JINGJISHUXUE

经济数学

UE

JINGJISHUXUE

21世纪高等职业教育系列规划教材·数学平台课

JINGJISHUXUE

主编／郝 军 张 拓

主审／张文鹏

西北大学出版社

JINGJISHUXUE

21世纪高等职业教育系列规划教材·数学平台课

经济数学

ECONOMICMATHEMATICS

主　编

郝　军　张　拓

副主编

姚红梅　赵成辉　张红莉　王军平

主　审

张文鹏

西北大学出版社

内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的《高等职业教育高等数学和经济数学课程教学基本要求》而编写。内容包括：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数的微分学、线性代数初步、概率论与数理统计初步、Matlab 软件与数学建模简介。书后附有部分常用公式表和数表以及习题参考答案。

本书特点：一是突出高等职业教育特色，依据高等职业院校经管类专业选取内容；二是内容处理深入浅出，引用大量实例，强化数学在实际中的应用。

本书可作为高等职业院校经管类专业通用教材，也可作为经济管理人员和数学爱好者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/郝军等编．—西安：西北大学出版社，2008.8(第 3 版)
ISBN 978-7-5604-1723-3

Ⅰ．经…　Ⅱ．郝…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057163 号

经济数学

出版发行	西北大学出版社	社　址	西安市太白北路 229 号
电　话	029－88303313	经　销	新华书店经销
印　刷	陕西丰源印务有限公司印刷	版　次	2008 年 8 月第 3 版
开　本	787×1092　1/16	印　次	2008 年 8 月第 1 次印刷
字　数	381 千字	印　张	16.50
书　号	ISBN 978－7－5604－1723－3	定　价	26.00 元

前 言

为适应高等职业教育大众化的发展趋势，培养面向生产、建设、服务和管理第一线需要的技能型专门人才，根据教育部《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合高等职业院校经济管理类专业特点编写了本教材。充分体现了“以应用为目的，以必须够用为度”，兼顾学科体系的高职教学基本原则。

本书在内容选取和处理上，紧紧围绕高等职业院校经济管理类专业实际，为学生后续课程和持续性发展提供了必要的数学基础，具体有以下几方面特点：

（1）引用了大量实例突出应用性，注意对学生应用知识的意识和能力的培养。

（2）重视数学概念的理解，对有关定理、结论、方法的叙述力求通俗易懂，尽量进行直观几何解释，淡化了深奥的数学理论。

（3）例题、习题配备难易适中，由简到难，层次分明，突出了数学思维的训练，并每章进行了知识归纳和总结。

（4）为培养学生使用相关数学软件和建立数学模型的能力，第九章简介了 Matlab 软件及数学建模，便于各校结合实际灵活处理。

参加本书编写的有咸阳职业技术学院王军平（第一章）、西安职业技术学院张红莉（第二章）、陕西能源职业技术学院赵成辉（第三章）、陕西职业技术学院杨岗（第四章）、陕西纺织服装职业技术学院张广学（第五章）、陕西邮电职业技术学院姚红梅（第六章）、陕西财经职业技术学院张拓（第七章）、陕西工业职业技术学院段瑞（第八章）、西安职业技术学院卢璟（第九章）。本书由郝军、张拓担任主编，由姚红梅、赵成辉、王军平、张红莉担任副主编。全书框架的设计、统稿、定稿工作由郝军、张拓承担。

本书由西北大学张文鹏教授主审，提出了许多宝贵的建议；在编写和出版过程中得到了各参编院校领导及西北大学出版社的大力支持和帮助；另外，在编写中还广泛参考了国内外同类教材和书籍，借鉴了其他同行的研究成果，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，不妥和错误之处在所难免，希望专家、同行、广大读者批评指正。

编　者

2008 年 6 月

目 录

第一章 函数的极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象,函数刻画了变量之间的相互制约的关系;极限刻画了变量的变化趋势,连续函数是一类重要的函数.本章对函数的概念做了必要的复习、补充和加深,并介绍极限和连续的概念.

§1.1 函 数

一、函数

(一) 变量与常量

我们在研究实际问题时,经常会遇到两类不同的量:一类是在过程中保持不变的、取一个固定数值的量,称为常量;另一类是在过程中会发生变化的、取不同数值的量,称为变量.常量的例子很多,如圆周率 π、重力加速度 g 等等;变量的例子也很多,如温度、时间、某种商品的价格和需求量等等.

需要指的是,变量与常量的概念是相同的,同一个量在一定条件下是常量,而在另外的条件下则可能是变量.例如人民币的存款利率,在1996年第一季度没有调整,可以看作常量,若考察从1990年至2000年之间的人民币存款利率,它经过了多次调整,就是一个变量.

(二) 函数的定义

在同一变化过程中,出现的各个变量并不是孤立地在变,而是相互联系、相互制约的,如一天内的气温是随时间的变化而变化的,某种商品的市场需求量是受该商品的价格影响的,自由落体在下落过程中,物体下落的路程 s 和经历的的时间 t 之间有如下关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

显然,s 和 t 是按这个式子确定的关系相互制约的,$t = 0$ 表示物体刚开始下落的时刻,这时 $s = 0$. 经历 2 秒后物体下落的路程为

$$\frac{1}{2}g \cdot 2^2 = 2g$$

等等,总之,s 随 t 的变化而变化.设物体着地的时刻为 T,则当时间 t 在 $[0,T]$ 上任取一个数值时,相应的路程 s 的数值也随之惟一地确定,变量之间的这种相依关系在数学中称为函数关系,下面,我们给出函数的确切定义.

定义1 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于 x 在某一范围 D 内的每一个取值,按照一定的对应法则 f,变量 y 都有惟一确定的值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$,其中称 x 为自变量,称 y 为因变量,自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域.

如果 x_0 是 D 内某一值时，我们就说函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义，这时函数的对应值 $f(x_0)$ 称为 x_0 点的函数值，所有函数值的集合称为函数的值域. 如 $y = \sin x$ 或 $f(x) = \sin x$ 表示 y 为 x 的正弦函数，在 $x_0 = \frac{\pi}{2}$ 处的函数值为

$$f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

例 1 设出租车载客的收费标准为：3 公里以内的路程收费 5 元，此后每公里加收 1.2 元. 由此可知，出租车载客时的收费数 F 与行驶的公里数 x 之间的函数关系为

$$F(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leqslant 3 \\ 5 + 1.2(x - 3) & x > 3 \end{cases}$$

若出租车载某乘客行驶 2 公里，则应收费 5 元，即 $F(2) = 5$；行驶 8 公里时收费为

$$F(8) = 5 + 1.2(8 - 3) = 11 \text{ 元}$$

给定一个函数后，其定义域是同时给定的. 在实际问题中，函数的定义域则要由问题的实际意义来决定，如自由落体下落的路程函数中，函数的定义域为区间 $[0, T]$，若把 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 当作关于 t 的二次多项式来看待，那么它的定义域应为区间 $(-\infty, +\infty)$. 如果函数是用没有实际背景的数学式子给出的，那么函数的定义域应从理论上使数学式子有意义.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{4 - x^2}$；

(2) $y = \frac{1}{x - 3} + \ln(x - 2) - \sqrt[3]{x + 1}$.

解 (1) 要使 y 有意义，必须有 $4 - x^2 \geqslant 0$，因此，函数的定义域为 $-2 \leqslant x \leqslant 2$，也可以用区间表示为 $[-2, 2]$.

(2) 要使 y 有意义，必须有 $x - 3 \neq 0$，且 $x - 2 > 0$，因此，函数的定义域为 $x > 2$ 且 $x \neq 3$，用区间表示为 $(2, 3) \cup (3, +\infty)$.

定义域和对应法则是函数概念中的两大要素，两个函数只有当它们的表达式相同且定义域也相同时，才认为是两个相同的函数，否则就认为它们是两个不同的函数.

例如，$f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 是两上相同的函数；$f(x) = 2\lg x$ 与 $g(x) = \lg x^2$ 从形式上看似乎相同，但它们的定义域不同；$f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个不同的函数.

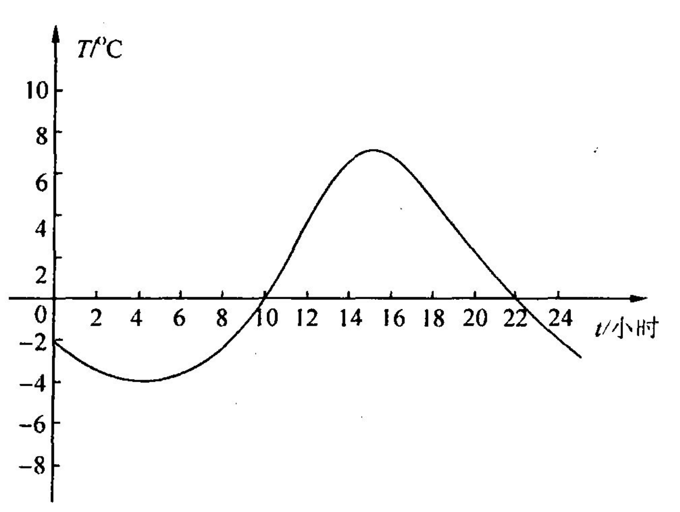


图 1－1　某天的气温变化实测图

（三）函数的表示法

1. 解析法

用数学式子来表示因变量与自变量之间的函数关系的方法称为解析法（或公式法），表示函数关系的数学式子称为解析式，解析法是表示函数关系的主要方法，也是最常用的方法，如本节例1、函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 等等，解析法的特点是便于理论分析和数值计算.

2. 图形法

用坐标平面上的图形来表示函数关系的方法称为图形法. 其特点是直观性强，如下面的例子.

例3 图1－1是某地气象站的温度记录仪一昼夜之间自动画成的气温曲线，它表示某一天从 $t = 0$ 点钟到 $t = 24$ 点钟小时内气温 T(℃) 随时间 t 而变化的函数关系.

3. 列表法

用一个有一系列自变量值与对应函数值的表格来表示函数关系的方法称为列表法. 如数学中的对数表、三角函数表、经济工作中的价目表、利率表，等等都是函数的列表法表示.

例4 某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率之间的对应关系如下表

表1－1

存　期	三个月	六个月	一　年	二　年	三　年	五　年
年利率(%)	3.33	5.40	7.47	7.92	8.28	9.00

这张表就表示了存期和年利率两个变量之间的函数关系.

（四）分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的取值，不能用一个统一的解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数. 如本节例1中所举的车费函数，再如符号函数(图1－2)

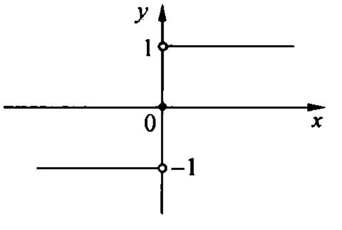


图1－2

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$.

解 $f(0) = 0$

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$

（五）反函数

在函数关系中，自变量与因变量的地位并不是绝对不变的. 例如，正方形的面积 s 与边长 a 之间的函数关系为 $s = a^2$，这里 a 是自变量，s 是因变量，s 是 a 的函数，当边长 a 的值给定后，面积 s 的值就惟一确定. 反过来，若由面积值确定边长值，则有 $a = \sqrt{s}$，这里 a 成了因变量，s 成了自变量，表明边长 a 是面积 s 的函数，这就是反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域是 M,如果对于 y 的每一个值($y\in M$),x 都有惟一确定的值($x\in D$)与它对应,那么就可以确定 x 与是 y 的函数,记作 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

例 6 求 $y=2x+1$ 的反函数.

解 根据 $y=2x+1$ 解出 $x=\dfrac{1}{2}(y-1)$,再互换 x 和 y 的位置,得到函数 $y=2x+1$ 的反函数是 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

例 7 求 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 的反函数.

解 由 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 解出 $x=\sqrt{y}$,所以函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$(图 1-3).

函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-4).

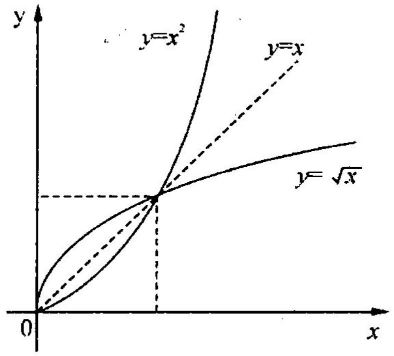


图 1-3

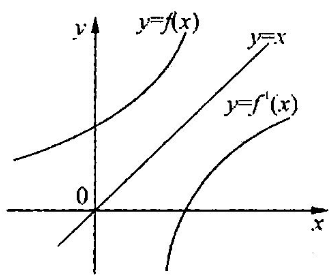


图 1-4

(六) 邻域

设 δ 和 a 是两个实数,且 $\delta>0$,则数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记作 $\cup(a,\delta)$.

其中点 a 叫做 $\cup(a,\delta)$ 的中心,δ 叫做 $\cup(a,\delta)$ 的半径,若去掉邻域中心则称此邻域为去心邻域.

二、函数的特性

(一) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 D 内有定义,若存在一个正数 M,对于一切 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 内有界,否则称 $y=f(x)$ 在 D 内无界.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的;$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,在 $(0,1)$ 内无界

(二) 单调性

有些函数的函数值随自变量的增大而增大,有些函数的函数值随自变量的增大而减小,这就是函数的增减性,也称为单调性. 严格地讲,就可定义为:

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 (a,b) 内，若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(y_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递增的；若总有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递减的．区间 (a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

例如，$y=2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，而在 $(0,+\infty)$ 内单调递增．

（三）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），如果对任一 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对任一 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

例如，$f(x)=x^2+1$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$．又例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$．

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称．

（四）周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为 $f(x)$ 的周期．

显然，若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T$、$3T$ 等等也往往是 $f(x)$ 的周期．通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

例如，$y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数．$y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数．

三、基本初等函数

（一）常值函数

函数 $y=c$（c 为常数）称为常值函数．其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{c\}$，常值函数的图形是一条平行于 x 轴的直线．

（二）幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）称为幂函数．其图形和性质随指数 α 的取值而定，以下分三种情况讨论：

（1）当 $\alpha=0$ 时，$y=1$，它是定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的常值函数．

（2）当 $\alpha>0$ 时，如 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=\sqrt{x}$ 等等（图 1－6(a)），在 $[0,+\infty)$ 内单调递增．

（3）当 $\alpha<0$ 时，如 $y=x^{-1},y=x^{-2}$ 等等（图 1－6(b)），在 $(0,+\infty)$ 内单调递减．

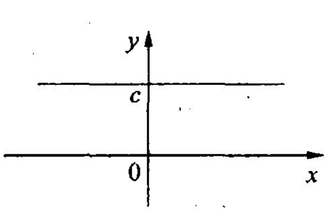
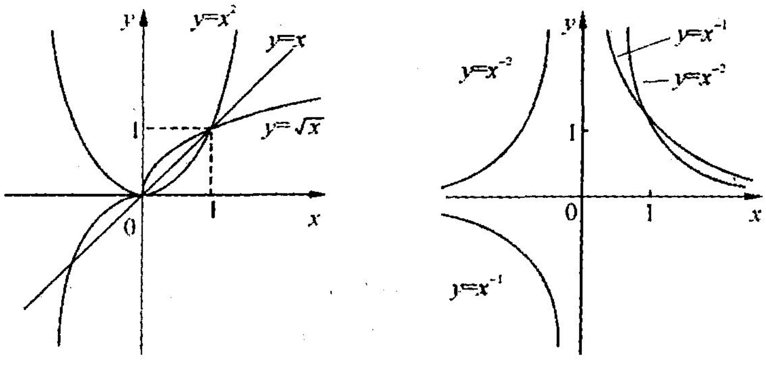


图 1－5 常值函数的图形

（三）指数函数

函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）称为指数函数．它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$．

当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减．指数函数的图形都经过点 $(0,1)$，如图 1－7 是 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图形．



(a) (b)

图1－6

(四) 对数函数

指数函数 $y = a^x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的反函数是

$$y = \log_a^x$$

$(a > 0$ 且 $a \neq 1)$

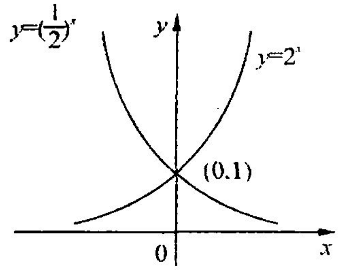


图1－7

函数 $y = \log_a x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$，称之为对数函数．其定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$．当 $a > 1$ 时，函数单调递增；当$0 < a < 1$ 时，函数单调递减．所有函数图像都经过点$(1, 0)$．如图1－8是 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图形．

在高等数学中常使用 $a = e$ 时的对数函数 $y = \log_e x = \ln x$，称为自然对数，这里 $e = 2.71828\cdots$ 它是一个无理数．

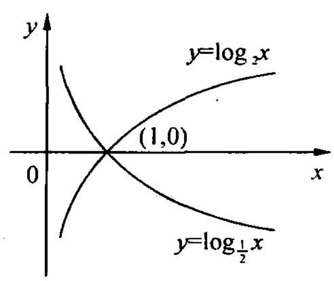


图1－8

(五) 三角函数

1. 正弦函数

函数 $y = \sin x$ 称为正弦函数．其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以2π为周期的有界的奇函数，图形如图1－9所示．

2. 余弦函数

函数 $y = \cos x$ 称为余弦函数．其定义域和值域与正弦函数相同，它是以 2π 为周期的有界偶函数，图形如图1－10所示．

3. 正切函数

函数 $y = \tan x$ 称为正切函数．正切函数在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$(k 为整数) 处无定义，值域为$(-\infty, +\infty)$，它是以 π 为周期且无界的奇函数，图形如图1－11所示．

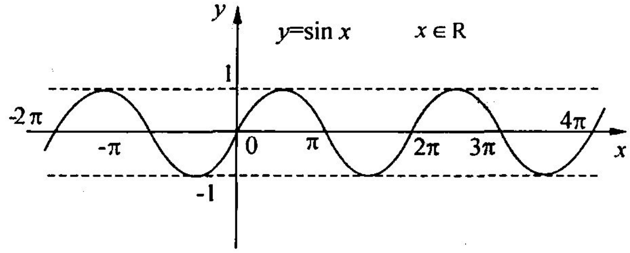


图1－9

4. 余切函数

函数 $y = \cot x$ 称为余切函数．它在

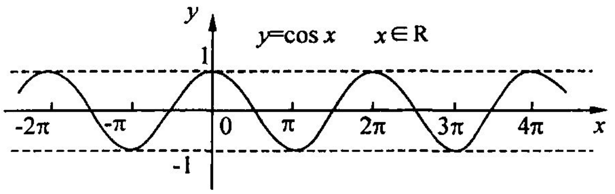


图 1 - 10

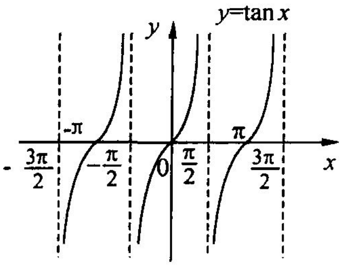


图 1 - 11

$x = k\pi$(k 为整数) 处无定义,值域为$(-\infty, +\infty)$,它是以 π 为周期且无界的奇函数,图形如图 1 - 12 所示.

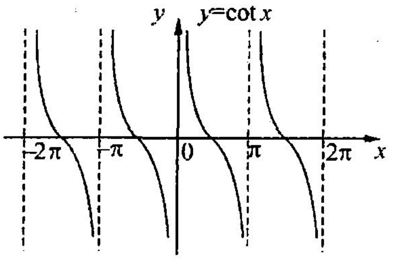


图 1 - 12

此外,三角函数还有正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$,它们的图像和性质略.

(六) 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数,它们分别是:

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为

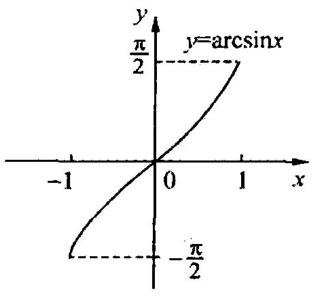


图 1 - 13

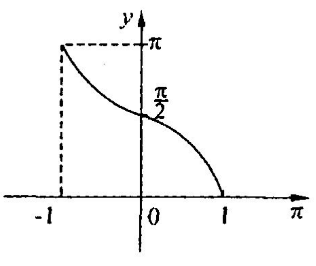


图 1 - 14

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,它是正弦函数 $y = \sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,图形如图 1 - 13 所示,它是有界、单调递增、奇函数.

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,它是余弦函数 $y = \cos x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 的反函数,图形如图 1 - 14 所示,它是有界、单调递减函数.

(3) 反正切函数 $y = \arctan x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,它是正切函数 $y = \tan x\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,图形如图 1 - 15 所示,它是有界,单调递增、奇函数.

(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0,\pi)$,它是余切函数 $y = \cot x(0 < x < \pi)$ 的反函数,图形如图 1 - 16 所示,它是有界、单调递减函数.

四、复合函数

在高等数学中进行函数研究时,往往把一个比较复杂的函数看成若干个简单函数的合成,这对函数的研究会带来方便. 例如,考察函数 $y = \ln\sin x$ 的构成情况,若引入辅助变量 u,

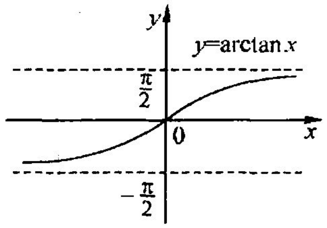


图 1 - 15

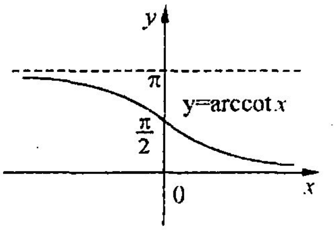


图 1 - 16

并且令 $u = \sin x$,那么,函数 $y = \ln\sin x$ 就可以分解为 $y = \ln u$ 和 $u = \sin x$,这时,我们称函数 $y = \ln\sin x$ 是由 $y = \ln u$ 和 $u = \sin x$ 复合而成的函数,也把 u 称为中间变量.

例如,函数 $y = (x+1)^2$ 是由 $y = u^2$ 和 $u = x + 1$ 复合而成的;函数 $y = 2^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y = 2^u$、$u = \sin v$ 和 $v = \dfrac{1}{x}$ 复合而成的. 事实上,许多复杂的函数都可以看作几个简单函数经过中间变量复合而成.

定义 3 设变量 y 是变量 u 的函数,变量 u 又是变量 x 的函数,即

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过变量 u 可以确定变量 y 的值,则称 y 是 x 的复合函数,记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为中间变量.

必须注意的是,并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$y = \ln u$ 和 $u = -x^2$ 就是两个不能复合的函数,因为 u 总是非正的,而 $y = \ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

五、初等函数

定义 4 由六类基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成,且能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

例如,$y = A\sin(wx + \varphi)$,$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 等等,都是初等函数,本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

六、经济分析中几种常见函数

(一) 需求函数

消费者对某种商品的需求量是受诸多因素影响的,如该商品的市场价格,消费者的收入,消费者的偏好等等,其中市场价格是影响需求量的一个十分重要的因素. 为讨论方便,我们忽略其他因素,假定某种商品的市场需求量只与这种商品的市场价格有关,即

$$Q_d = Q(P)$$

其中,Q_d 表示商品的需求量,P 表示商品的市场价格.

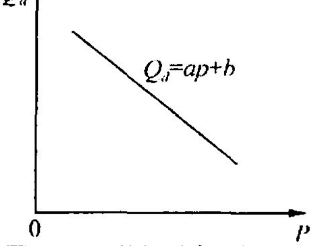


图 1 - 17 线性需求函数的图形

一般来说,需求量将随着价格的上涨而减少,因此,Q_d 是单调递减函数. 例如,函数

$$Q_d = aP + b$$

就是一个线性需求函数,其中 $a < 0, b > 0$,它的图形如图 1 - 17 所示. 常见的需求函数还有

二次函数、指数函数等.

(二) 供给函数

生产者对某种商品的供给量也是受多种因素影响的,如商品的市场价格、生产成本等,在这里,我们也忽略其他因素,只将供给量看成商品市场价格的函数. 由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润,所以,供给量是随着商品市场价格的上涨而增加的,即供给量是市场价格的单调递增函数,例如,函数

$$Q_s = a_1P + b_1$$

就是一个线性供给函数,其中 $a_1 > 0, b_1 < 0$,其图形如图 1 - 18 所示.

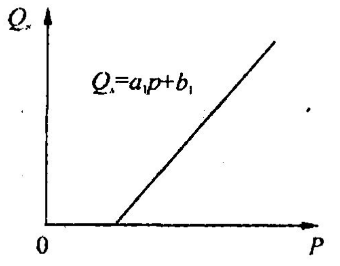


图 1 - 18 线性供给函数的图形

(三) 成本函数

成本就是生产者用于生产商品的费用. 成本可分为两类:第一类是厂房、设备等固定资产的折旧等等,称为固定成本,用 C_0 来表示;第二类是能源费用、原材料费用、劳动者的工资等等,这类成本的特点是随商品产量的变化而变化,称为可变成本,用 C_1 来表示. 这两类成本的总和就是生产者投入的总成本,用 C 来表示,即

$$C = C_0 + C_1$$

一般认为 C_0 是不变的,而 C_1 是产量 Q 的函数,所以,成本 C 也就是产量 Q 的函数,即

$$C = C_0 + C_1(Q)$$

这就是成本函数. 显然,成本是随着产量的增加而增加的,所以,成本函数是单调递增函数. 常见的成本函数类型有一次函数、二次函数等.

(四) 收入函数

收入是指生产者生产的商品售出后的所得,用 R 来表示. 某种商品的销售总收入取决于该商品的销量 Q 和价格 P,等于二者的乘积

$$R = QP$$

而价格 P 又随着销量的变化而变化,即 $P = P(Q)$,因此,收入 R 也就是销量的函数

$$R = QP(Q)$$

这就是收入函数.

例 8 已知某种商品的需求函数是

$$Q = 200 - 5P$$

试求该商品的收入函数以及销售 20 件该商品时的总收入.

解 由需求函数可得

$$5P = 200 - Q$$

$$P = 40 - \frac{Q}{5}$$

因此,该商品的收入函数为

$$R = QP = Q(40 - \frac{Q}{5})$$

$$= 40Q - \frac{Q^2}{5}$$

当销量 $Q = 20$ 件时，总收入

$$R = 40 \times 20 - \frac{20^2}{5} = 720$$

（五）利润函数

利润是生产者的收入扣除成本后的剩余部分，用 L 来表示，即

$$L = R - C$$

如果将收入 R 和成本 C 都看作产量 Q 的函数，那么利润 L 也是产量 Q 的函数．

【习题 1.1】

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$， $g(x) = x + 1$；

(2) $f(x) = x$， $g(x) = (\sqrt{x})^2$．

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$；　　(2) $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1}$；

(3) $y = \ln(x+3) + \sqrt{6-x}$；　　(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$．

3. 设 $f(x) = x^2 + 1$，$g(x) = \frac{1}{x}$，试求 $f(x+1)$，$f(x) + 1$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$．

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x^2 + \cos x$；　　(2) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$；

(3) $y = xe^{x^2}$；　　(4) $y = x^3 + x$．

5. 试将 y 表示为 x 的复合函数：

(1) $y = \lg u$，$u = \sqrt{v}$，$v = x^2 + 1$；

(2) $y = \sqrt{1 + u^2}$，$u = \cos x$．

6. 将下列函数分解成较简单的函数：

(1) $y = (\arcsin 2x)^2$；　　(2) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$．

7. 旅客乘火车时，随身携带物品，不超过 20 千克的免费，超过 20 千克的，每千克收费 0.20 元，超过 50 千克的部分每千克加收 50% 费用，试列出收费与物品重量的函数关系．

8. 已知某厂生产某种产品的成本函数为

$$C = 500 + 2Q$$

其中 Q 为该产品的产量，如果该产品的售价定为 6 元，试求该产品的利润函数．

§1.2　函数的极限

我们已经知道，研究数列的极限就是讨论数列的变化趋势，那么，函数的极限当然研究的是函数的变化趋势，由于函数是随自变量的变化而变化的，因此，必须根据自变量的变化趋势来讨论函数的变化趋势．

对于函数 $y = f(x)$，自变量 x 的变化趋势有两种情形：一种是自变量 x 的绝对值无限增大