质数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正整数.如

果不考虑因数的顺序，这种分解式是唯一的.

(5)一个合数分解成标准式(∗)后，约数的个数为

$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$.

如：$12=2^2\times3$，它的约数的个数为$(2+1)(1+1)=3\times2=6$.

4. 最大公约数与最小公倍数

正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 公有的约数叫做这 n 个数的公约数，其中最大的一个公约数，叫做这 n 个数的最大公约数. 记作：

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d$.

其中，d,n 为正整数，且 $n\geqslant2$.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，则叫 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互质. 如$(4,9)=1$，就说 4 和 9 互质.

正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 共有的倍数叫做这 n 个数的公倍数，其中最小(除 0 以外)的一个公倍数，叫做这 n 个数的最小公倍数. 记作：

$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m$.

其中，m,n 为正整数，且 $n\geqslant2$.

最大公约数与最小公倍数的求法：

将每个数分解成质因数的乘积，这些数中各质因数最高次幂的乘积就是这些数的最小公倍数，各质因数最低次幂的乘积就是这些数的最大公约数. 通常还有公式：$ab=(a,b)[a,b]$.

整数问题是初中数学竞赛中常见的题材，命题多样、新颖，解法灵活，技巧性强. 下面将对整数基本知识的应用进行详细的论述.

精题剖析

例 1　若 P 为质数，P^3+5 仍为质数，则 P^5+7 为(　　).

(A)质数　　(B)可为质数也可为合数

(C)合数　　(D)既不是质数也不是合数

思路点拨　可通过探求 P 的奇偶性，找到问题获解的突破口.

解　∵P^3+5 是质数，则 P 必为偶数.

又∵P为质数，则P只能为2.

由此$P^5+7=2^5+7=39$为合数.

故选(C).

评注 在所有质数中，仅一个偶数，它就是2，它也是最小的质数.

例2 已知自然数A、B的各位数字之和分别为17和11，且A、B两数相加时，仅有一次进位，那么和$A+B$的各位数字和是多少？这里A、B中较小的数至少是多少？

思路点拨 注意到两位数相加时，每进位一次，它们和的各位数字和要比这两个数的各位数字的总和减少9.

解 据以上分析，可知两数和$A+B$的各位数字之和是$11+17-9=19$.

根据题意，A、B两数至少都是两位数，各位数和为11的最小两位数是29(因为$2+9=11$)；而各位数字和为17的最小两位数是89(因为$8+9=17$)，从而可以知道A、B两数中较小的数至少是29. 此时，A、B两数中的较大数也可以取定. 因为较大数的各位数字之和是17且与29相加只进位一次，所以较大数可取269(取法不唯一，如取359也可以).

评注 由例2解法可知，如果A、B两数相加时，共有三次进位，那么和$A+B$的各位数字的和是$11+17-9\times3=1$，所以，和$A+B$至少是1000，A、B中如果有一个两位数，则最小数应是29，另一个数是971；其中如果有一个较小的数是三位数，则最小是119，而另一个数就是881.

例3 在1到2005的所有整数前面，任意添上正号或负号，然后相加，问这些和中最小的正整数是多少？

思路点拨 因为1到2005这些正整数中，每个数的前面添上正号或负号后，不改变它们的奇偶性，无论怎样添加符号，仍有

1003 个奇数，1002 个偶数，其总和还是奇数，其中最小的正整数是 1. 于是我们猜得这些和中最小的正整数是 1.

解　由和式 $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1998-1999-2000+2001)+(2002-2003-2004+2005)=1$，据以上分析，可见这些和中的最小正整数是 1.

例4　有一批大学生互相写信，并且每个人只要接到对方来信就一定回信，求证写了奇数封信的大学生有偶数个.

思路点拨　可以从写信的总数上来寻找到解题思路.

解　设 k 个大学生写了奇数封信，他们分别写信数为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，其中 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 都是奇数.

又设 s 个大学生写了偶数封信，他们分别写信数为 $m_1,m_2,\cdots,m_s$，其中 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 都是偶数.

由于写信是相互的，所以信的总数应为偶数，不妨用 A 来表示，则 $A=(n_1+n_2+\cdots+n_k)+(m_1+m_2+\cdots+m_s)$ 是偶数.

由于 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 是偶数，所以 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 也是偶数. 因为只有偶数个奇数的和才是偶数，所以 k 是偶数.

即写奇数封信的大学生数一定是偶数.

评注　在上述证明过程中，对题设条件"每个人只要接到对方来信就一定回信"的正确理解与应用是关键. 另外，"奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数"也是关键之一.

例5　是否存在整数 a,b 满足 $a^2+2006=b^2$？

思路点拨　考察 $b^2-a^2=2006$ 能否成立.

解　若存在整数 a,b 满足 $a^2+2006=b^2$，

则 $(b+a)(b-a)=2006$，

而 $b+a,b-a$ 是同奇同偶的，

2006 又是偶数，

$\therefore b+a,b-a$ 应同为偶数，

即$(b+a)\cdot(b-a)$应是4的倍数.

而$2006=1003\times2$不是4的倍数,

$\therefore(b+a)(b-a)=2006$矛盾.

故不存在a,b满足$a^2+2006=b^2$.

评注 由于$b+a,b-a$是同奇同偶,所以$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$或者是奇数,或者是偶数,若是偶数,还是4的倍数.

一般地,不存在整数a,b满足$(a+b)(a-b)=4k+2$(k为整数).

例6 如果三个质数之积为它们和的5倍,试求这三个质数.

思路点拨 由于5本身是一个质数,所以由题设条件可知5是三质数之一.本例的求解就应以此为突破口.

解 不妨设三个质数为x,y,z,则$xyz=5(x+y+z)$,显见$5|xyz$,所以x,y,z中必有一个是5.

不妨设$x=5$,那么$yz=y+z+5$,即$(y-1)(z-1)=6$.

又因为y,z都是质数,且$6=1\times6=2\times3$,

又不妨设$y<z$,那么得$\begin{cases}y-1=1,\\z-1=6.\end{cases}$

解之,得$y=2,z=7$.(注意到2,7都是质数)

$\begin{cases}y-1=2,\\z-1=3.\end{cases}$

解之,得$y=3,z=4$.(4不是质数)

于是所求的三个质数是2,5,7.

评注 在得到了$yz=y+z+5$之后,也能用估算的方法来求y与z.由于$y+z+5$不大于y与z中的大者的三倍.故y与z中的小者就不会超过3,进而通过简单讨论,就能很快的求出y与z了.

基础练习

一、选择题

1. 三个不同的质数 m,n,p 满足 $m+n=p$，则 mnp 的最小值是(　　).

(A)15　　(B)30　　(C)6　　(D)10

2. 有下列说法：

①奇正整数总可表示为 $4n+1$ 或 $4n+3$ 的形式，其中 n 为正整数；

②任意一个正整数总可表示为 $3n$ 或 $3n+1$ 或 $3n+2$ 的形式，其中 n 为正整数；

③一个奇正整数的平方总可以表示为 $8n+1$ 的形式，其中 n 为正整数；

④任意一个完全平方数总可以表示为 $3n$ 或 $3n+1$ 的形式，其中 n 为正整数.

其中正确说法的个数是(　　).

(A)0　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3. 已知两个不同的质数 p,q 满足下列关系：$p^2-2001p+m=0$，$q^2-2001q+m=0$，m 是适当的整数，那么 p^2+q^2 的数值是(　　).

(A)4004006　　(B)3996005

(C)3996003　　(D)4004004

4.（江西省竞赛试题）2007^{2007} 的末位数字是(　　).

(A)1　　(B)3　　(C)7　　(D)9

二、填空题

5.（全国竞赛试题）已知 a,b,c 为整数，且 $a+b=2006$，$c-a=2005$. 若 $a<b$，则 $a+b+c$ 的最大值为______.

6. 已知 2005 是两个质数的和，那么这两个质数的积等于______.

7. 已知三个正整数 x,y,z 满足：$x+y+z=xyz$，且 $x<y<z$，

则 $x=$______, $y=$______, $z=$______.

8.(江苏省竞赛试题)某次数学测验共有20题,每题答对得5分,不答得0分,答错得-2分.若小丽这次测验得分是质数,则小丽这次最多答对______题.

三、解答题

9.已知两个连续奇数的平方差为2008,试求这两个连续奇数.

10. 两位数A的数字和的平方等于数A^2的数字和,试求出所有这样的两位数A.

11. a,b,c,d都是质数,且$10<c<d<20$,$c-a$是大于2的质数,$d^2-c^2=a^3b(a+b)$,求a,b,c,d的值.

12. 设x,y,z都是整数,满足条件$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$,试证明$x+y+z$能被27整除.

第2节　整除的基本性质

考点直击

1. 整除的常用性质

设a,b,c,d都是整数,则有:

(1)若$c|a$,$c|b$,那么$c|a\pm b$.

(2)若$c|b$,$b|a$,那么$c|a$.

(3)若a,b,c中有一个被d整除,那么$d|abc$.

(4)若$b|a$,$c|a$,且b与c互质,那么$bc|a$.

2. 数的整除性常见特性

对于具有某个条件的整数都能被整数N整除,而不具备这个条件的整数就不能被整数N整除,这种条件就叫做能被整数N整除的特征.

(1)若整数M的个位数是偶数,那么$2|M$.

(2)若整数M的个位数是0或5,那么$5|M$.

(3)若整数 M 的各位数字之和是3(或9)的倍数,那么 $3|M$(或 $9|M$).

(4)若整数 M 的末两位数是4(或25)的倍数,那么 $4|M$(或 $25|M$).

(5)若整数 M 的末三位数是8(或125)的倍数,那么 $8|M$(或 $125|M$).

(6)若整数 M 的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差是11的倍数,那么 $11|M$.

3. **带余除法**

两个整数的和、差、积仍是整数,即整数中加、减、乘运算是封闭的.但用一非0整数去除另一整数,所得的商未必是整数.

一般地,a、b 为两个整数,$b\neq 0$,则存在唯一的整数对 q 和 r,使得 $a=bq+r$.

这里 $0\leqslant r<|b|$.

特别是当 $r=0$ 时,称 $b|a$.

当 $r\neq 0$ 时,称 q 为 a 被 b 除时所得的不完全商,称 r 为 a 被 b 除时所得的余数.

4. **同余、余数的分类**

下面就余数有关问题进行讨论.

由上可得 $a=bq+r$,而这里 r 可以取 $0,1,2,\cdots,b-1$.

(1)如果我们把这 b 个数,每一个数分成一类(即按余数相同的分成一类),则可分为 b 类.

如:整数 a 被3除时,余数只能是0,1,2.所以整数 a 可以分成 $3q,3q+1,3q+2$ 这三类形式,任一整数都属于这三类中的某一类,从而把整数的整体问题转化为讨论每一类问题的共性,得出整数总体的性质.

(2)两整数 a 和 b 被 c 除时,余数相等,叫做 a 和 b 对模 c 同余,记作:

$a\equiv b(\bmod c)$.

如:$64\equiv 4(\bmod 30)$.