高考必备·圆梦经典

2010XINKEBIAOGAOKAO

2010新课标高考

主编 杨泽忠

大学直通车

高效复习方略

高考一轮复习

数学

人教A版

（文科）

青岛出版社

Contents 目录

高效复习方略

目录 Contents

高效复习方略

第一单元　集合与简易逻辑

单元复习导引

考纲要求

1. 集合

(1) 了解集合的含义,元素与集合的“属于关系”.

(2) 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

(3) 理解集合之间的包含和相等的含义,能识别给定集合的子集.

(4) 在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(5) 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

(6) 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

(7) 能用 Venn 图表示集合的关系及运算.

2. 常用逻辑用语

(1) 了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题.

(2) 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系.

(3) 了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.

(4) 理解全称量词与存在量词的意义.

(5) 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

复习建议

1. 本章知识特点

集合与常用逻辑用语是高中数学中最基本的知识,是学好其他章节的基础,是数学推理与表达的重要工具. 同时又较为抽象,概念多,逻辑性较强,需准确、全面地理解概念、应用概念,以课本为主,打好基础,不要做一些偏、难、怪的题目,应先理解概念,熟悉定义,再适当增加练习量.

2. 注意集合中元素的三性,不要忽视空集

掌握集合中元素的确定性、互异性、无序性是正确解决有关集合问题的重要一环;在考查两个集合之间的关系时,不要忘记空集“$\varnothing$”.

3. 解决集合问题时要重视转化、数形结合和分类讨论思想方法的运用

对于已知两集合间的关系,求参数满足的条件,应将集合化简并转化为方程或不等式的问题求解;用数轴或Venn图来表示集合间的关系会使抽象的概念变得非常直观,有助于我们对问题的理解,这也体现了数形结合思想的运用;对含参数的集合问题,多根据集合元素的互异性处理;有时需要用到分类讨论、数形结合等思想方法.

4. 要注意逻辑联结词“或”、“且”、“非”与集合中的“并”、“交”、“补”是相关的,二者相互对照可加深认识和理解.

5. 复习逻辑知识时,要抓住所学的几个知识点,通过解决一些简单的问题达到理解和掌握逻辑知识的目的.

6. 集合多与函数、方程和不等式有关,要注意知识的融会贯通.

第一节 集合与集合运算

知识系统构建

知识整合

1. 集合

(1) 指定的对象的全体构成一个集合，其中每个对象叫做这个集合的元素，集合中的元素具有________、________、________三个特性.

(2) 根据集合中元素的多少，集合可以分为________、________和________.

(3) 符号"∈"，"∉"表示元素和集合之间的关系.

(4) 我们规定，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

特别提醒：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是确定的；集合中的任何两个元素都是不同的对象（或者说是互异的）；而相同的对象归入同一个集合时只能算作集合中的一个元素.

2. 集合的表示方法

集合有三种表示方法，分别是________、________和________. 它们各有优缺点，用什么方法表示集合，要具体问题具体分析.

3. 集合的关系

(1) 子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$）$\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

子集有如下性质：

$A \subseteq A, \varnothing \subseteq A$（$A$ 为任一集合）.

(2) 两集合相等：对于两个集合 A 与 B，如果__________，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

(3) 真子集：若__________，则集合 A 是 B 的真子集，记为 $A \subsetneqq B$.

空集（$\varnothing$）是任何非空集合 A 的真子集（$\varnothing \subsetneqq A$）.

4. 集合的运算

(1) 交集

① 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，即 $A \cap B =$__________.

② $A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B = B \cap A, A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(2) 并集

① 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B =$__________.

② $A \cup A = A, A \cup \varnothing = A, A \cup B = B \cup A, A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(3) 补集

已知集合 $A \subseteq S$，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合，叫做集合 S 中子集 A 的补集，记为 $\complement_S A$. 如图 1-1-1 所示的阴影部分.

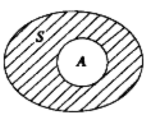


图 1-1-1

双基检测

1.（2009·烟台高三期末）已知集合 $P = \{0, b\}, Q = \{x \mid x^2 - 3x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$，若 $P \cap Q \neq \varnothing$，则 b 等于（　　）

A. 1 或 2　　B. 2　　C. 1　　D. 8

2.（广东省中山一中 2008—2009 学年度高三第一次统测）集合 $A = \{a, b\}$ 的真子集的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 如图 1-1-2，U 是全集，M, P, S 是 U 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是（　　）

A. $(M \cap P) \cap S$

B. $(M \cap P) \cup S$

C. $(M \cap P) \cap (\complement_U S)$

D. $(M \cap P) \cup (\complement_U S)$

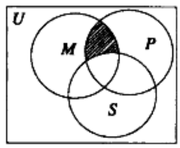


图 1-1-2

4. 下列四个命题：

① 集合 $\mathbf{N}$ 中的最小元素是 1；

② 若 $-a \notin \mathbf{N}$，则 $a \in \mathbf{N}$；

③ 若 $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$，则 $a + b$ 的最小值为 2；

④ $x^2 + 4 = 4x$ 的解集可以表示为 $\{2, 2\}$.

其中正确命题的个数是（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

5.（浙江省龙港高中、瑞安十中、鳌江中学三校 2009 届高三第一次联考）函数 $M = \{y \mid y = \ln(x^2 + 1), x \in \mathbf{R}\}, N = \{x \mid 2^x < 2, x \in \mathbf{R}\}$，则 $M \cap N$ 等于（　　）

A. $[0, +\infty)$　　B. $[0, 1)$　　C. $(1, +\infty)$　　D. $(0, 1]$

6.（2008·青岛高三质量检测）对于集合 M, N，定义 $M - N = \{x \mid x \in M$，且 $x \notin N\}$，$M \oplus N = (M - N) \cup (N - M)$，设 $A = \{t \mid t = x^2 - 3x, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x \mid y = \lg(-x)\}$，则 $A \oplus B$ 等于（　　）

A. $\left(-\frac{9}{4}, 0\right]$

B. $\left[-\frac{9}{4}, 0\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{9}{4}\right] \cup [0, +\infty)$

D. $\left(-\infty, -\frac{9}{4}\right] \cup (0, +\infty)$

7. 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m - 1\}$，集合 $B = \{3, m^2\}$，若 $B \subseteq A$，则实数 $m =$________.

8. 已知集合 $A = \left\{x, \frac{y}{x}, 1\right\}, B = \{x^2, x + y, 0\}$，若 $A = B$，则 $x^{2009} + y^{2009} =$________，$A = B =$________.

题型归纳探究

题型归纳

题型一　集合的基本概念

例1　已知集合 $M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$,

$N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$,

$P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$,

则 M,N,P 满足的关系是（　　）

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P=M$

【思路精析】　先对给出的集合进行化简，确定出集合中含有的元素或元素特征，再对集合间的关系进行判断.

题型二　集合语言的应用

例2　已知集合 $P=\{p\mid x^2+2(p-1)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，求一次函数 $y=2x-1,x\in P$ 的取值范围.

【思路精析】　由集合 P 是数的集合，元素 p 的取值范围是由二次方程 $x^2+2(p-1)x+1=0$ 有实根来确定. 因知函数定义域是集合 P，所以求 $y=2x-1$ 的值域可由函数的单调性来完成.

题型三　自定义型的集合运算

例3　非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足：(1) 对任意的 $a,b\in G$，都有 $a\oplus b\in G$，(2) 存在 $e\in G$，使得对一切 $a\in G$ 都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$，则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”. 现给出下列集合和运算：

①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$ 为整数的加法；

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$ 为整数的乘法；

③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$ 为平面向量的加法；

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的有哪些，并说明理由.

【思路精析】　充分理解“融洽集”的概念要求，而后将①②③逐一验证是否符合条件即可.

【解】　①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$ 为整数的加法.

∵ 任意两个非负整数的和仍为非负整数，且存在 $e=0$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus 0=0\oplus a=a$，

∴① 符合 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”；

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$ 为整数的乘法.

∵ 任意两个偶数的乘积仍是偶数，但不存在偶数 $e\in G$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$ 成立，

∴② 不符合 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”；

③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$ 为平面向量的加法.

∵ 任意两个向量之和仍为向量，且存在 $\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$，使得对一切 $\boldsymbol{a}\in G$ 都有 $\boldsymbol{a}\oplus\mathbf{0}=\mathbf{0}\oplus\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，

∴③ 符合 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”.

【总结反思】　新型集合的概念及运算问题是近几年新课标高考的热点问题. 在给出新的运算法则的前提下，充分利用已知求解是关键. 集合命题中与运算法则相关的问题，是对映射构建下的集合与集合、元素与元素间的运算相关性及封闭性的研究.

题型四　集合中参数的范围

例4　已知集合 $A=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$，$B=\{x\mid (x-a)\cdot(x-3a)<0\}$.

(1) 若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(3) 若 $A\cap B=\{x\mid 3<x<4\}$，求 a 的取值范围.

【思路精析】　此题主要考查集合间的包含关系、集合运算、分类讨论等基础知识，考查运算，分析问题、解决问题的能力.

题型五 集合运算的综合应用

例 5 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4ax+2a+6=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x<0\}$；若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【思路精析】 由 $A\cap B\neq\varnothing$ 可知，方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 的实数根组成非空集合，并且此方程至少有一负根，即有两个负根、一负根一零根、一负根一正根三种情况，分别求比较麻烦，我们可以从反面考虑，先求出方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 有实数根的全集 U，然后考虑方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 两根均非负时 a 的取值范围，最后利用补集求解.

跟踪演练

1. 集合 $P=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，若 $a\in P$，$b\in Q$，则有 ( )

A. $a+b\in P$　　B. $a+b\in Q$

C. $a+b\in R$　　D. 以上都不对

2. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2) 若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

3. 集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，那么 S 中无"孤立元素"的 4 元素子集的个数为 ( )

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

4. 已知集合 $A=\{x\mid \frac{6}{x+1}\geqslant 1,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-2x+2m<0\}$.

(1) 若 $A\cap B=\{x\mid -1<x<4\}$，求 m；

(2) 若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

5. 已知集合 $A=\{x\mid 0<ax+1\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid -\frac{1}{2}<x\leqslant 2\}$.

(1) 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围；

(3) A，B 能否相等？若能，求出 a 的值；若不能，试说明理由.

规律总结

1. 解答集合问题时，通常将集合语言与图形语言进行互化. 如对元素为离散型的集合通常转化为 Venn 图，对元素为连续型集合通常转化到数轴上，又往往借助函数图象进行思考.

2. 对于 $A\subseteq B$，一般要分 $A=\varnothing$ 与 $A\neq\varnothing$ 讨论.

3. 集合的几种等价形式

(1) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(2) $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$；

(3) $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$；

(4) $A\cap B\supsetneqq\varnothing\Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

4. 在解决 $A\cap B\neq\varnothing$ 问题时，可以利用补集思想，先研究 $A\cap B=\varnothing$ 的情况，然后取补集.

5. 含参数的集合问题，多根据集合中元素的互异性处理，有时需要用到分类讨论、数形结合的思想.

优化训练设计

一、选择题

1.(2009·潍坊期末)若集合 $M=\{a,b,c\}$ 中的元素是 $\triangle ABC$ 的三边长,则 $\triangle ABC$ 一定不是　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

2.已知命题:

①{偶数} $=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$;

② $\sin 30^\circ\in\mathbf{Q}$;

③ $\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{N}\}=\{-2,-1,0,1,2\}$;

④ $\{(x,y)\mid x+y=3$,且 $x-y=1\}=\{1,2\}$.

其中正确的个数为　(　　)

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

3.设 P 和 Q 是两个集合,定义集合 $P-Q=\{x\mid x\in P$,且 $x\notin Q\}$,若 $P=\{x\mid \log_2 x<1\}$,$Q=\{x\mid |x-2|<1\}$,那么 $P-Q$ 等于　(　　)

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

4.(上海复旦附中2008—2009学年度高三12月月考)设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{2,3,4\}$,则 $A\cap \complement_U B$ 等于　(　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

5.(山东莱芜2009第一次质检)集合 $A=\{y\in\mathbf{R}\mid y=\lg x,x>1\}$,$B=\{-2,-1,1,2\}$,则下列结论正确的是　(　　)

A. $A\cap B=\{-2,-1\}$　　B. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=(-\infty,0)$

C. $A\cup B=(0,+\infty)$　　D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{-2,-1\}$

6.(广东省东莞2009届10月月考)已知全集 $I=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid |x-1|>2\}$,$B=\{x\mid \log_2 x<3\}$,则 $(\complement_I A)\cap B$ 为　(　　)

A. $\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$　　B. $\{x\mid 3\leqslant x<8\}$

C. $\{x\mid x<8\}$　　D. $\{x\mid x>3\}$

7.(2008·广东)第二十九届夏季奥林匹克运动会于2008年8月8日在北京举行.若集合 $A=$ {参加北京奥运会比赛的运动员},集合 $B=$ {参加北京奥运会比赛的男运动员},集合 $C=$ {参加北京奥运会比赛的女运动员},则下列关系正确的是　(　　)

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq C$

C. $A\cap B=C$　　D. $B\cup C=A$

8.(山东省济南一中2009届高三11月月考)定义集合运算:$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$,设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 的所有元素之和为　(　　)

A. 0　B. 2　C. 3　D. 6

二、填空题

9.设集合 $A=\{x\mid (x-1)^2<3x+7,x\in\mathbf{R}\}$,则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中有________个元素.

10.(2008·上海)若集合 $A=\{x\mid x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$,则实数 $a=$________.

11.(2008·福建)设 P 是一个数集,且至少含有两个数,若对任意 a、$b\in P$,都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}\in P$(除数 $b\neq 0$),则称 P 是一个数域.例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域.有下列命题:

① 数域必含有0,1两个数;

② 整数集是数域;

③ 若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$,则数集 M 必为数域;

④ 数域必为无限集.

其中正确的命题的序号是________.(把你认为正确的命题的序号都填上)

12.(安徽省合肥市2009届高三第三次质检)已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 1\}$,$N=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$,则 $M\cap N$ 等于________.

三、解答题

13.集合 $S=\{x\mid x\leqslant 10$,且 $x\in\mathbf{N}_+\}$,$A\subsetneqq S$,$B\subsetneqq S$,且 $A\cap B=\{4,5\}$,$(\complement_S B)\cap A=\{1,2,3\}$,$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\{6,7,8\}$.求集合 A 和 B.

14.已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$ 和 $B=\{(x,y)\mid x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

15.已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x-4=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中有两个元素,求实数 a 的取值范围;

(2) 若 A 中至多有1个元素,求实数 a 的取值范围.

16.已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid \frac{6}{x+1}\geqslant 1\}$,集合 $B=\{x\mid x^2-2x-m<0\}$.

(1) 当 $m=3$ 时,求 $A\cap\complement_U B$;

(2) 若 $A\cap B=\{x\mid -1<x<4\}$,求 m 的值.

第二节　简易逻辑

知识系统构建

知识整合

1. 命题

命题是____________________.

2. 量词

(1) 短语"所有"在陈述句中表示所述事物的全体,逻辑中通常叫做________量词,并用符号"$\forall$"表示,含有全称量词的命题,叫做全称命题.

(2) 短语"有一个"或"有些"或"至少有一个"在陈述句中表示事物的个体或部分,逻辑中通常称为________量词,并用符号"$\exists$"表示,含有________的命题,叫做特称命题.

(3) 复合命题:由简单命题和逻辑联结词"或"、"且"、"非"构成的命题是复合命题,它们有以下几种形式:____________.

(4) 真值表:表示命题真假的表.

请填写下面的真值表:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$
真	真			
真	假			
假	真			
假	假			

(5) 特称命题 p:$\exists x \in A, p(x)$;它的否定是 $\neg p$:____________________;

全称命题 q:$\forall x \in A, q(x)$;它的否定是 $\neg q$:__________.

双基检测

1.(2009·济宁高三期末)已知命题 p:$\forall x \in \mathbf{R}, \cos x \leqslant 1$,则 (　　)

A. $\neg p$:$\exists x \in \mathbf{R}, \cos x \geqslant 1$

B. $\neg p$:$x \in \mathbf{R}, \cos x \geqslant 1$

C. $\neg p$:$\exists x \in \mathbf{R}, \cos x > 1$

D. $\neg p$:$x \in \mathbf{R}, \cos x > 1$

2.(2009·潍坊一模)下列结论错误的是 (　　)

A. 命题"若 p,则 q"与命题"若 $\neg q$,则 $\neg p$"互为逆否命题

B. 命题"$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$"的否定是"$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leqslant 0$"

C. 命题"直棱柱每个侧面都是矩形"为真

D."若 $am^2 < bm^2$,则 $a < b$"的逆命题为真

3. 下列判断:

① 命题"若 q,则 p"与命题"若 $\neg p$,则 $\neg q$"互为逆否命题;

②"$am^2 < bm^2$"是"$a < b$"的充要条件;

③"平行四边形的对角相等"的否命题;

④ 命题"$\varnothing \subseteq \{1,2\}$ 或 $\varnothing \in \{1,2\}$"为真.

其中正确命题的序号为____________.

4. 已知命题 p:$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$,命题 q:$\exists x \in \mathbf{R}, \sin x + \cos x = \sqrt{2}$,则下列判断正确的是 (　　)

A. p 是真命题　　B. q 是假命题

C. $\neg p$ 是假命题　　D. $\neg q$ 是假命题

5. 命题"$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$"的否定是____________;"奇数是质数"的否定是________________;"至少有一个质数是奇数"的否定是________________________.

题型归纳探究

题型归纳

题型一　命题的判断

例 1　判断下列语句是否是命题,若是,判断其真假,并说明理由.

(1) 垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

(2) 一个数不是合数就是质数.

(3) 大角所对的边大于小角所对的边.

(4) $x + y$ 是有理数,则 x, y 也都是有理数.

(5) 求证:$x \in \mathbf{R}$,方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 无实数根.

【思路精析】 语句是否为命题,关键看是否能判断其真假.

题型二　命题的否定形式

例 2　写出下列命题的否定并判断真假.

(1)p:所有末位数字是 0 的整数都能被 5 整除;

(2)q:$\forall x \geqslant 0, x^2 > 0$;

(3)r:存在一个三角形,它的内角和大于 $180°$;

(4)t:某些梯形的对角线互相平分.

【思路精析】 ① 这几个命题中,(1)(2) 是全称命题,(3)(4) 是特称命题;② 全称命题的否定是特称命题,特称命题的否定是全称命题.

【解】 (1)$\neg p$:存在一个末位数字是 0 的整数不能被 5 整除,假命题.

(2)$\neg q$:$\exists x \geqslant 0, x^2 \leqslant 0$,真命题.

(3)$\neg r$:所有三角形的内角和都小于等于 $180°$,真命题.

(4) $\neg t$:每一个梯形的对角线都不互相平分,真命题.

【总结反思】(1)对一个命题的否定是全部否定,而不是部分否定.在对一个全称命题进行否定时,要特别注意有些命题可能省略了全称量词.

例如:实数的绝对值是正数,它的否定应是:存在一个实数,它的绝对值不是正数,而不能写成:实数的绝对值不是正数.

(2)要判断"$\neg p$"的真假,可以直接判断,也可以判断 p 的真假,利用 p 与 $\neg p$ 的真假相反判断.

题型三　特称命题、全称命题

例 3　下列命题中,是特称命题并且是真命题的是________(填代号).

① 如果直线 a 在平面 α 内,那么直线 a 上的所有点都在 α 内;

② 如果直线 a 上有两点在 α 内,那么直线上的所有点都在 α 内;

③ 如果直线 a 上有两点到 α 的距离相等,那么直线 $a\parallel\alpha$.

【思路精析】要判断一个命题是特称命题,也就是看是否含有存在量词.

题型四　逻辑联结词的应用

例 4　已知 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根,q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.若"$p\vee q$"为真,"$p\wedge q$"为假,求 m 的取值范围.

【思路精析】根据 p,q 的真假性,列出方程组,求 m 的范围.

跟踪演练

1. 不同直线 m,n 和不同平面 α,β,给出下列命题:

①$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ m\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\parallel\beta$;　　②$\left.\begin{matrix}m\parallel n\\ m\parallel\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow n\parallel\beta$;

③$\left.\begin{matrix}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow m,n$ 异面;　　④$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ m\parallel\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\perp\beta$.

其中假命题有　(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 已知命题 p:方程 $x^2-4=0$ 的两根都是实数,q:方程 $x^2-4=0$ 的两根相等.试分别写出"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"的形式,并判断它们的真假.

3. 下列命题中,是全称命题并且是真命题的是　(　　)

A. 菱形的四条边都相等

B. 若 $2x$ 为偶数,则 $x\in\mathbf{N}$

C. 对 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+1>0$

D. π 是无理数

4. 若"p 且 q"与"$\neg p$ 或 q"均为假命题,则　(　　)

A. p 真 q 假　　B. p 假 q 真

C. p 与 q 均真　　D. p 与 q 均假

规律总结

1. 三种复合命题的真假判断

(1) $p\vee q$:p,q 一真必真,两假才假;

(2) $p\wedge q$:p,q 一假必假,两真才真;

(3) $\neg p$:与 p 真假相反.

2. 命题的否定

(1) p:$\forall x,p(x)$　　$\neg p$:$\exists x,\neg p(x)$;

(2) p:$\exists x,p(x)$　　$\neg p$:$\forall x,\neg p(x)$;

(3) s:$p\vee q$　　$\neg s$:$(\neg p)\wedge(\neg q)$;

(4) s:$p\wedge q$　　$\neg s$:$(\neg p)\vee(\neg q)$;

(5) s:$\neg p$　　$\neg s$:p;

(6) s:若 p,则 q　　$\neg s$:若 p,则 $\neg q$.

(7) 常见关键词的否定

正面词语	等于	大于(>)	小于(<)	是	都是	至多有一个
否定	不等于	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是	至少有两个

正面词语	至少有一个	任意的	所有的	至多有 n 个	任意两个
否定	一个都没有	某个	某些	至少有 $n+1$ 个	某两个

优化训练设计

一、选择题

1.(2009·青岛高三质量检测)命题"存在 $x\in\mathbf{Z}$,使 $x^2+2x+m\leqslant 0$"的否定是 ( )

A. 存在 $x\in\mathbf{Z}$,使 $x^2+2x+m>0$

B. 不存在 $x\in\mathbf{Z}$,使 $x^2+2x+m>0$

C. 任意 $x\in\mathbf{Z}$,$x^2+2x+m\leqslant 0$

D. 任意 $x\in\mathbf{Z}$,$x^2+2x+m>0$

2.(2009·泰安期末)已知命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+x+1>0$.下列结论中正确的是 ( )

A. 命题"$p\wedge q$"是真命题

B. 命题"$p\wedge\neg q$"是真命题

C. 命题"$\neg p\wedge q$"是真命题

D. 命题"$\neg p\vee\neg q$"是假命题

3."三个数 a,b,c 不全为0"的否定是 ( )

A. a,b,c 都不是0　　B. a,b,c 至多一个是0

C. a,b,c 至少一个是0　　D. a,b,c 都为0

4.已知 p:若 $a\in A$,则 $b\in B$,那么 $\neg p$ 是 ( )

A. 若 $a\in A$,则 $b\notin B$　　B. 若 $a\notin A$,则 $b\notin B$

C. 若 $b\notin B$,则 $a\notin A$　　D. 若 $b\in B$,则 $a\in A$

5.如果命题"$\neg p\vee\neg q$"是假命题,则在下列结论中,正确的是 ( )

① 命题"$p\wedge q$"是真命题;② 命题"$p\wedge q$"是假命题;③ 命题"$p\vee q$"是真命题;④ 命题"$p\vee q$"是假命题.

A. ①③　B. ②④　C. ②③　D. ①④

6.下列命题的"非"是真命题的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2\sqrt{2}x+2\geqslant 0$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$,$3x-5=0$

C. 一切分数都是有理数

D. 对于任意的实数 a,b,方程 $ax=b$ 都有唯一解

7.下列各组命题中,满足"p 或 q 为真",且"非 p 为真"的是 ( )

A. p:$0=\varnothing$,q:$0\in\varnothing$

B. p:在 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos 2A=\cos 2B$,则 $A=B$,q:$y=\sin x$ 在第一象限是增函数

C. p:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\ (a,b\in\mathbf{R})$,$q$:不等式 $|x|>x$ 的解集为 $(-\infty,0)$

D. p:圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的面积被直线 $x=1$ 平分,q:椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的一条准线方程是 $x=4$

8.命题 p:集合 $A=\{x\mid ax^2-x+1-a=0\}$ 中,只含有一个元素的充要条件是 $a=\frac{1}{2}$,命题 q:不等式 $|x^2-2x-15|>x^2-2x-15$ 的解集为 $\{x\mid -3<x<5\}$,则 ( )

A."p 或 q"为假　　B."p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

二、填空题

9.若"$a\notin M$,或 $a\notin P$,则 $a\notin M\cap P$"的逆否命题是________.

10.若命题 p:不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $\{x\mid x>-\frac{b}{a}\}$,命题 q:关于 x 的不等式 $(x-a)(x-b)<0$ 的解集为 $\{x\mid a<x<b\}$,则"p 且 q"、"p 或 q"及"非 p"形式的命题中真命题是________.

11.命题"$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+1<0$"的否定是________(要求用数学符号表示).

12.已知下列三个方程:$x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根,则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题

13.判断下列复合命题的真假:

(1) 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边;

(2) 方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 $x=\pm 1$;

(3) $A\not\subseteq(A\cup B)$.

14.(2009·潍坊一模)设集合 $A=\{y\mid y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in[-\frac{1}{2},2]\}$,$B=\{x\mid |x-a|<3\}$,命题 p:$x\in A$,命题 q:$x\in B$,且命题 p 是 q 的充分条件,求实数 a 的取值范围.

15.(2008·广东)设 p:关于 x 的不等式 $a^x>1$ 的解集是 $\{x\mid x<0\}$,q:函数 $y=\lg(ax^2-x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,如果 $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假,求 a 的取值范围.

16.命题甲:关于 x 的不等式 $x^2+(a-1)x+a^2\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$,命题乙:函数 $y=(2a^2-a)^x$ 为增函数.

分别求出符合下列条件的实数 a 的集合:

(1) 甲、乙至少有一个是真命题;

(2) 甲、乙中有且只有一个是真命题.

第三节　充分条件、必要条件、四种命题

知识系统构建

知识整合

1. 充要条件

如果"若 p,则 q"为真命题,记作 $p \Rightarrow q$ 时,我们说 p 是 q 的________条件,q 是 p 的________条件;另一方面,如果"若 q,则 p"为真命题,记作 $q \Rightarrow p$ 时,我们说 p 是 q 的________条件,q 是 p 的________条件;如果________,那么 p 与 q 互为充要条件.

2. 四种命题及其关系

(1) 一般的,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 与 q 的否定.于是四种命题的形式为:

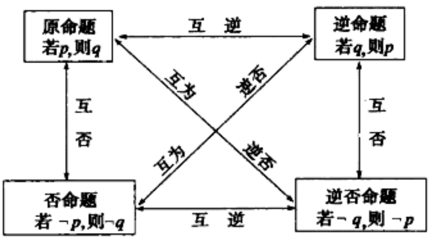
原命题:____________________;

逆命题:____________________;

否命题:____________________;

逆否命题:____________________.

(2) 四种命题的关系



(3)"否命题"与"命题的否定"的区别

①"否命题"与"命题的否定"不是同一概念."否命题"是对原命题"若 p,则 q"既否定其条件,又否定其结论;而"命题 p 的否定"即非 p,只是否定命题中的结论.

② 对于复合命题"非 p",当且仅当 p 为真时,它是假命题;当且仅当 p 为假时,它是真命题.否命题的真假与原命题的真假没有直接联系,它们真假可能相同,也可能相反,由它自身的条件和结论决定.

3. 反证法运用的两个难点

(1) 何时使用反证法;

(2) 如何得到矛盾.

双基检测

1.(广东省仲元中学2009届高三11月月考)下列说法错误的是　(　　)

A. 命题"若 $x^2-4x+3=0$,则 $x=3$"的逆否命题:"若 $x \neq 3$,则 $x^2-4x+3\neq 0$"

B."$x>1$"是"$|x|>0$"的充分不必要条件

C. 若 p 且 q 为假命题,则 p,q 均为假命题

D. 命题 p:"$\exists x\in \mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$",则 $\neg p$:"$\forall x\in \mathbf{R}$,均有 $x^2+x+1\geqslant 0$"

2.(2008·青岛质量检测)"$x<0,y>0$"是"$\dfrac{x^2+y^2}{xy}\leqslant -2$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3.(2008·陕西,6)"$a=1$"是"对任意正数 x,$2x+\dfrac{a}{x}\geqslant 1$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4.(2009·潍坊高三质量检测)若 $|x-1|<a$ 的充分条件是 $|x-1|<b$(其中 $a,b>0$),则 a,b 之间的关系是________.

5. 已知命题 p、q,则"命题 p 或 q 为真"是"命题 p 且 q 为真"的________条件.

6. 设命题 p:$|4x-3|\leqslant 1$;命题 q:$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$,若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是________.

题型归纳探究

题型归纳

题型一　四种命题及其关系

例1　设原命题是"已知 a,b,c,d 为实数,若 $a=b,c=d$,则 $a+c=b+d$".写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

【思路精析】 分清条件和结论,按照四种命题的形式写出,然后搞清前者能否推出后者,后者能否推出前者.

题型二　充分条件、必要条件

例2 (1) 若 p:两条直线的斜率互为负倒数,q:两条直线互相垂直,则 p 是 q 的什么条件?

(2) 若 p:$|3x-4|>2$,q:$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$,则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件?

【思路精析】 (1) 判断由直线斜率互为负倒数能否推出直线垂直,由直线垂直能否推出斜率互为负倒数;(2) 先化简 p,q,然后分别求 $\neg p,\neg q$,进而判断 $\neg p$ 能否推出 $\neg q$,$\neg q$ 能否推出 $\neg p$.

【解】 (1) ∵ 两条直线的斜率互为负倒数,

∴ 两条直线互相垂直,

∴ $p\Rightarrow q$.

又 ∵ 一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为 0，两直线也垂直，

$\therefore q \nRightarrow p$，

$\therefore p$ 是 q 的充分非必要条件.

(2) 解不等式 $|3x-4|>2$，得 $p:\{x \mid x>2$，或 $x<\frac{2}{3}\}$，

$\therefore \neg p:\{x \mid \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\}$；

解不等式 $\frac{1}{x^2-x-2}>0$，得 $q:\{x \mid x>2$，或 $x<-1\}$，

$\therefore \neg q:\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，

$\therefore \neg p\Rightarrow \neg q$，$\neg q \nRightarrow \neg p$.

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的充分非必要条件.

总结反思：判断 p 是 q 的什么条件，要从两个方面进行判断：一看 p 能否推出 q；二看 q 能否推出 p；然后下结论. 若 p，q 为不等式形式，往往从集合角度进行判断.

题型三　充要条件的证明

例 3　求证：关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个负实根的充要条件是 $m\geqslant 2$.

【思路精析】　要证充分性和必要性两方面.

题型四　反证法的应用

例 4　若 x，y 都是正实数，且 $x+y>2$，

求证：$\frac{1+x}{y}<2$ 和 $\frac{1+y}{x}<2$ 中至少有一个成立.

【思路精析】　结论中含有"至少"，可考虑使用反证法证明.

跟踪演练

1. 把下列命题写成"若 p，则 q"的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1) 当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$；

(2) 对顶角相等.

2. 若 $p:x\geqslant 2$，$q:(x-2)\sqrt{x+1}\geqslant 0$，则 p 是 q 的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 求证：方程 $x^2+ax+1=0\ (a\in \mathbf{R})$ 的两实根的平方和大于 3 的必要条件是 $|a|>\sqrt{3}$，这个条件是其充分条件吗？

4. 已知 $f(x)=a^x+\frac{x-2}{x+1}\ (a>1)$，用反证法证明方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

规律总结

1. 四个命题之间的关系

(1)① 交换命题的条件和结论，所得的新命题就是原命题的逆命题；

② 同时否定命题的条件和结论，所得的新命题就是原命题的否命题；

③ 交换命题的条件和结论，并且同时否定，所得的新命题就是原命题的逆否命题.

(2) 一个命题和它的逆否命题同真同假，而与其两个命题的真假无关.

2. 充分条件、必要条件、充要条件的判断

(1) 利用定义

若 $p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $p\nRightarrow q$，且 $p\Leftarrow q$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

若 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件.

(2) 利用集合

令 $P=\{x \mid p(x)\}$，$Q=\{x \mid q(x)\}$，则

若集合 $p\subseteq q$，则 p 是 q 的充分条件
若集合 $q\subseteq p$，则 p 是 q 的必要条件
若集合 $p\subsetneqq q$，则 p 是 q 的充分不必要条件
若集合 $p\supsetneqq q$，则 p 是 q 的必要不充分条件
若集合 $q=p$，则 p 是 q 的充分必要条件
若集合 $p\nsubseteq q$ 且 $q\nsubseteq p$，则 p 是 q 的非充分非必要条件

优化训练设计

一、选择题

1. 条件甲："$a>1$"是条件乙："$a>\sqrt{a}$"的 （　）
   A. 既不充分也不必要条件
   B. 充要条件
   C. 充分不必要条件
   D. 必要不充分条件

2. （广东省中山中学2009届高三11月月考）已知 $a\in\mathbf{R}$，则"$a>2$"是"$a^2>2a$"的 （　）
   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 命题"若 $a>b$，则 $a-5>b-5$"的逆否命题是 （　）
   A. 若 $a<b$，则 $a-5<b-5$
   B. 若 $a-5>b-5$，则 $a>b$
   C. 若 $a>b$，则 $a-5\leqslant b-5$
   D. 若 $a-5\leqslant b-5$，则 $a\leqslant b$

4. （浙江省温州市十校联合体2009届高三期中）已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$；命题 q：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+x+1>0$. 给出下列结论：
   ① 命题"$p\wedge q$"是真命题；② 命题"$p\wedge\neg q$"是假命题；③ 命题"$\neg p\vee q$"是真命题；④ 命题"$\neg p\vee\neg q$"是假命题.
   其中正确的是 （　）
   A. ②④　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③

5. 设集合 $M=\{x\mid x>2\}$，$P=\{x\mid x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的 （　）
   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 对任意实数 a,b,c，给出下列命题：
   ①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；
   ②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件；
   ③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；
   ④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.
   其中真命题的个数是 （　）
   A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0\ (a\neq0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 （　）
   A. $a<0$　　B. $a>0$
   C. $a<-1$　　D. $a>1$

8. $f(x)$、$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$h(x)=f(x)+g(x)$，则"$f(x)$、$g(x)$ 均为偶函数"是"$h(x)$ 为偶函数"的 （　）
   A. 充要条件　　B. 充分而不必要条件
   C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分也不必要的条件

二、填空题

9. 命题"每个二次函数的图象都与 x 轴相交"的否定是________________.

10. "已知 $a>0,b>0$，若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"的逆否命题是________________.

三、解答题

11. 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2$，$q$：$x^2+2x+1-m^2\leqslant0\ (m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

12. （2009·泰安高三期末）已知命题 p：对 $m\in[-1,1]$，不等式 $a^2-5a-3\geqslant\sqrt{m^2+8}$ 恒成立，命题 q：不等式 $x^2+ax+2<0$ 有解，若 p 是真命题，q 是假命题，求 a 的取值范围.

13. a,b,c 为实数，且 $a=b+c+1$，证明：两个一元二次方程 $x^2+x+b=0$，$x^2+ax+c=0$ 中至少有一个方程有两个不相等的实数根.

14. 给定两个命题，p：对任意实数 x，都有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立，q：关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实数根. 求 p 与 q 中有且仅有一个为真命题的充要条件.

第二单元　函数与导数

单元复习导引

考纲要求

1. 函数概念与基本初等函数（Ⅰ）（指数函数、对数函数、幂函数）

（1）函数

① 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

② 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数.

③ 了解简单的分段函数，并能简单应用.

④ 理解函数的单调性、最大（小）值及其几何意义；结合具体函数，了解函数奇偶性的含义.

⑤ 会运用函数图象理解和研究函数的性质.

（2）指数函数

① 了解指数函数模型的实际背景.

② 理解有理指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

③ 理解指数函数的概念，并理解指数函数的单调性与函数图象通过的特殊点.

④ 知道指数函数是一类重要的函数模型.

（3）对数函数

① 理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；了解对数在简化运算中的作用.

② 理解对数函数的概念；理解对数函数的单调性；掌握函数图象通过的特殊点.

③ 知道对数函数是一类重要的函数模型.

④ 了解指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）互为反函数 .

（4）幂函数

① 了解幂函数的概念.

② 结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，了解它们的变化情况.

（5）函数与方程

① 结合二次函数的图象，了解函数的零点与方程根的联系，判断一元二次方程根的存在性及根的个数.

② 根据具体函数的图象，能够用二分法求相应方程的近似解.

（6）函数模型及其应用

① 了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征，知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.

② 了解函数模型（如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会中普遍使用的函数模型）的广泛应用.

2. 导数及其应用

（1）导数的概念及其几何意义

① 了解导数概念的实际背景.

② 理解导数的几何意义.

（2）导数的运算

① 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数.

② 能利用基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数.

常见基本初等函数的导数公式和常用导数运算公式：

$c'=0$（c 为常数）；$(x^n)'=nx^{n-1},n\in\mathbf{N}$；$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1},\mu\in\mathbf{Q}$；$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$；$(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$；$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

法则 1 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

法则 2 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

法则 3 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},v(x)\neq 0$.

(3) 导数在研究函数中的应用

① 了解函数单调性和导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求函数的单调区间，对多项式函数一般不超过三次.

② 了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求函数的极大值、极小值，对多项式函数一般不超过三次；会求闭区间上函数的最大值、最小值，对多项式函数一般不超过三次.

(4) 生活中的优化问题

会利用导数解决某些实际问题.

复习建议

1. 函数的基本概念在应用时要把重点放在它的三要素上，复习函数的定义域除了要注意使解析式有意义的自变量的取值范围，还要根据题中的实际意义来确定它的取值范围.

2. 求值域时要熟悉几种基本的解题方法，通常划归为求函数的最值问题，要注意利用基本不等式、二次函数及函数的单调性在确定函数最值中的作用，还要注意对应法则特别是定义域的制约作用.

3. 求函数解析式根据实际问题建立函数关系，或根据题中所给条件利用待定系数法解题，或对于 $f[g(x)]=g(x)$ 求 $f(x)$ 的问题可以用换元法解题，或若式中含有 $f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ 等，必须根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求解.

4. 利用函数的基本性质解题时要注意挖掘函数的单调性、周期性、奇偶性、对称性等，但是别忘了函数的基本性质只能在函数的定义域内讨论.

5. 指数函数、对数函数解题时要注意 $a>0$，且 $a\neq 1$ 这个隐含条件，a 与 1 的关系不确定时，注意分类讨论. 在给定条件下求字母的取值范围也是常见题型，划归为二次函数解题也是常用的方法. 幂函数图象多样，要注意把握.

6. 在研究函数图象的性质时要注意结合图象，在解方程和不等式时，有时利用数型结合能得到十分快捷的效果. 研究函数与方程的问题时，尤其要用好图象，恒成立问题，区间解问题都可得到较好的解决.

7. 函数是高中数学的重点内容，而函数的性质又是高考命题的热点，用导数研究函数的性质比用初等方法研究要方便得多，在复习时要引起重视.

8. 掌握利用导数求单调区间和求极值的方法，要注意两点：① 不管是求单调区间还是求极值首先需要确定函数的定义域. ② 若可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为增函数，则 $f'(x)\leqslant 0$；若可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为增函数. 即对于可导函数 $f(x)$，$f'(x)>0$ 不是 $f(x)$ 为增函数的充要条件.

第一节 函数及其表示法

知识系统构建

知识整合

1. 映射

(1) 映射是一种特殊的对应，映射中的集合 A，B 可以是数集，也可以是点集或其他集合，这两个集合有先后次序，从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射一般情况下是不同的，原象和象一般是不能互换的，互换后就不是原来的映射了.

(2) 对于一个从集合 A 到集合 B 的映射来说，A 中的每一个元素都有唯一的象，但 B 中的每一个元素却不一定都有原象.

(3) 一一映射是一种特殊的映射，其主要特征是“一对一”，且 B 是象集.

2. 函数的概念

(1) 设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有________与它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$. 其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

(2) 构成函数的三要素——________，三要素只要有一个不同的两个函数就是不同的函数；三要素都相同的两个函数才是同一个函数，研究函数必须坚持“定义域优先”的原则.

3. 函数的表示法

(1) 表示函数的方法有______、______、______三种.

① 解析法:用一个等式来表示两个变量间的函数关系的方法. 这个等式叫做函数的解析表达式,简称解析式,中学研究的函数主要是用解析式表示的函数.

② 列表法:列出表格来表示两个变量间的函数关系的方法.

③ 图象法:用图象来表示两个变量间的函数关系的方法.

(2) 求函数的解析式的基本方法:代入法、配凑法、待定系数法、换元法、方程组法.

双基检测

1. 已知映射 $f:A\to B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中的元素在映射 $f:A\to B$ 下的象. 且对任意 $a\in A$, $f(a)=|a|$,则集合 B 中的元素个数是 ( )

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

2. 下列四组函数中,表示相同函数的一组是 ( )

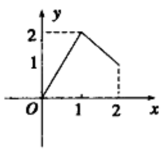
A. $y=2^{\log_2(x+1)}$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

B. $y=\lg x$ 和 $y=\dfrac{1}{2}\lg x^2$

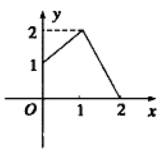
C. $y=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right)^2$ 和 $y=e^{\ln(x+1)}$

D. $y=(\sqrt{x})^2$ 和 $y=a^{\log_a x}(a>0$,且 $a\neq 1)$

3. 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 2\}$,下图中表示 A 到 B 的函数的是 ( )

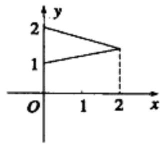


A



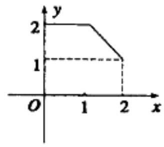
B

A



C

B



D

4. (2009·泰安高三质量检测) 函数 $f(x)$ 的定义如下表, $x_0=5$,且对任意的正整数都有 $x_{n+1}=f(x_n)$,则 x_{2007} 的值为 ( )

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. (2008·山东) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leqslant 1,\\ x^2+x-2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ( )

A. $\dfrac{15}{16}$　　B. $-\dfrac{27}{16}$　　C. $\dfrac{8}{9}$　　D. 18

6. 已知 $f(x)=\dfrac{k}{x}+2\ (k\in\mathbf{R})$,若 $f(\lg 2)=0$,则 $f(\lg\dfrac{1}{2})=$ ______.

7. 若 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,则 $f(x)=$ ______.

8. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出.

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为______;

当 $g[f(x)]=2$ 时, $x=$ ______.

题型归纳探究

题型归纳

题型一　映射的概念

例 1　已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$, $B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$,且 $k\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{N}$, $x\in A$, $y\in B$,映射 $f:A\to B$,使 B 中元素 $y=3x+1$ 和 A 中元素 x 对应,求 a 和 k 的值.

【思路精析】 对于集合与集合之间的映射这类题的处理,一是要注意元素的对应关系;二是要注意有关参数的可能取值;三是要注意集合元素是互异的、确定的.

题型二　函数的概念

例 2　下列三组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数?

(1) $f(x)=\lg x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\lg x^2$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1 & (-1<x<0),\\ x-1 & (0<x<1),\end{cases}$ $g(x)=f^{-1}(x)$.

【思路精析】 根据函数三要素,看定义域、值域是否相同,解析式化简后是否统一.