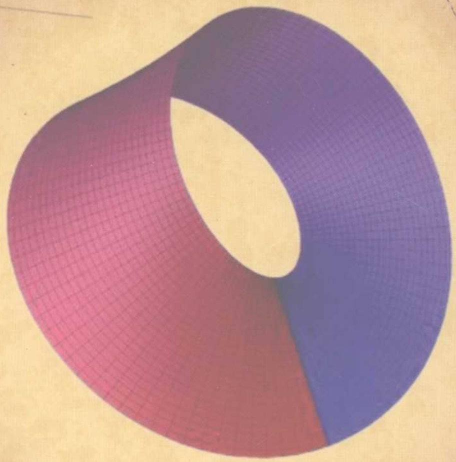
TURING 图灵数学·统计学丛书25



Topology from the Differentiable Viewpoint

从微分观点看拓扑

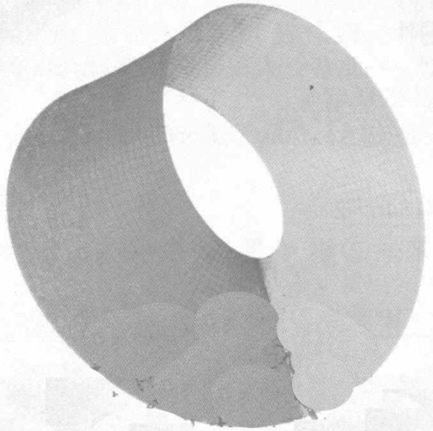
（双语版）

[美] John W. Milnor 著

熊金城 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图灵数学·统计学丛书25



Topology from the Differentiable Viewpoint

从微分观点看拓扑

（双语版）

[美] John W. Milnor 著
熊金城 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

从微分观点看拓扑：双语版 / (美) 米尔诺（Milnor, J.W.）著；熊金城译. —北京：人民邮电出版社，2008.10

（图灵数学·统计学丛书）

书名原文：Topology from the Differentiable Viewpoint

ISBN 978-7-115-18467-2

Ⅰ. 从… Ⅱ. ①米… ②熊… Ⅲ. 拓扑-研究-英、汉 Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 098965 号

内 容 提 要

本书由菲尔兹奖和沃尔夫奖得主 J. W. Milnor 所著，是一本蜚声国际数学界的经典之作. 内容涉及光滑流形和光滑映射，Sard 定理和 Brown 定理，映射的模 2 度，定向流形，向量场与 Euler 数，标架式协边，Pontryagin 构造等. 全书内容简要，短小精悍.

本书为双语版，可用于双语教学. 既适合高等院校数学专业高年级本科生和研究生阅读，也可供对微分拓扑有兴趣的专业人士参考.

图灵数学·统计学丛书

从微分观点看拓扑(双语版)

◆ 著　[美]John W. Milnor
　译　熊金城
　责任编辑　张继发

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京顺义振华印刷厂印刷

◆ 开本：850×1168 1/32
　印张：4.25
　字数：117 千字　2008 年 10 月第 1 版
　印数：1–3 000 册　2008 年 10 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-3318 号

ISBN 978-7-115-18467-2/O1

定价：20.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版 权 声 明

译 者 介 绍

熊金城: 男, 1938 年出生, 江西南昌人. 1962 年毕业于北京大学数学力学系数学专业, 先后在中国科学院数学研究所、中国科学技术大学、华南师范大学工作. 曾任中国科学技术大学数学系副主任、中国科学院数学专家委员会委员, 以及国际理论物理中心 (意大利) 协约成员. 1992 年获国务院政府特殊津贴. 编有《点集拓扑讲义》(曾获得国家教委大学优秀教材二等奖, 该书第 4 版已列入"十一五"国家教材规划). 译著有《从微分观点看拓扑》、《代数拓扑学基础教程》等. 曾在世界各地作学术访问或参加学术会议, 是我国微分拓扑领域的著名学者.

译 者 序

《从微分观点看拓扑》一书为 1962 年菲尔兹奖和 1989 年沃尔夫奖得主 J. W. Milnor 所著, 是一本蜚声国际数学界的经典之作. 在这本书中, 作者用微分拓扑的方法去处理拓扑学中的一些典型论题. 通过如此短小的篇幅, 如此快捷地向读者展现拓扑学中引人入胜的成果, 不仅展现出了作者的深厚功力, 同时也展现出了微分拓扑方法的巨大功效.

阅读这本书, 并不需要许多数学知识作为基础, 大学数学系二、三年级以上的学生, 不会感到困难. 我认为所有的数学工作者, 无论他们是否打算从事几何拓扑方向的研究工作, 都将因阅读此书而从中获益.

大约是在 1965 年末或 1966 年初这本书刚出版不久的时候, 我便有幸读到了它. 那时我大学毕业不久, 是个年轻人, 在中国科学院数学研究所拓扑组学习做微分拓扑奇点理论方面的研究工作. 这本十分精巧的小书当年令我爱不释手, 给我留下了极为深刻的印象. 然而第一次把它翻译成中文, 却是在 10 余年后的 1978 年, 我已届中年了. 当时南京师范学院 (早已改名为南京师范大学了) 数学系邀请我去他们那里就拓扑学的有关问题作一些交流, 在南京待了将近两个月. 在这过程中利用空余的时间, 完成了翻译工作, 后经由上海科学技术出版社出版. 这便是该书的第一个中文译本的来由. 这次, 应人民邮电出版社图灵公司之邀重译, 我已是垂垂老矣. 此书可说是与我结下了不解之缘. 这次重译, 改正了原译本中的某些不妥之处. 由于译者水平有限, 疏漏和不当之处恐怕还是难免, 尚祈读者不吝指正.

译者

2008 年春于华南师范大学

纪念 Heinz Hopf

序

本书源自 1963 年 12 月我在佩奇–巴伯 (Page-Barbour) 讲义基金会的资助下于弗吉尼亚 (Virginia) 大学所做讲座的讲义. 其中介绍了拓扑学由来已久的某些论题, 这些论题是以 1912 年 L. E. J. Brouwer 的映射度的定义为中心的. 然而, 我们用的是微分拓扑的方法而不是 Brouwer 的组合方法. 正则值的概念以及断定每一个光滑映射都有正则值的 Sard 定理和 Brown 定理在本书中起着核心作用.

为方便陈述起见, 所有的流形都取为无限次可微的并且明确地嵌入在欧氏空间中的流形. 并假定读者具备点集拓扑学和实变理论方面的一些知识.

在此我想向 David Weaver 表示我的谢意, 他的早逝使我们大家都深为悲痛. 本书初稿全赖他出色的笔记才得以问世.

J. W. M.

1965 年 3 月于新泽西州普林斯顿

PREFACE

THESE lectures were delivered at the University of Virginia in December 1963 under the sponsorship of the Page-Barbour Lecture Foundation. They present some topics from the beginnings of topology, centering about L. E. J. Brouwer's definition, in 1912, of the *degree* of a mapping. The methods used, however, are those of differential topology, rather than the combinatorial methods of Brouwer. The concept of *regular value* and the theorem of Sard and Brown, which asserts that every smooth mapping has regular values, play a central role.

To simplify the presentation, all manifolds are taken to be infinitely differentiable and to be explicitly embedded in euclidean space. A small amount of point-set topology and of real variable theory is taken for granted.

I would like here to express my gratitude to David Weaver, whose untimely death has saddened us all. His excellent set of notes made this manuscript possible.

J. W. M.

Princeton, New Jersey
March 1965

目　　录

CONTENTS

第 1 章　光滑流形和光滑映射

首先解释一些术语. $\mathbf{R}^k$ 表示 k 维欧氏空间, 于是一个点 $x \in \mathbf{R}^k$ 便是实数的一个 k 重组 $x = (x_1, \cdots, x_k)$.

设 $U \subset \mathbf{R}^k$, $V \subset \mathbf{R}^l$ 都是开集. 如果从 U 到 V 的映射 f (写作 $f: U \to V$) 的所有偏导数 $\partial^n f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}$ 都存在且连续, 则称 f 为一个*光滑映射* smooth map.

更为一般的情形是, 设 $X \subset \mathbf{R}^k$ 以及 $Y \subset \mathbf{R}^l$ 为欧氏空间的任意子集, $f: X \to Y$. 如果对于每一个 $x \in X$, 存在着包含 x 的开集 $U \subset \mathbf{R}^k$ 以及光滑映射 $F: U \to \mathbf{R}^l$ 使得 F 与 f 在 $U \cap X$ 上是一致的, 则称 f 为一个*光滑映射*.

如果 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是光滑的, 那么复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 也是光滑的. 任何一个集合 X 的恒同映射显然是光滑的.

定义　如果映射 $f: X \to Y$ 将 X 同胚地变到 Y 上, 并且 f 与 f^{-1} 两者都是光滑的, 则称 f 为一个*微分同胚* (diffeomorphism).

现在可以粗略地说, *微分拓扑学* (differential topology) 研究的是一个集合 $X \subset \mathbf{R}^k$ 在微分同胚下不变的性质.

我们不打算去考察那些完全任意的集合 X, 而是通过下述定义挑选出特别引人注目和特别有用的一类集合.

定义　设 $M \subset \mathbf{R}^k$. 如果对于每一个点 $x \in M$, 都有一个邻域 $W \cap M$ 微分同胚于欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的某一个开子集 U, 则称 M 为一个 m 维*光滑流形* (smooth manifold).

任何一个特定的微分同胚 $g: U \to W \cap M$ 称为区域 $W \cap M$ 的一个*参数化* (parametrization). [逆微分同胚 $g^{-1}: W \cap M \to U$ 称为 $W \cap M$ 上的一个*坐标系* (system of coordinates).]

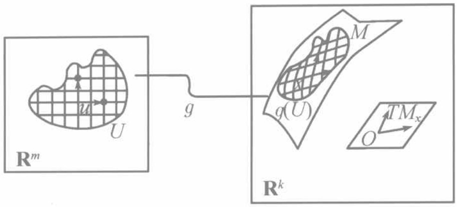


图 1 M 中区域的参数化

有时, 我们必须考察零维流形. 根据定义, 如果对于每一个 $x \in M$, 邻域 $W \cap M$ 都由 x 独点组成, 则 M 是一个零维流形.

例 由所有满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ 组成的单位球 S^2 是 2 维光滑流形. 事实上, 当 $x^2 + y^2 < 1$ 时, 微分同胚

$$(x, y) \to (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

将 S^2 中 $z > 0$ 的区域参数化了. 用互换 x, y, z 以及改变变量符号的办法, 得到 $x > 0, y > 0, x < 0, y < 0$ 以及 $z < 0$ 的各个区域类似的参数化. 由于这些区域覆盖 S^2, 所以 S^2 是一个光滑流形.

更为一般的情形是, 由所有满足方程 $\Sigma x_i^2 = 1$ 的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 组成的球面$S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ 是一个 $n-1$ 维光滑流形. 例如 $S^0 \subset \mathbf{R}^1$ 是由两个点组成的流形.

一个不大规整的光滑流形的例子可由所有满足条件 $x \neq 0$ 和 $y = \sin(1/x)$ 的点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 的集合给出.

1.1 切空间和导射

为了对光滑流形间的光滑映射 $f : M \to N$ 定义**导射**(derivative) $\mathrm{d}f_x$ 的概念, 首先将每一个点 $x \in M \subset \mathbf{R}^k$ 联系一个 m 维线性子空间 $TM_k \subset \mathbf{R}^k$, 并称之为 M 在点 x 处的**切空间**(tangent space). 然后, $\mathrm{d}f_x$ 将是一个从 TM_x 到 TN_y 的线性映射, 其中 $y = f(x)$. 向量空间 TM_x 的元素称为 M 在点 x 处的**切向量**(tangent vector).

人们直观地联想到 $\mathbf{R}^k$ 中的在点 x 附近最好地逼近 M 的 m 维超平面, TM_x 便是既通过原点而又平行于上述超平面的那个超平面. (参

见图 1 和图 2.) 类似地, 人们联想到从点 x 处的切超平面到点 y 处的切超平面的, 最好地逼近 f 的非齐次线性映射. 把这两个超平面都平移到原点去, 便得到 $\mathrm{d}f_x$.

在给出实际定义之前, 必须研究开集间的映射这一特殊情形. 对于任意开集 $U \subset \mathbf{R}^k$, 切空间 TU_x 定义为整个向量空间 $\mathbf{R}^k$. 对于任何一个光滑映射 $f: U \to V$, 导射

$$\mathrm{d}f_x : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^l$$

由下列公式定义: 当 $x \in U$, $h \in \mathbf{R}^k$,

$$\mathrm{d}f_x(h) = \lim_{t\to 0}(f(x+th) - f(x))/t.$$

显然, $\mathrm{d}f_x(h)$ 是 h 的线性函数. [实际上, $\mathrm{d}f_x$ 恰好是与在点 x 处取值的一阶偏导数的 $l \times k$ 阶矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ 对应的线性映射.]

下面是导射运算的两条基本性质:

(1) (链法则) 若 $f: U \to V$ 和 $g: V \to W$ 都是光滑映射, $f(x) = y$, 则

$$\mathrm{d}(g \circ f)_x = \mathrm{d}g_y \circ \mathrm{d}f_x.$$

换言之, $\mathbf{R}^k$、$\mathbf{R}^l$、$\mathbf{R}^m$ 的开子集之间的光滑映射的每一个可交换的三角形

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & W \end{tikzcd}$$

都对应着一个线性映射的可交换的三角形

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^l \arrow[dr, "\mathrm{d}g_y"] & \\ \mathbf{R}^k \arrow[ur, "\mathrm{d}f_x"] \arrow[rr, "\mathrm{d}(g\circ f)_x"] & & \mathbf{R}^m. \end{tikzcd}$$

(2) 若 I 为 U 的恒同映射, 则 $\mathrm{d}I_x$ 为 $\mathbf{R}^k$ 的恒同映射. 更为一般的情况是: 如果 $U \subset U'$ 都是开集, 并且

$$i : U \longrightarrow U'$$

为包含映射, 则 $\mathrm{d}I_x$ 也是 $\mathbf{R}^k$ 的恒同映射.

还要注意:

(3) 若 $L:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^l$ 为线性映射, 则 $\mathrm{d}L_x=L$.

作为这两条性质的简单应用, 有下述命题:

命题　若 f 是开集 $U\subset\mathbf{R}^k$ 与 $V\subset\mathbf{R}^l$ 之间的一个微分同胚, 则 k 必定等于 l, 并且线性映射

$$\mathrm{d}f_x:\mathbf{R}^k\longrightarrow\mathbf{R}^l$$

必定是非退化的.

证明　复合映射 $f^{-1}\circ f$ 是 U 的恒同映射, 因此 $\mathrm{d}(f^{-1})_y\circ\mathrm{d}f_x$ 是 $\mathbf{R}^k$ 的恒同映射. 类似地, $\mathrm{d}f_x\circ\mathrm{d}(f^{-1})_y$ 是 $\mathbf{R}^l$ 的恒同映射. 于是 $\mathrm{d}f_x$ 有双边的逆, 从而推得 $k=l$.

这一命题的部分逆命题为真. 令 $f:U\to\mathbf{R}^k$ 为光滑映射, 其中 U 为 $\mathbf{R}^k$ 中的开集.

反函数定理　如果导射 $\mathrm{d}f_x:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ 是非退化的, 则 f 将围绕 x 的任何一个充分小的开集 U' 微分同胚地映射到开集 $f(U')$ 上.

(见 Apostol [2, p.144] 或 Dieudonne [7, p.268].)

注意: 即使在每一个点处, $\mathrm{d}f_x$ 都是非退化的, 但一般而言 f 却可以不是一一映射. (一个有启发性的例子是复平面到自身的指数映射.)

现在对任意的光滑流形 $M\subset\mathbf{R}^k$ 定义切空间 TM_x 如下. 选取 M 中 x 的邻域 $g(U)$ 的一个参数化

$$g:U\longrightarrow M\subset\mathbf{R}^k,$$

其中 $g(u)=x$. 此处 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个开子集. 将 g 认作是从 U 到 $\mathbf{R}^k$ 的映射. 所以导射

$$\mathrm{d}g_u:\mathbf{R}^m\longrightarrow\mathbf{R}^k$$

已有定义. 令 TM_x 等于 $\mathrm{d}g_u$ 的象 $\mathrm{d}g_u(\mathbf{R}^m)$. (参见图 1.)

必须证明这种构造法不依赖于参数化 g 的特殊选取. 令 $h:V\to M\subset\mathbf{R}^k$ 为 M 中的点 x 的邻域 $h(V)$ 的另外一个参数化, 且令 $v=h^{-1}(x)$. 则 $h^{-1}\circ g$ 将 u 的某一邻域 U_1 微分同胚地映射到 v 的一个邻

域 V_1 上. 开集间的光滑映射的交换图

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

引出线性映射的交换图

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^k & \\ \mathbf{R}^m \arrow[ur, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{d}(h^{-1}\circ g)_u"'] & & \mathbf{R}^m, \arrow[ul, "\mathrm{d}h_y"'] \end{tikzcd}$$

而由此直接推得 $\mathrm{d}g_u$ 的象等于 $\mathrm{d}h_v$ 的象, 即

$$\mathrm{Image}(\mathrm{d}g_u) = \mathrm{Image}(\mathrm{d}h_v).$$

于是, TM_x 是完全确定的.

证明 TM_x 是 m 维向量空间. 因为

$$g^{-1} : g(U) \longrightarrow U$$

是光滑映射, 所以可以选取一个包含 x 的开集 W 以及一个光滑映射 $F : W \to \mathbf{R}^m$ 使 F 在 $W \cap g(U)$ 上与 g^{-1} 一致. 令 $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, 可得交换图

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{包含映射}"] & & \mathbf{R}^m, \end{tikzcd}$$

因此有交换图

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^k \arrow[dr, "\mathrm{d}F_x"] & \\ \mathbf{R}^m \arrow[ur, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[rr, "\text{恒同映射}"] & & \mathbf{R}^m. \end{tikzcd}$$

该图显然蕴含 $\mathrm{d}g_u$ 秩为 m, 因而它的象 TM_x 为 m 维.

现在考虑两个光滑流形 $M \subset \mathbf{R}^k$ 和 $N \subset \mathbf{R}^l$ 以及光滑映射

$$f : M \longrightarrow N,$$

并设 $f(x) = y$. 导射

$$\mathrm{d}f_x : TM_x \longrightarrow TN_y$$

定义如下. 由于 f 是光滑的, 所以存在着包含 x 的开集 W 以及在 $W \cap M$ 上与 f 一致的光滑映射

$$F : W \longrightarrow \mathbf{R}^l.$$

对于所有 $v \in TM_x$, 定义 $\mathrm{d}f_x(v)$ 等于 $\mathrm{d}F_x(v)$.

为了验证这一定义, 必须证明 $\mathrm{d}F_x(v)$ 属于 TN_y 并且不依赖于 F 的特殊选取.

对于 x 的邻域 $g(U)$ 和 y 的邻域 $h(V)$, 选取参数化

$$g : U \longrightarrow M \subset \mathbf{R}^k \quad \text{和} \quad h : V \longrightarrow N \subset \mathbf{R}^l.$$

如果必要的话, 用一个较小的集合替换 U, 则可以假定 $g(U) \subset W$, 以及 f 将 $g(U)$ 映射到 $h(V)$ 中, 从而

$$h^{-1} \circ f \circ g : U \longrightarrow V$$

是一个完全确定的光滑映射.

考虑开集间的光滑映射的交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbf{R}^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}.$$

取导射, 得到线性映射的交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^k \arrow[r, "\mathrm{d}F_x"] & \mathbf{R}^l \\ \mathbf{R}^m \arrow[u, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[r, "\mathrm{d}(h^{-1}\circ f\circ g)_u"] & \mathbf{R}^n \arrow[u, "\mathrm{d}h_v"'] \end{tikzcd},$$

其中 $u = g^{-1}(x)$, $v = h^{-1}(y)$.