21世纪高职高专精品教材

GAODENGSHUXUE

高等数学（上）

于海波　齐振东　主编

新华出版社

高等数学(上)

主　编　于海波　齐振东

副主编　崔丽娜　韩建玲

　　　　于　萍　胡柏新

编　委　邵会伟　钟艳林

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/于海波,齐振东主编. —北京:新华出版社,2008.6

ISBN 978-7-5011-8389-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①于… ②齐… Ⅲ.高等数学—高等学校—技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 077036 号

高等数学

主　　编:于海波　齐振东

责任编辑:李树林

出版发行:新华出版社

地　　址:北京石景山区京原路 8 号

网　　址:http://press.xinhuanet.com

http://www.xinhuapub.com

邮　　编:100040

经　　销:新华书店

印　　刷:北京佳艺丰印刷有限公司

开　　本:787 mm×1092 mm　1/16

印　　张:18.75

字　　数:300 千字

版　　次:2008 年 6 月第一版

印　　次:2008 年 3 月北京第一次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5011-8389-0

定　　价: 32.00 元

前　言

《高等数学》是高等职业院校一门重要的基础课，这本高职高等数学教材围绕高职培养目标，体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写而成的，供理工类高职高专各专业学生使用。

本书内容的选择一是根据职业教育“以就业为导向”的特点，突出教学的应用功能；二是服从于高职的培养目标，根据教学的实际需要，从宽从简、讲情概念、强化应用的原则，注意与普通高中教育数学课程的衔接，适当降低理论要求，重视应用，不过分强调理论的完整性和理论的严谨性。教学内容编排力求采用具体抽象应用的思路，注意由浅入深，由易到难，循序渐进，符合学生的认识规律和接受能力。在内容编排的逻辑结构和体系上做一些调整，对传统内容适当地削弱，对保留的传统内容力求使用现代的思想、方法和语言，做到有新意。增加课程弹性，适当安排选修内容，将数学建模的思想渗透到每章，充分体现数学的应用性。为此，确立编写本书的指导思想为：重视概念、强调应用、侧重计算。本书的特色也体现在下述几个方面：

基本知识培养目标：

(1)使学生掌握一元函数微积分学的基础知识与基本运算；有能力根据生活和工作中的实际问题所提供的条件，选择和应用有关数学模型或建立简单的数学模型；有能力利用常用的数学软件，完成必要的计算、分析或判断。

(2)使学生掌握技术数学若干领域的基本知识与基本运算，并了解其使用范围；有能力根据常规工艺、常规业务、常规管理中的实际问题所提供的条件，选择和应用相应的数学模型或建立简单的数学模型；有能力利用常用的数学软件，完成必要的计算、分析或判断。

基本能力培养目标：

(1)使学生具有进行较复杂的工程技术计算的能力及推理分析问题和解决问题的能力。

(2)不断提高学生的逻辑思维、基本运算、数形结合、空间想象及实际应用能力。

全书上下册共有11章，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分等。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免存在不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

2008年3月

目 录

第一章　函数与极限

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，几个量之间有时不是相互独立的，而是彼此存在一定的依赖关系，遵从一定的规律变化着，函数正是描述了变量之间的某种依赖关系，它是高等数学研究的对象. 对于函数，中学已经学过一些，而在本课程中，将采用一种新的、重要的思想方法——极限思想，来研究函数的一些新的性质.

本章将弄清研究的对象，即给出函数概念及有关的基本知识，掌握研究对象的思想方法，即引入极限思想，它是研究函数微积分的重要方法，它将贯穿高等数学的始终. 最后利用极限，研究函数的连续性.

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x) \quad x \in D,$$

其中，变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

当 x 在定义域 D 内取遍每一个值，对应的函数值的全体组成的数集，称为函数的值域，记作 M.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素.

(1)对应规律：是由自变量的取值确定因变量取值的规律.

例 1　$f(x)=3x^4+2x^2-1$.

f 确定的对应规律是：

$$f(\quad)=3(\quad)^4+2(\quad)^2-1$$

例 2　$f(x)=3x^4+2x^2-1$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(t)$、$f(-x)$、$f(x_0+\Delta x)$

解　由上 $f(\quad)=3(\quad)^4+2(\quad)^2-1$

可得：

$$f(1)=3(1)^4+2(1)^2-1=4$$

$$f(0)=3(0)^4+2(0)^2-1=-1$$

$$f(t)=3(t)^4+2(t)^2-1=3t^4+2t^2-1$$

$$f(-x)=3(-x)^4+2(-x)^2-1=3x^4+2x^2-1$$

$$f(x_0+\Delta x)=3(x_0+\Delta x)^4+2(x_0+\Delta x)^2-1$$

(2)定义域:自变量 x 的取值范围

通常求函数的定义域应注意以下几点:

①当函数是多项式时,定义域为$(-\infty,+\infty)$;

②分式函数的分母不能为零;

③偶次根式的被开方式必须大于或等于零;

④对数函数的真数必须大于零;

⑤反正弦函数与反余弦函数的定义域为$[-1,1]$;

⑥如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

例 3 求下列函数的定义域

(1)$y=2x^2+1$; (2)$y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$; (3)$y=\sqrt{x^2-2x-3}$;

(4)$y=\ln(1-x)$; (5)$y=\arcsin(3x-2)$; (6)$y=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{\lg(x+1)}$.

解 (1)函数 $y=2x^2+1$ 为多项式函数,当 x 取任何实数时,y 都有唯一确定的值与之对应,所求定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$为分式,需分母不为零,所以 $x^2-1\neq0$,即 $x\neq\pm1$,所求定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)函数 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$为偶次根式,需被开方式大于等于零,所以 $x^2-2x-3\geqslant0$ 即 $x\geqslant3$,或 $x\leqslant-1$,所求定义域为$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

(4)函数 $y=\ln(1-x)$为对数函数,需真数大于零,所以 $1-x>0$,即 $x<1$,所求定义域为$(-\infty,1)$.

(5)函数 $y=\arcsin(3x-2)$为反正弦函数,所以$-1\leqslant3x-2\leqslant1$,即$\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$,所求定义域为$[\dfrac{1}{3},1]$.

(6)函数 $y=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{\lg(x+1)}$中既有偶次根式、分式,又有对数函数,所以应取三部分定义域的交集,$x^2-4\geqslant0$,$\lg(x+1)\neq0$,则 $x+1>0$ 并且 $x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2$,取交集有 $x\geqslant2$.

例 4 下列各题中,$f(x)$与 $g(x)$是否表示同一函数?为什么?

(1)$f(x)=|x|$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2)$f(x)=x$,$g(x)=\sin(\arcsin x)$.

解 (1)$f(x)$和 $g(x)$是同一函数.因为,尽管二者的形式不一样,但定义域和对应法则都相同.

(2)$f(x)$和 $g(x)$不是同一函数.因为,$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$[-1,1]$.

3.函数的表示方法

函数的表示方法有表格法、图像法和公式法.

在用公式法表示函数时经常遇到下面几种情况:

(1)分段函数

在自变量的不同取值范围内,用不同的公式表示的函数,称为分段函数.如

$$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0,\\x^2,0\leqslant x<2,\\\ln x,2\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

就是一个定义在区间$[-\infty,5]$上的分段函数.

(2)用参数方程确定的函数

用参数方程$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}(t\in I)$

表示的变量x与y之间的函数关系,称为用参数方程确定的函数.例如函数

$y=\sqrt{1-x^2}(x\in[-1,1])$可以用参数方程$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant\pi)$表示.

(3)隐函数

如果在方程$F(x,y)=0$中,当x在某区间I内任意取定一个值时,相应地总有满足该方程的惟一的y值存在,则称方程$F(x,y)=0$在区间I内确定了一个隐函数.例如方程$e^x+xy-1=0$就确定了变量y是变量x之间的函数关系.

注意　能表示成$y=f(x)$(其中$f(x)$仅为x的解析式)的形式的函数,称为显函数.把一个隐函数化成显函数的过程称为隐函数的显化.

例如　$e^x+xy-1=0$可以化成显函数$y=\dfrac{1-e^x}{x}$.但有些隐函数却不可能化成显函数,例如$e^x+xy-e^y=0$.

例5　符号函数:

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

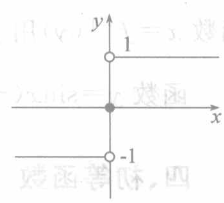


图1—1

例6　设函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant0\\x-1,x<0\end{cases}$　求:$f(-2),f(3),f(0)$.

解　$f(-2)=-2-1=-3,f(3)=3+1=4,f(0)=0+1=1$.

二、函数的几种特性

1.有界性

定义2　设D为某点集,对于$x\in D$函数$f(x)$有定义.

如果存在某一正数$M>0$,使得对$x\in D$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在D内有界.

如果找不到这样的正数 M,则称 $f(x)$在 D 内无界.

2.单调性

定义 3 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 是单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$则称 $f(x)$在区间 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间.单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

3.奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对任意$(-x)\in D$ 恒有:

(1)$f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数;

(2)$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.

4.周期性

定义 5 若存在不为零的数 T,使得对于任意 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$则称 $f(x)$为周期函数.通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

三、反函数

定义 6 设 $y=f(x)$的定义域为 D,其值域为 M,如果对于 M 中的每一个 y 值,都有一个确定的且满足 $f(x)=y$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,我们称它为 $y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 M,值域为 D.

由于人们习惯于用 x 表示自变量,而用 y 表示因变量,因此我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示.

函数 $y=\sin x(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$的反函数为 $x=\arcsin y(-1\leqslant y\leqslant 1)$.

四、初等函数

微积分的研究对象,主要为初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的.

1.基本初等函数

(1)幂函数 $y=x^\mu,\mu\in R$.;

(2)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1$,且 a 为常数$)$;

(3)对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1,a$ 为常数$)$.对数函数的底数 $a=e$ 时,称为自然对数函数记为 $y=\ln x$,对数的底数为 $a=10$ 时,称为常用对数,函数记为 $y=\lg x$;

(4)三角函数

正弦函数 $y=\sin x$;

余弦函数 $y=\cos x$;

正切函数 $y=\tan x$;

余切函数 $y=\cot x$.

此外，还有正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

常用的三角公式有：

$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$；$\sec^2 x=\tan^2 x+1$；

$\csc^2 x=\cot^2 x+1$；$\sin^2 x+\cos^2 x=1$；$\sin 2x=2\sin x\cos x$；

$1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$；$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(5)反三角函数(主值)

反正弦函数　$y=\arcsin x$；

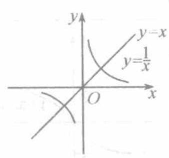
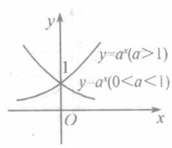
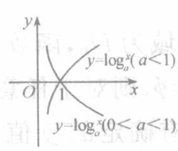
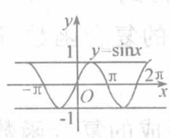
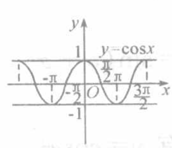
反余弦函数　$y=\arccos x$；

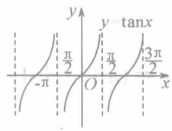
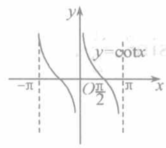
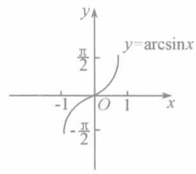
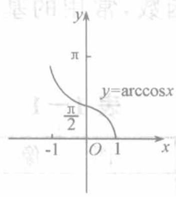
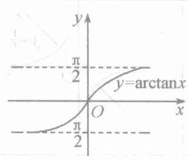
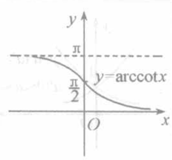
反正切函数　$y=\arctan x$；

反余切函数　$y=\arctan x$.

以上五类函数统称为基本初等函数，常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和性质见下表(1—1).

表 1—1

函　数	定义域和值域	图　像	性　质
幂函数 $y=x^{\mu}$			当 $\mu>0$ 时，函数在第一象限单调增 当 $\mu<0$ 时，函数在第一象限单调减
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点(0,1) 当 $a>1$ 时，单调增 当 $0<a<1$ 时，单调减
对数函数 $y=\log_a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点(0,1) 当 $a>1$ 时，单调增 当 $0<a<1$ 时，单调减
三角函数：正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界 在 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},sk\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 单调增 在 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 单调减
三角函数：余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界 在 $[2k\pi,-2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$ 单调减 在 $[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 单调增

函数		定义域和值域	图像	性质
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 单调增
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π 在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调减
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界 单调减
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界 单调减
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界 单调增
	反余切函数 $y=\text{arccot}\, x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界 单调减

2. 复合函数

定义 7　若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义，其值域为 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}$ 且 $W_2\cap D_1\neq\phi$，则对于任意 $x\in D_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in W_2$ 与之对应，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应. 这样对于任意 $x\in D_2$，通过函数 u 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，称其为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其定义域为 D_2，u 称为中间变量.

由函数 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的复合函数为 $y=(\cos x)^2$. 由函数 $y=\sqrt{1-u}$ 和 $u=2+e^x$ 不能复合成复合函数.

例 7　$y=\sin u,u=5+x^2$，则 $y=\sin(5+x^2)$ 就是以 $u=5+x^2$ 为中间变量的复合函数.

例如，$y=\cos u,u=e^y,y=x^2$，就有 $y=\cos e^{x^2}$.

例 8　求下列所给函数复合而成的复合函数,并求指定点处的函数值:

(1)$y=u^3,u=\cos x$,在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处;　(2)$y=\sqrt{u},u=1+x^3$,在 $x=1$ 处.

解　(1)复合函数:$y=\cos^3 x,y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$;

(2)复合函数:$y=\sqrt{1+x^3},y\big|_{x=1}=\sqrt{2}$.

例 9　将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数.

(1)$y=(2x+5)^8$　(2)$y=\frac{2x+1}{x^2-x-6}$　(3)$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$

(4)$y=3^{\tan^2 x}$　(5)$y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$

解　(1)$y=u^8,u=2x+5$　(2)$y=\frac{u}{v},u=2x+1,v=x^2-x-6$

(3)$y=e^u,u=\cos v,v=\frac{1}{x}$　(4)$y=3^u,u=v^2,v=\tan x$

(5)$y=u^{\frac{2}{3}},u=1+2x$

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的,且用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如:$f(x)=2^{x^2+1}+5(\ln x)^4 y=(2x+5)^8$、$y=\frac{2x+1}{x^2-x-6}$、$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$都是初等函数,今后我们所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题一

1. 填空题

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为________.

(2) $y=e^{\sin x^2}$是由________复合而成的.

(3) 开区间(a,b)的集合表示方法为________.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2+1, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-3)=$________, $f(0)=$________,

$f(2)=$________.

2. 判断正误（说明判断理由）

(1) 函数 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上单调增加；

(2) $y=x^2, x\in(0,+\infty)$是偶函数；

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 是不相同的函数；

(4) $y=\sqrt{-u}$与$u=\dfrac{1}{x^2}$不能复合成复合函数.

3. 选择题：

(1) 函数 $1+\sin x$ 是(　　)

A. 奇函数；　B. 偶函数；　C. 单调增加函数；　D. 有界函数.

(2) 下列是初等函数的是(　　)

A. $x=1$, x 是自变量；　B. $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x>0;\end{cases}$

C. $y=e^2+\sin\dfrac{\pi}{7}$；　D. $y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$

(3) 下列是函数的是(　　)

A. $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$　B. $y=\sqrt{\sin x-2}$；

C. 自变量 $x\in\{a,b,c\}$（a,b,c 为互异实数），f: $\begin{array}{ccc} a & b & c\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 1 & 1\end{array}$；

D. $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(x-1)}$.

4. 下列各题中，$f(x)$与$g(x)$是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sin(\arcsin x)$；

(3) $f(x)=x+2, g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(5) $f(x)=\ln\sqrt{x}, g(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$.

5. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{3x+4}$；　(2) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{4-x^2}$；　(4) $y=\ln(2-x)+\sqrt{x+1}$；

(5) $y=\arcsin(x-1)$；　(6) $y=\lg(\lg x)$；

(7) $y=\sqrt{1-2x}+3\arccos\dfrac{3x-1}{2}$；　(8) $y=\arcsin\sqrt{x^2-8}+\ln(2+2x)$.

6. 下列函数是由哪些函数复合而成

(1) $y=(1-2x)^3$；　(2) $y=\ln\cos x$；　(3) $y=\cos 3x$；

(4) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；　(5) $y=\sqrt{\cos 2^x}$.

7. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$，求 $f(10^{-1}), f(1), f(10)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0 & ,|x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), f-2$.

9. 已知 $f(x)=x+1$，求 $f(2)$、$f(-2)$.

10. 某工厂有一水池，其容积为 100 m^3，原有水为 10 m^3. 现在每 10 min 注入 0.5 m^3 的水. 试将水池中水的体积表示为时间 t 的函数，且问需用多少 min 水池才能灌满？

11. 以速率 A(单位：cm^3/s)往一圆锥形容器注水. 容器的半径为 R cm，高为 H. 试将容器中水的体积 V 分别表示成时间 t 与水高度 y 的函数.

12. 有一物体作直线运动，已知物体所受阻力的大小与物体的运动速度成正比，但方向相反. 当物体以 4 m/s 的速度运动时，阻力为 2 N，试建立阻力与速度之间的函数关系.

13. 旅客乘坐火车时，随身携带物品，不超过 20 kg 免费，超过 20 kg 部分，每 kg 收费 0.20 元. 超过 50 kg 部分再加收 50%. 试列出收费与物品重量的函数关系式.

14. 黄河清淤工作刚刚结束，之后几年，无淤泥的河道将还会逐渐被淤泥所填充，设每年从上游冲下的流沙初始量为常量 P0，且每 m 河床将留下流过泥沙总量的 20%，则通过 nm 后，水中泥沙的遗留量为多少？

第二节　极限的概念

极限的概念是微积分最基本的概念，微积分的其他概念都用极限概念来表达.

极限方法是微积分的最基本的方法，微分法与积分法都借助于极限方法来描述，所以掌握极限的概念与极限的运算是非常重要的了.

极限的概念最初产生于求曲边形的面积与求曲线在某一点的切线斜率这两个基本问题.我国古代数学家刘徽利用圆的内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是用极限思想研究几何问题.刘徽说："割之弥细，所失弥少.割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无失矣."他的这段话是对极限思想的生动描述.

一、数列的极限

定义 1　通俗定义：按自然数的顺序排成的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 就称为数列.

严格定义：若函数 f 的定义域为全体正整数集合 N_+，则称 $f:N_+\to R$ 为数列.

记 $f(n)=a_n$，则数列 $f(n)$ 就可写作为：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为 $\{a_n\}$，即 $\{f(n)\mid n\in N^+\}=\{a_n\}$.

例 1　古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭".把每天余下的部分的长度列出如下(单位为尺)：

第 1 天余下 $\frac{1}{2}$，

第 2 天余下，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$，

第 3 天余下 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^3}$，

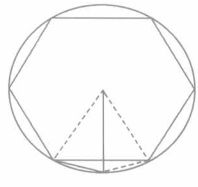
$\vdots$

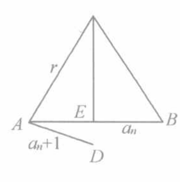
第 n 天余下 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$，

$\vdots$

得到一个数列：$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$.

例 2　三国时期，我国科学家刘徽就提出了"割圆求周"的思想：用直径为 1 的圆周分成六等份，量得圆内接正六边形的周长，再平分各弧量出内接正十二边形的周长，这样无限制的分割下去，就得到一个(内接多边形的周长组成的)数列.





$$DE=r-\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}},r=1\Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2=\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+DE^2=\frac{a_n^2}{4}+(1-\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4}})^2=2-\sqrt{4-a_n^2}$$

我们看到，在例 1 中数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的通项$\frac{1}{2^n}$随着 n 的无限增大而无限地接近于零，我们说当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$以 0 为极限；在例 2 中；随着 n 的无限增大，a_n 无限地接近圆的周长 π. 这正如刘徽所说“割之弥细，所失弥小，割之又割，以之不可割，则与圆合体而无所失矣”. 于是我们有

定义 2　对于数列$\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，a_n 无限地接近某一个常数 a，则称此数列为收敛数列，a 称为它的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，或 $a_n\to a(n\to\infty)$. 不具有这种特性的数列称为发散数列.

据此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. 再如：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})=1$

需要指出的是，上面的定义虽然形象、直观，但不够严密，因为定义中的两个“无限”只是一种定性地描述，不是定量地刻画，(比如：n 大到什么程度才算无限增大？a_n 跟 a 近到什么程度才算无限接近？) 所以，上述定义只是一种“描述性”的说法，并不是严格的定义.

注　并不是任何数列都是有极限的.

例如，数列$\{2n-1\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$都没有极限.

如果当 n 无限增大时，数列$\{a_n\}$不能接近于一个确定的常数，则称数列$\{a_n\}$没有极限，或称数列$\{a_n\}$发散，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

当 n 无限增大时，如果$\{a_n\}$无限增大，则数列没有极限. 这时，习惯上也称数列$\{a_n\}$的极限是无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

例如：$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$；

二、函数的极限

(一) $x\to\infty$的函数 $f(x)$的极限

x 趋向于无穷大可以分为三种情形：

(1) x 趋向于正无穷大，记作 $x\to+\infty$，表示 x 无限增大的过程

(2) x 趋向于负无穷大，记作 $x\to-\infty$，表示 $x<0$ 且$|x|$无限增大的过程

(3) x 趋向于无穷大，记作 $x\to\infty$，表示$|x|$无限增大的过程

以下只给出 $x\to\infty$时函数的极限的概念，

例 3　观察当 $x\to\infty$时函数 $y=\frac{1}{x}$的变化趋势

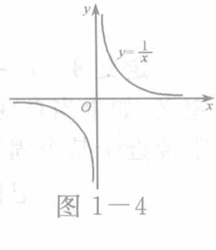


图 1—4

由右图 1—4 可见，当 $x\to\infty$(包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$)时，函数趋向于确定的常数 0，称常数 0 为 $f(x)=\frac{1}{x}$当 $x\to\infty$时的极限.