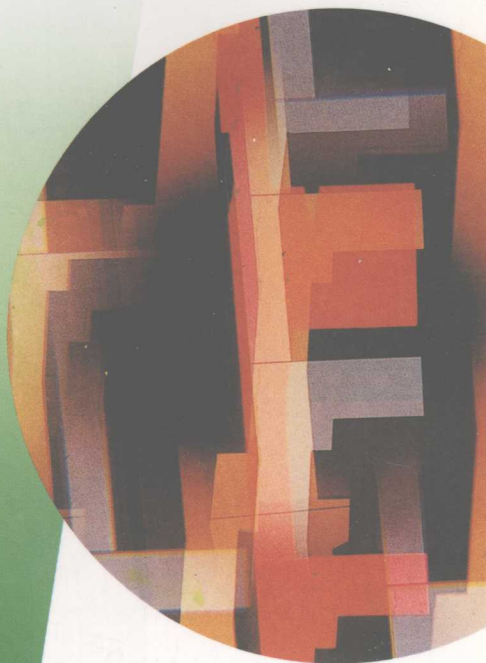


高考应试丛书

高考 数学考点解析



诚邀名校名师
解析考点难题
一套丛书在手
学府任你遨游



辽宁科学技术出版社

北京四中培训部 主编

高考应试丛书

高考数学考点解析

北京四中培训部 主编

辽宁科学技术出版社

• 沈阳 • 30.00元—100.00元

图书在版编目 (CIP) 数据

高考数学考点解析/北京四中培训部主编. -沈阳:辽宁科学技术出版社,1997.8
ISBN 7-5381-2601-5

I. 高… II. 北… III. 数学课-高中-教学参考资料
IV. G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 08604 号

辽宁科学技术出版社出版

(沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001)

沈阳新华印刷厂印刷 辽宁省新华书店发行

开本: 787×1092 1/32 印张: 13 $\frac{3}{4}$ 字数: 302,000
1997 年 8 月第 1 版 1997 年 10 月第 2 次印刷

责任编辑: 符 宁 陈 敏 版式设计: 李 夏
封面设计: 曹太文 责任校对: 素 馨

印数: 20,001—30,000 定价: 13.90 元

高考应试丛书编委会

主 编 赵作义
副 主 编 闻 喜
编 委 (按姓氏笔画为序)

王树森 北京四中历史教研组组长、高级教师

傅以伟 北京四中数学教研组组长、高级教师

李俊和 北京四中外语教研组组长、高级教师

罗保贵 北京四中化学教研组、特级教师

闻 喜 北京四中教学处副处长、高级教师

赵如云 北京四中政治教研组、特级教师

赵作义 北京四中培训部主任

徐克兴 北京四中语文教研组组长、高级教师

陶 澄 北京四中物理教研组组长、高级教师

本 册 主 编 傅以伟

本册编著者 傅以伟 谷 丹 刘 坤 常相舜

肖国友 安东明 赵 康 凌文伟

策 划 符 宁

编写说明

高考是国家重要的考试，是高中毕业生及具有同等学历的莘莘学子进入高等学府的必由之路。高考不仅牵动着中学和高校，也关系着千家万户。准备参加高考的青年朋友，都希望能拥有一套指导自己高考复习和应试的丛书，通过使用这套丛书能明确当年高考各科考试的要点，学会分析思考高考试题，有效提高应试能力，从而顺利地考取自己理想的大学。为此，我们组织北京四中近来连续从事高三各科教学并成功指导高考复习的特级教师、教研组长、学科带头人、高级教师，编写了这套《高考应试丛书》。

近年来，北京四中连续在高中教学和高考中取得优异的成绩。学生高考成绩名列北京市前茅，每年90%以上毕业生考取重点大学，考取清华大学和北京大学这两所名牌大学的学生占毕业生总数的50%以上。这是北京四中教师教学和指导学生高考复习工作中潜心研究考试说明，重视训练思维方法，有效提高解题能力，精心设计模拟试题，熟练驾驭复习节律的结果。这套《高考应试丛书》充分反映了他们在高考复习指导工作中的独具匠心之处，并且精选了他们近几年积累下来的对外不曾交流的各科高考复习教学资料。

这套《高考应试丛书》分《高考语文考点解析》、《高考数学考点解析》、《高考英语考点解析》、《高考物理考点解析》、《高考化学考点解析》、《高考历史考点解析》和《高考

政治考点解析》七册。

《高考数学考点解析》为《高考应试丛书》之一。作者根据国家教委考试中心颁布的《考试说明》，将数学高考的内容按教材体系分为十三章，每章分若干单元，每单元含若干个考点。列出考点后，通过对典型例题的解析（对具体解题过程的分析与解答）与说明（解这类例题常用方法的总结或应注意问题的提示），体现对基本知识、基本方法和基本能力复习指导，对考生应试中容易出现错误和疑点给予充分的剖析。这里集中了作者多年指导高考复习经验的精华，信息准确，指导性强。每单元后均有经过反复推敲和精心筛选的自测题，这些题目科学性强，可信度高，信息量大。自测题的答案集中的放在每章后。书后附两套高考模拟试题，在模拟题的题型、结构、难度、侧重点、风格等方面，追求与高考命题的逼近，体现预测性。

愿本书能为广大高中生提供帮助，亦希望读者对本书的不足之处提出意见。

编者

目 录

第一章 幂函数 指数函数 对数函数	1
一、集合	1
自测题 (一)	4
二、函数概念	4
自测题 (二)	9
三、幂函数	10
自测题 (三)	15
四、反函数	16
自测题 (四)	18
五、指数函数和对数函数	19
自测题 (五)	28
自测题参考答案	31
第二章 三角函数	34
一、任意角的三角函数	34
自测题 (一)	40
二、三角函数的图像和性质	43
自测题 (二)	51
自测题参考答案	55
第三章 两角和与差的三角函数	62
自测题	78
自测题参考答案	84

第四章 反三角函数和简单三角方程	89
一、反三角函数	89
自测题 (一)	97
二、简单的三角方程	100
自测题 (二)	104
自测题参考答案	107
第五章 不等式	113
一、不等式的概念和性质	113
自测题 (一)	115
二、不等式的解法	117
自测题 (二)	128
三、不等式的证明	129
自测题 (三)	141
四、不等式的综合应用	143
自测题 (四)	155
自测题参考答案	157
第六章 数列 极限 数学归纳法	162
一、等差数列与等比数列	162
自测题 (一)	168
二、数列的极限	172
自测题 (二)	175
三、数学归纳法	177
自测题 (三)	185
自测题参考答案	186
第七章 复数	192
一、复数的概念	192
自测题 (一)	193

二、复数的运算	194
自测题 (二)	204
自测题参考答案	208
第八章 排列 组合 二项式定理	211
一、加法原理与乘法原理	211
自测题 (一)	212
二、排列 排列数公式	212
自测题 (二)	214
三、组合 组合数公式 组合数的两个性质	214
自测题 (三)	217
四、二项式定理	219
自测题 (四)	222
自测题参考答案	224
第九章 直线和平面	227
一、平面	227
自测题 (一)	229
二、空间两条直线	229
自测题 (二)	232
三、直线和平面 的位置关系	233
自测题 (三)	239
四、两个平面的位置关系	240
自测题 (四)	245
第九章综合自测题	246
自测题参考答案	252
第十章 多面体和旋转体	263
一、多面体	263
自测题 (一)	268

二、旋转体	269
自测题(二)	271
三、多面体和旋转体的体积	272
自测题(三)	279
四、本章综合	280
第十章综合自测题	284
自测题参考答案	290
第十一章 直线	298
一、有向线段 定比分点 直线方程	298
自测题(一)	305
二、两条直线的位置关系	306
自测题(二)	317
三、直线与点的位置关系	318
自测题(三)	330
自测题参考答案	332
第十二章 圆锥曲线	334
一、曲线与方程	334
自测题(一)	338
二、圆	340
自测题(二)	352
三、椭圆	354
自测题(三)	368
四、双曲线	372
自测题(四)	381
五、抛物线	383
自测题(五)	388
六、坐标轴的平移	389

自测题（六）	395
自测题参考答案	396
第十三章 极坐标与参数方程	399
自测题	403
自测题参考答案	405
附录 高考模拟试题	406
模拟试题（一）	406
模拟试题（二）	410
高考模拟试题参考答案	414

第一章 幂函数 指数函数 对数函数

一、集 合

考点 1 集合

考点 2 子集 交集 并集 补集

例 1 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 4, 5\}$, 求 $\overline{M} \cap B$ 和 $\overline{M \cup N}$.

解析 由补集定义知 $\overline{M} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin M\} = \{2, 5\}$, 再由交集定义可得 $\overline{M} \cap B = \{2, 5\}$.

求 $\overline{M \cup N}$ 可先求 $M \cup N$, 再求补集, 或由性质 $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ 均可得出正确结果: $\overline{M \cup N} = \Phi$

例 2 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 令 $x = S \cap T$, 那么 $S \cup x$ 等于 ().

(A) X (B) T (C) Φ (D) S

(1987 年全国高考理科试题)

解析 可画图 (图 1-1) 分析. 由已知 S, T 非空, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S, X = S \cap T$

$\therefore X \cup S = S$, 故选 (D).

例 3 数集 $x = \{(2n+1)\pi, N \in \mathbb{Z}\}$, $y = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 则 x, y 之间的关系是 ().

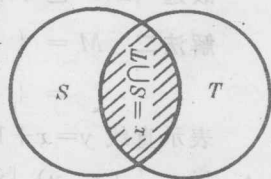


图 1-1

(A) $x \subset y$ (B) $x \supset y$ (C) $x = y$ (D) $x \neq y$

解析 $\because 2n+1$ ($n \in Z$) 表示任意奇数

$4k \pm 1$ ($k \in Z$) 也表示任意奇数 (用整数被 4 除的余数只有 0, 1, 2, 3 四类, 而余数为 0, 2 的整数偶数, $4k+1$ 余数为 1, $4k-1$ 余数为 3)

$$\therefore \{ (2n+1) \pi, n \in Z \} = \{ (4k \pm 1) \pi, k \in Z \}$$

故选 (C).

例 4 设全集 $I = \{ (x, y) \mid x, y \in R \}$

$$M = \{ (x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1 \}$$

$N = \{ (x, y) \mid y \neq x+1 \}$ 那么 $\overline{M \cup N}$ 等于 ().

(A) Φ

(B) $\{ (2, 3) \}$

(C) $(2, 3)$

(D) $\{ (x, y) \mid y = x+1 \}$

解析 解法一

$$\overline{M \cup N} = \overline{M \cap \overline{N}}$$

$$= \overline{\{ (x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1 \} \cap \{ (x, y) \mid y = x+1 \}}$$

$$= \overline{\{ (x, y) \mid y = x+1, x \neq 2 \} \cap \{ (x, y) \mid y = x+1 \}}$$

$$= \{ (x, y) \mid y = x+1, x = 2 \}$$

$$= \{ (2, 3) \}$$

故选 (B). 也可用数形结合的办法来解.

$$\text{解法二 } M = \{ (x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1 \}$$

$$= \{ (x, y) \mid y = x+1 \text{ 且 } x \neq 2 \}$$

表示直线 $y = x+1$ 去掉点 $(2, 3)$ 的部分.

$N = \{ (x, y) \mid y \neq x+1 \}$ 表示 XOY 平面上直线 $y = x+1$ 外的点集.

$\therefore M \cup N$ 表示 XOY 平面上除点 $(2, 3)$ 以外的区域 (见

图 1-2)

$$\therefore \overline{M \cup N} = \{ (2, 3) \}$$

说明 此题考查了并、补集概念, 元素和集合的概念及方程和不等式的几何意义, 要注意答案 (C) 和 (B) 的区别: $(2, 3)$ 表示一个点, 而 $\{ (2, 3) \}$ 是以点 $(2, 3)$ 为元素的点集. $\overline{M \cup N}$ 表示点集, 所以不能选 (C).

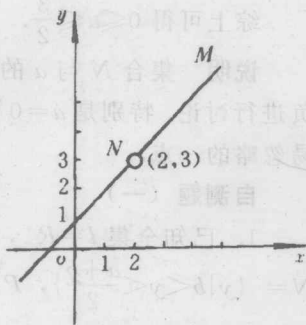


图 1-2

例 5 已知集合 $M = \{x, xy, \lg xy\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 且 $M = N$, 求 x, y .

解析 由 $M = N$, $\therefore 0 \in M$. 若 $x = 0$ 则 $xy = 0$, 由集合中元素的互异性知这不可能, $\therefore$ 只有 $\lg xy = 0$, $\therefore xy = 1$. 再由 $M = N$, $\therefore |x| = 1$ 或 $y = 1$. 若 $y = 1$, 则 $x = 1$, 这也不行, $\therefore$ 只能 $|x| = 1$, 且 $x \neq 1$, $\therefore x = -1$, $y = -1$.

例 6 已知集合 $M = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $N = \{x | x^2 - ax - 6a^2 < 0\}$, 若 $M \cap N = \Phi$, 求实数 a .

解析 $x^2 - ax - 6a^2 < 0$

①当 $a = 0$ 时, 不等式无解, $\therefore N = \Phi$, 结论成立, 化简 $M = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

②若 $a > 0$ 时, $N = (-2a, 3a)$, 若 $M \cap N = \Phi$, 则必须

$$\begin{cases} -2a \geq -3 \\ 3a \leq 5 \end{cases} \quad \text{即} \quad a \leq \frac{3}{2}.$$

③若 $a < 0$ 时, $N = (3a, -2a)$, 若 $M \cap N = \Phi$, 则

$$\begin{cases} 3a \geq -3 \\ -2a \leq 5 \end{cases} \quad \text{无解}$$

综上可得 $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

说明 集合 N 与 a 的取值有关, 因此应对 a 取 0 或正、负进行讨论. 特别是 $a=0$ 时 $N=\Phi$, 显然 $M \cap N = \Phi$, 这是容易忽略的一点.

自测题 (一)

1. 已知全集 $I=R^+$, $a>b>0$, $M=\{x|\sqrt{ab}<x<a\}$, $N=\{y|b<y<\frac{a+b}{2}\}$, $P=\{z|b<z\leq\sqrt{ab}\}$, 则 ().

(A) $P=M \cap N$

(B) $P=M \cap \bar{N}$

(C) $P=\bar{M} \cap N$

(D) $P=\bar{M} \cup N$.

2. 已知集合 $A=[-2, 5)$, $B=\{x|x>a\}$, 求 $A \cap B$.

3. 已知集合 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$, 且 $A \cap B=\{2, 5\}$, 求实数 a , 及 $A \cup B$.

4. 设 $A=\{x|2x^2-px+q=0\}$

$$B=\{x|16x^2+(p+2)x+1=0\} \text{ 且 } A \cup B=\{\frac{1}{2}\},$$

求 $A \cup B$.

二、函数概念

考点 3 映射

考点 4 函数 (函数记号、定义域、值域)

例 1 已知 $A=\{1, 2, 3, k\}$, $B=\{4, 7, a^4, a^2+3a\}$, 且 $a, k \in N$, 若 $x \in A$, $y \in B$, $f: x \rightarrow y=3x+1$, 是从 A 到 B 的一个映射, 求 a 和 k .

解析 由映射定义知, A 中每一元素, 在 B 中存在唯一

的元素与之对应.

由已知显然 $1 \xrightarrow{f} 4, 2 \xrightarrow{f} 7$.

则有 $3 \rightarrow a^4$ 或 $3 \rightarrow a^2 + 3a$.

若 $3 \rightarrow a^4$, 则 $a^4 = 3 \times 3 + 1$, 显然 $a \notin N$.

若 $3 \rightarrow a^2 + 3a$ 即 $a^2 + 3a = 3 \times 3 + 1$ 解之得 $a = 2$ 或 -5 ,
显然 $-5 \notin N, \therefore a = 2$.

此时 $a^4 = 16, 16 = 3k + 1 \therefore k = 5$,

综上, 得 $a = 2, k = 5$

例 2 求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$$

$$(2) y = \log_4 (x^2 - 2x - 3)$$

$$(3) y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 7x + 10}{3 - x}$$

$$(4) y = \sqrt{1 - a^x} \quad (0 < a < 1)$$

解析 求函数定义域时, 应先列出使函数有意义的 x 所满足的不等式组, 解之即得.

$$\text{其中 (1) } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } [-4, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 > 0, \text{ 得 } (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$(3) \frac{x^2 - 7x + 10}{3 - x} > 0, \text{ 得 } (-\infty, 2) \cup (3, 5)$$

$$(4) 1 - a^x \geq 0, \text{ 得 } [0, +\infty)$$

例 3 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1, 3]$, 求 $f(x^2 - 1)$ 的定义域.

解析 由函数记号, 及 $f(x)$ 定义域为 $(0, 1)$ 可知 $1 < x^2 - 1 \leq 3$, 解之可得定义域为 $[-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$.

说明 这是一个已知函数定义域, 求复合函数的定义域问题.

下面的解法，显然是错误的。

由 $x \in (1, 3]$ 得 $x^2 \in (1, 9]$, $\therefore x^2 - 1 \in (0, 8]$.

例 4 求下列函数的值域

$$(1) y = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$(2) y = 2x^2 - 3x - 1$$

$$(3) y = 1 - \sqrt{3-2x-x^2} \quad (4) y = \frac{1}{x^2+x+1}$$

解析 本题中几个小题均可通过变形函数式并利用实数的基本性质可解决问题，其方法是：

$$(1) y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3(x+2)-7}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+2}.$$

其中 $\frac{7}{x+2} \neq 0$, $\therefore \{y | y \neq 3\}$.

(2) $y = 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{17}{8}$, $x = \frac{3}{4}$ 时, $y_{\min} = -\frac{17}{8}$, $\therefore$ 值域为 $[-\frac{17}{8}, +\infty)$

(3) $y = 1 - \sqrt{-(x-1)^2+4}$, $0 \leq \sqrt{-(x-1)^2+4} \leq 2$, $\therefore$ 值域为 $[-1, 1]$

(4) $y = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$, 且 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{4}{3}$, $\therefore$ 值域为 $(0, \frac{4}{3}]$

例 5 求下列函数的值域

$$(1) y = \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \quad x \in [2, 3]$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 1 \quad ① x \in [-2, 0] \quad ② [-2, 3]$$

$$(3) y = x + \frac{1}{x}, \quad x \in [\frac{1}{2}, 4].$$

解析 (1) 函数为单调减函数，只需将给定区间的边界值代入，即可得出值域为 $(-2, 0]$