

“十一五”国家重点图书出版规划项目

3

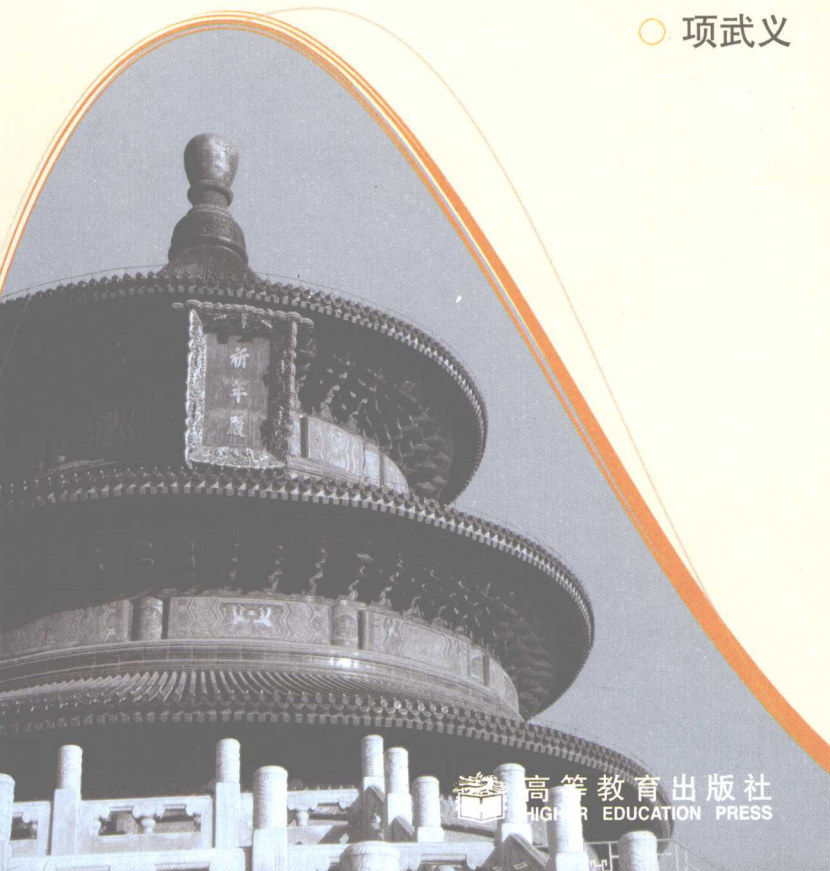
□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

几何学在文明中所扮演的角色

——纪念陈省身先生的辉煌几何人生

○ 项武义



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编



几何学在文明中 所扮演的角色

——纪念陈省身先生的辉煌几何人生

项武义

高等教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

几何学在文明中所扮演的角色: 纪念陈省身先生的
辉煌几何人生 / 项武义. —北京: 高等教育出版社,
2009.1

(数学文化小丛书 / 李大潜主编)

ISBN 978-7-04-024837-1

I. 几… II. 项… III. 几何学-普及读物 IV. O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 195911 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	崔梅萍
封面设计	张楠	责任绘图	杜晓丹
版式设计	王艳红	责任校对	张颖
责任印制	韩刚		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/32	版 次	2009年1月第1版
印 张	3.375	印 次	2009年1月第1次印刷
字 数	60 000	定 价	10.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24837 - 00

数学文化小丛书编委会

- 顾问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编辑：王彦英

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野,启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、几何学在古文明中所扮演的角色	1
二、中国和希腊古文明的定量平面几何	4
中国古算中的几何公式	4
希腊定量平面几何	6
中国和希腊平面几何的比较分析	13
三、几何学与天文学	15
圆锥曲线的故事	15
由 Kepler 定律到 Newton 万有引力定律	19
四、对称性与最小作用原理	23
欧氏、球面与双曲几何的统一理论	23
Lagrange 最小作用原理和 Jacobi 几何化	26
五、从勾股弦到狭义相对论	31
广义勾股定理, 向量内积和垂直投影	31
勾股定理的高维推广和格氏代数	33
多元积分, 外微分和 Stokes 定理	39
电磁学的数理分析, Maxwell 理论	45
狭义相对论	50

六、大域几何、纤维丛与近代物理	69
de Rham 上同调与同调论简介	70
纤维丛及其示性类理论简介	74
大域几何与近代物理的相互关联	92
参考文献	96

一、.....	1
二、.....	4
三、.....	15
四、.....	23
五、.....	31
.....	31
.....	33
.....	39
.....	45
.....	50

一、几何学在古文明中所扮演的角色

人生几何，是曹孟德对于人生苦短的感叹，而几何人生，则是陈省身先生的人生之概括。他毕生致力于几何学的教研工作，承前启后，继往开来，博大精深，功业永在，乃是一个辉煌的几何人生！

若要解说“几何人生”的真实意义何在，自然就得从“几何学在文明中所扮演的角色”探求之，也唯有如此，才能充分体现其中的真谛。有鉴于此，今天就以此为题，和大家一起来纪念陈省身先生的辉煌几何人生。但是此题太大，纵贯整个文明历程，实乃无比广泛深远，今天限于时间，只能长话短说，简述其梗概之一二。

假如将世界上诸多古文明所知的几何认知作一比较分析，就会发现可以把它们大体上归为两类，即有圆文明和无圆文明。如古中国文明、古希腊文明等属于前者，而玛雅 (Maya) 文明、印加 (Inca) 文明等属于后者。前者发明了轮子的诸多妙用，在建筑上使用拱门，由此逐步走上工业化而昌盛至今。后者则始终没有发明轮子或拱门而终归寂灭，到如今仅仅留下残墟断壁，令人感叹、神伤。如今反思，为什么古文明之“有圆”、“无圆”在他们的盛、衰上会

有如此天壤之别呢？此事决非偶然、巧合。其实，从上述密切相关的探究中，自然地让我们认识到几何在古文明中所扮演的角色。

人类和宇宙间所有事物共存于其中的空间，它具有极为精简完美的本质。大体上来说，空间本质之精要可以归结为下述四点：

- (1) 点、线、面的联结与分隔 (空间的基本结构)。
- (2) 对称性：空间对于给定平面的反射对称，对于给定轴线的旋转对称等。
- (3) 平直性：三角形内角和恒为一平角，矩形的存在等。
- (4) 连续性：其最为精简的表现，就是直线是连续不断的，但是一剪就断，亦即直线上一点两侧之两段。

其实，轮子的发明开拓了善用空间的旋转对称性在运输、制陶、纺车、水车、磨坊等方面的诸多应用，乃是工业生产的重要起步。如今反思其理，我们可以对此作如下之理解：空间精简完美之本质，实乃宇宙中各种各样结构与现象的精简原理之基础，也是生存于其中万物的无上福份。在中文里关于“福”有下述四个主要的概念，即有福，知福，造福和惜福。空间精简完美之福，万物皆共享有之，唯独人类具有超群的脑力，而且发明了文字，可以世代相承，精益求精地对于空间之美妙本质下知福的工夫（这就是几何）。显然，唯有知福才能造福，例如有圆文明知空间对称之福，才能发明轮子来造福。广而言之，基础科学实乃“知大自然精简美妙之福”者也！而现代科

技则是由上述“知福”进而“造福”是也。那么“惜福”在此应作何解呢？有鉴于盲目或短视的“造福”，其结果可能是祸非福！例如核物理知识可以有各种和平用途，但也可以用来制造巨大破坏力的核武器。总之，在科技日益昌盛的现代，全人类都应该致力于环保，要把“和大自然和谐共存”世代相传，永记在心。我想这应该就是中华文化中“惜福”这个概念的现代化和重要性。

二、中国和希腊古文明的 定量平面几何

中国古算中的几何公式

先介绍一下中国古代所认知的定量平面几何,相信其创造者和使用者乃是中国古代的工匠和工程师(特别是水利工程师). 其要点在于矩形、三角形的面积公式(矩形面积 = 长 $\times$ 宽, 三角形面积 = 底 $\times$ 高之半) 和善用这些面积公式简洁地推导勾股弦和出入相补比例式.

勾股弦公式

由下面图 1 所示的两种分割, 易见

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

(勾方加股方等于弦方)

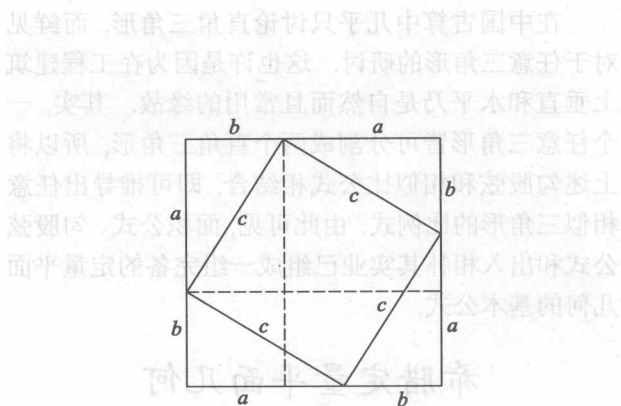


图 1

出入相补与相似直角三角形边长比例式

如图 2 所示, 比例式很可能起始于下述测量树高的图解, 其想法也是用面积等式推导之.

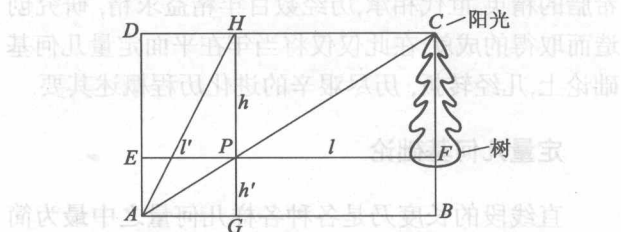


图 2

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA, \triangle AGP \cong \triangle PEA,$$

$$\triangle PFC \cong \triangle CHP \Rightarrow h'l = hl' \Rightarrow \frac{h + h'}{h'} = \frac{l + l'}{l'},$$

即直角三角形 $\triangle AGP$ 和 $\triangle ABC$ 的相应直角边的边长比例式.

在中国古算中几乎只讨论直角三角形,而鲜见对于任意三角形的研讨.这也许是因为在工程建筑上垂直和水平乃是自然而且常用的缘故.其实,一个任意三角形皆可分割成两个直角三角形,所以将上述勾股弦和相似比公式相结合,即可推导出任意相似三角形的比例式.由此可见,面积公式、勾股弦公式和出入相补其实业已组成一组完备的定量平面几何的基本公式.

希腊定量平面几何

古希腊文明在继承古埃及文明和古巴比伦文明的基础上更上一层楼,得到蓬勃发展,其在几何学与天文学上的成就,尤为卓著,可谓是现代科学的奠基者与开拓者,是理性文明中的伟大篇章.它乃是集古希腊的精英,世代相承,历经数百年精益求精,研究创造而取得的成就.在此仅仅将当年在平面定量几何基础论上,几经转折,历尽艰辛的进化历程概述其要.

定量几何基础论

直线段的长度乃是各种各样几何量之中最为简单的基本量,其他的几何量如角度、面积、体积、两面角、立体角等,均从属于长度(如面积公式、体积公式、S.S.S. 判别定理等).由此可见长度的度量是定量几何中最为基本的概念和根基.古希腊定量几何基础论的基点和起点就是直线段长度度量的界定.

设两个直线段 a, b 分别由等分成 m 段和 n 段

等长的直线段连接而成, 亦即 $a = m \cdot c$ 和 $b = n \cdot c$, 则 a, b 的长度之比显然应该定义为分数 $\frac{m}{n}$, 通常以 $a : b = \frac{m}{n}$ 记之. 古希腊几何学家把这种情形叫做可公度 (commensurable). 不但如此, 而且他们当初还认为任何两个直线段总是可公度的, 即任何两个线段的“长度之比”总是一个分数. 总之, 古希腊几何基础论的头号公理乃是: “可公度性对于任何两个直线段皆普遍成立”, 然后对面积公式、毕氏定理 (勾股定理) 及相似三角形定理等再给以严格论证. 毕氏学派对此贡献良多, 全希腊都引以为自豪.

不可公度性的发现(Hippasus, 公元前5世纪)

Hippasus 是毕氏的门徒, 他一直在锲而不舍地探索和研究可不可公度的问题. 话说当年, 在大师百年之后不久, 他在沙盘上用芦苇杆对正五边形的几何性质作分析时, 发现了一个令他惊恐莫名的事实, 那就是一个正五边形的对角线长和边长是不可公度的! Hippasus 这个石破天惊的发现起始于下面所示的简单分析 (图 3):

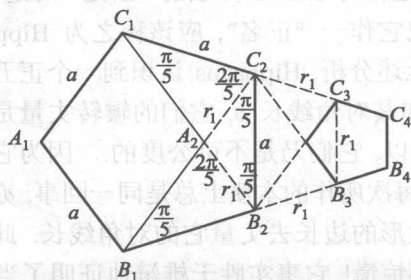


图 3 本图取自《古希腊几何学》

$$\overline{C_1B_2} = \overline{B_1C_2} = b, \overline{A_2B_2} = \overline{A_2C_2} = b - a.$$

他用当年熟知的“三角形内角和恒为一个平角”和“等腰三角形定理与逆定理”得到正五边形的内角皆为 $\frac{3\pi}{5}$, 所以等腰三角形 $\triangle B_1C_2B_2$ 和 $\triangle C_1B_2C_2$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$. 此外 $\triangle A_2C_2C_1$ 的两底角皆为 $\frac{2\pi}{5}$, 而 $\triangle B_2C_2A_2$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$. 对此, Hippasus 早已熟知能详, 觉得不足为奇, 但是那天他突然异想, 把 B_1B_2 和 C_1C_2 如图所示分别延长至 B_3 和 C_3 使 $\overline{B_2B_3}$ 和 $\overline{C_2C_3}$ 的长度等于 $\triangle B_2C_2A_2$ 的两腰的长度 $r_1 (= b - a)$. 他注意到 $A_2B_2B_3C_3C_2$ 乃是一个对角线长为 a 的正五边形, 而其边长 r_1 乃是原先那个正五边形的对角线长和边长之差. 此事立刻令他惊恐莫状! 为什么呢? 因为他早已熟知用辗转丈量法去求两个可公度的线段 a, b 的最长公尺度 (一如用辗转相除去求两个整数 m, n 的最大公约数. 其实, 如今通称为 Euclid 算法的“出处”乃是前者, 所以理当把它作一“正名”, 应该称之为 Hippasus 算法). 由上述分析, Hippasus 认识到一个正五边形的边长 a 和其对角线长 b , 它们的辗转丈量是永无休止的! 所以, 它们乃是不可公度的. 因为它们的辗转丈量, 每次所作的本质上总是同一回事, 亦即以正五边形的边长去丈量它的对角线长. 此事焉不让他震撼惊慌! 它事实胜于雄辩地证明了当年几何基础论的头号公理根本是不对的! 这个石破天惊的

发现简直是“几何巨震”(geoquake),把当年引以自豪的几何基础论震撼得摇摇欲坠。(据现已无从考证的传说, Hippasus 本人还因为这个伟大的发现而丧命于他的同门之手.)

Eudoxus 逼近法与几何基础论之重建

Hippasus 的伟大发现,乃是理性文明的重要里程碑,它犹如发现了一个理念上的新大陆,这也是人类文明第一次触及了空间连续性这个重要本质. 其实,不可公度性的存在,并非全面否定了当年几何基础论的成就,它只是说明原先以为已经完备无缺的证明,其实只是对于可公度的特殊情形的证明,而在一般的不可公度的情形,则尚待补证! 这个亟待补证的任务,对于当时整个古希腊几何学界来说乃是一个极其严峻的挑战!

希腊几何学界大约经历了半个多世纪的努力奋斗,才促使 Eudoxus (公元前 4 世纪) 开创了影响无比广阔、深远的逼近原理和逼近法,他的牛刀小试就完美地达成了几何基础论的重建大业. 如今回顾, Eudoxus 的思想和方法,提供了研究和理解 Hippasus 所发现的“连续世界”的康庄大道,而且它也奠定了近代分析学的基础. 其简朴精到的想法,广阔深远的应用,至今还在蓬勃进展. Eudoxus 的丰功伟业,令人高山仰止,赞赏心仪,我等后学,岂能不对于这位古代大师的教导,多下工夫,学而时习之,习而常思之! 这里简述其基本认识和思想如下: