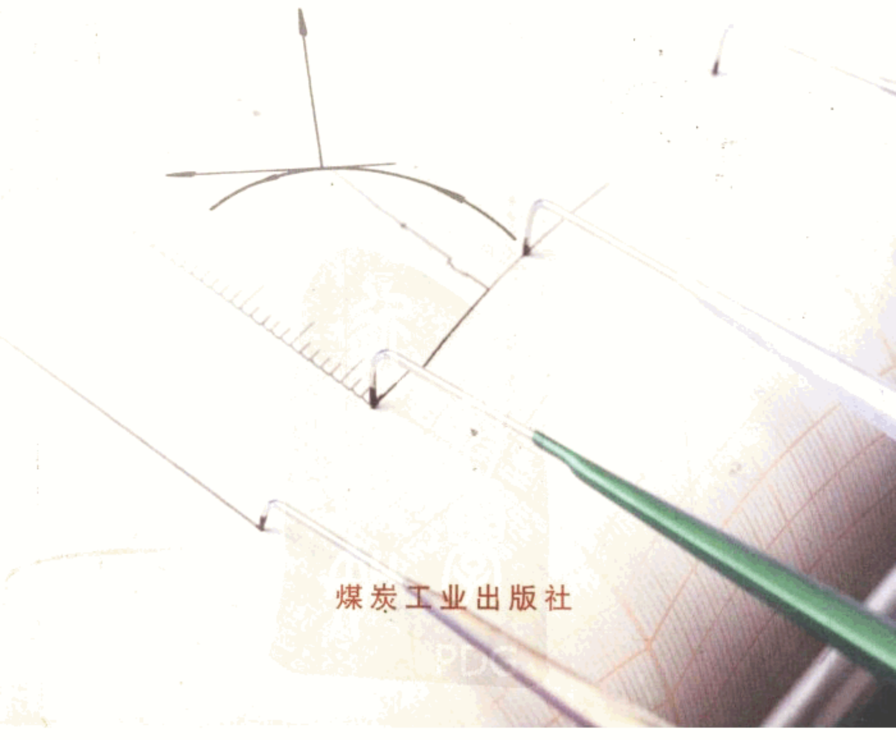
楔形体应力理论及其在工程中的应用

高家美 顿志林 著



煤炭工业出版社

序

半无限楔形体和半无限平面问题，是弹性力学中的经典问题。由于其分析结果在工程上具有重要的实际意义，国内外许多学者对其进行过研究，得到了一些有用的结果，如关于楔形体在楔顶受集中力作用的密切尔（J. H. Michell）解答、在楔顶受力偶作用的英格里斯（C. E. Inglis）解答、在一个楔面上受有自楔顶一直延伸到无限远处均布压力的李维（M. Levy）解答等。

但是，随着国内外经济的发展，在工程实际中出现的问题日趋复杂。楔形体所受的外载荷很多并不是自楔顶开始的，也不是连续的，且外荷形式越来越多种多样，特别是在工程中具有重要实际意义的削平顶部的非对称楔形体问题尚未见到其弹性应力解答。据此，作者根据工程实际需要，在参阅大量文献的基础上，利用应力函数及其导数在弹性体边界上的力学意义寻找应力函数的方法和海维赛德（Heaviside）函数、应力势理论等综合方法和工具，给出了非对称楔

形体在各种外荷（其中包括自楔顶一段长度后沿楔面承受各种形式的外荷、非连续的外荷等形式）和自重作用下的一般应力解。然后，令两楔面角 α 和 β 取不同的值，得出各种实际问题（对称楔形体问题、边坡问题、1/4 平面问题等）的应力解。不但在求解楔形体问题的思路和方法上与前人有所不同，还给出各种楔形体在各种不同外荷作用下的应力解，从而使楔形体应力理论更完善和更系统，本书同时还为路堤、堤坝、边坡、深基坑开挖等工程实际问题提供了坚实的理论基础，因而本专著具有重要的理论意义和实际应用价值。

中国工程院院士

王梦恕

2000 年 11 月

前言

众所周知，理论分析、数值计算和模拟实验是解决工程实际问题的三种基本手段。诚然，在电子计算机技术非常发达的今天，很多工程实际问题可以利用数值计算技术得以解决，但是，这三种基本手段是相辅相成的，理论分析往往给出具有普遍规律的解析解，对数值计算和模拟实验具有一定的对比和指导意义。

我们根据自己多年在弹性力学和岩土工程方面的教学及科研所取得的成果，结合实际问题撰写了《楔形体应力理论及其在工程中的应用》一书，利用应力函数及其导数在弹性体边界上力学意义寻找应力函数的方法和海维赛德（Heaviside）函数、应力势理论等综合方法与工具，求解出了半无限楔形体在楔顶和楔面不同部位承受不同荷载形式的弹性应力解，主要包括在楔顶承受集中力和集中力偶作用下的弹性应力解，在楔面不同部位承受均布的、线性分布的、非线性分布的、k/r 型分布的正压力、剪力、力

偶作用下的弹性应力解，在削平的顶部承受均布压力作用下的弹性应力解，还给出了各种不同楔形体形式自重作用下的弹性应力解和热应力解。这一本专著，使得楔形体应力理论更加完善和系统。

本书由高家美、顿志林共同撰写，其中顿志林撰写本书的第一、三章，高家美撰写本书的第二章，最后全书由高家美统稿、定稿。

在本书撰写及出版过程中，得到了焦作工学院土木建筑工程系杨小林博士后的大力支持，作者在此表示衷心感谢。焦作工学院重点学科建设基金的资助使本书得以出版面世。

中国工程院院士王梦恕先生，在本书面世前审阅全书并赐序，实在是作者三生之幸。

由于作者学力不足，书中欠妥、错误之处难免，恳请大家批评指正。

作　者

2000.11.26 于焦作工学院

目　录

第一章　弹性力学平面问题

严格地说，任何弹性体都是空间物体，所受的外力是空间力系，其约束条件也随三个坐标的变化而不同，所以任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。弹性体内的应力分量、应变分量和位移分量都是三维坐标（x，y，z）的函数。

但是，如果所考虑的弹性体具有某种特殊形状，承受的是某种特殊的外力，其约束条件也具有一定的特殊性，此时，就可以根据不同情况对空间问题进行简化。这样处理，既可以使分析和计算的工作量大大减少，又可以使所得结果仍然能满足工程上对精度的要求。

根据弹性体的形状、约束条件和所受外力的不同形式，可把一般空间问题简化为平面问题、空间轴对称问题等。本章只简单介绍在本书中所用到或涉及到的弹性力学平面问题的基本理论和基本方程，一般不作推导。

弹性力学平面问题的特点是：将一切现象都看作是在一个平面（例如 x—y 平面）里发生的，也就是说，应力分量、应变分量、位移分量等只是 x 和 y 两个坐标的函数。因此，在数学上弹性力学平面问题属于二维问题。由于二维弹性力学问题在数学分析上的简化，使得它成为弹性力学范畴内获得具体解析解的最典型部分之一。同时，它在岩土工程、机械、水工、建筑工程等方面也具有重要的实用价值。在平面问题中，既可以看到解决具体问题的方法，又可以进一步牢固掌握弹性力学的基本概念。

在本章中，先介绍弹性力学平面问题的两个基本组成部分——平面应变问题和平面应力问题，再概述求解弹性力学平面问题的两种基本方法——应力法和位移法，特别是利用应力函数及其导数在弹性体边界上的力学意义寻求应力函数的方法是本书所

使用的一种有效方法。为了扩大这一有效方法的使用范围，特在本章最后一节介绍了体力作用的变换。

第一节　平面应变问题和平面应力问题

一、平面应变问题

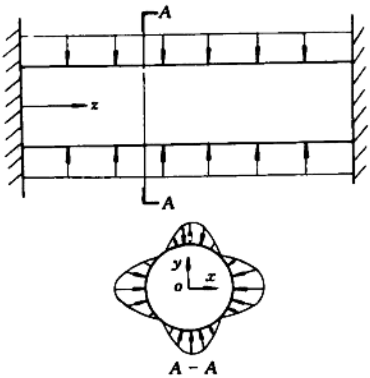


图 1—1—1　两端受固定约束的柱体

设有一弹性体，它是由母线平行于 z 轴的圆柱面或棱柱面和垂直于此轴的两端面（图 1—1—1）所限定；作用于此弹性体上的外力（包括体力和面力）垂直于此轴，沿此轴均匀分布，且这些力自相平衡；弹性体沿 z 轴方向所受的约束条件也不沿 z 方向变化，假定此弹性体的两端面是刚性固定的，则物体内部各点的 z 向位移分量 W 必为零，而沿 x 和 y 方向的位移分量 u、v 只是坐标 x 和 y 的函数，与坐标 z 无关。这就使得弹性体内所有平行于 xoy 平面的横截面上相应点的变形和应力是相同的。根据上述，可把这种弹性体的位移分量 u、v、w 表达为如下形式

$$\left.\begin{array}{l} u=u\ (x,\ y) \\ v=v\ (x,\ y) \\ w=0 \end{array}\right\} \qquad (1.1-1)$$

弹性体发生上述位移时，其所有各点的位移矢量均平行于 xoy 平面，所以把这种问题称为平面位移问题，但在习惯上常称为平面应变问题。

在地下工程中，横截面相同，处于相同埋深的水平巷道（图1—1—2，除靠近两端部分外）周围的受力和变形是平面应变问题的一例；图1—1—3所示很长的挡土墙（楔形体）问题是平面应变问题的又一例。

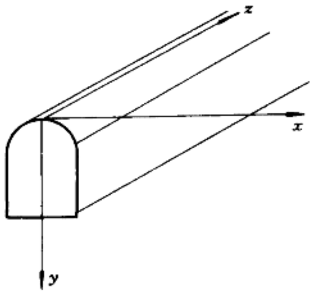


图1—1—2 水平巷道

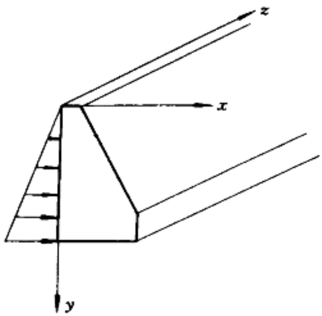


图1—1—3 挡土墙
（楔形体）

平面应变问题的应变分量与位移分量之间的关系（几何方程）为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix} \quad (1.1-2)$$

表示平面应变问题应力和应变间关系的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right]+(1+\mu)\alpha_1 T\\ \varepsilon_y&=\frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right]+(1+\mu)\alpha_1 T\\ \gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \quad (1.1-3)$$

显然，在平面应变问题中，由于ε_x、ε_y、γ_{xy}均为坐标x、y的函数，所以σ_x、σ_y、τ_{xy}、$T(x, y)$也是坐标x、y的函数。由于弹性体内相邻材料受z方向的约束而使z方向的正应变ε_z为零（$\varepsilon_z=0$），而自然使z方向的正应力σ_z不等于零，它为

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)-\alpha_1 ET \tag{1.1-4}$$

在上面各式中，

σ_x（σ_y）——正应力分量，分别是作用在垂直于x（y）轴的面上，且其方向沿着x（y）轴方向作用的应力。

τ_{xy}——剪应力分量，是作用在垂直于x轴面上，其方向沿着y轴方向作用的应力。根据剪应力互等定律，有$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。

对应力分量的正负号是依如下原则规定的：如果某个面的外法线方向沿着坐标轴的正方向，这个面就是正面，作用在正面上的应力以沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负。相反，如果某一面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个面就称为负面，作用在负面上的应力以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。根据这个规定，对正应力来说，和材料力学中的规定相同（拉应力为正，压应力为负），但是，对剪应力来说，和材料力学中的规定不完全相同。

ε_x（ε_y）——正应变分量，ε_x（ε_y）表示平行于x（y）轴的微线元单位长度的伸长量或相对伸长率，以线元的相对伸长为正，相对缩短为负。正应变分量正负号的这种规定，与正应力分量以拉伸为正，以压缩为负的正负号规定相对应。

γ_{xy}——剪应变分量，它表示xoy平面内在变形前相互垂直的两线元在变形后其间直角的改变量，以原直角减小为正，增大为负。

u（v）——物体受力后的总位移矢量在x（y）方向的投影；

α_1——物体的线膨胀系数；

$T=T(x, y)$——物体的变温场；

E、μ——分别为物体的弹性模量和波松系数。

若不计热应力，则上二式变为

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{2\ (1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1-3a)
$$

$$
\sigma_z = \mu\ (\sigma_x + \sigma_y) \qquad (1.1-4b)
$$

二、平面应力问题

平面应力问题所研究的是如图 1—1—4 所示薄板形式的弹性

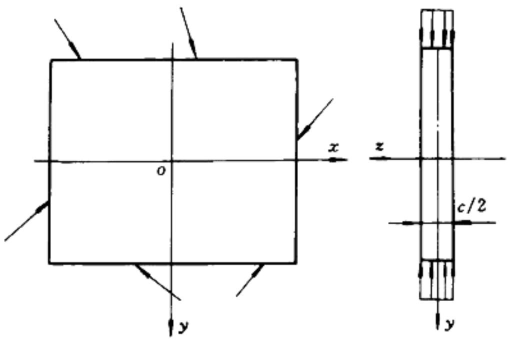


图 1—1—4　薄板形式弹性体

体。这种弹性体在一个坐标方向（例如 z 方向）的尺寸远小于其他两个坐标方向的尺寸。把 xoy 坐标面放置在薄板中面，z 轴放在板的厚度方向上。在此薄板边缘作用的面力矢量和板内的体力分量均位于 xoy 面或与 xoy 面平行的平面内（即 z 轴方向的面力分量 F_z 和体力分量 f_z 均为零），面力沿薄板厚度均匀分布或至少是对称于中面分布。体力和面力组成平衡力系。在垂直于 z 轴的板面上不受力，由于 z 方向的尺寸很小，所以，近似有 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$。也就是说，只存在 $\sigma_x = \sigma_x\ (x,\ y)$，$\sigma_y = \sigma_y\ (x,\ y)$，$\tau_{xy} = \tau_{xy}\ (x,\ y)$，

而与 z 轴垂直平面上的应力分量全部为零，这是平面应力状态下各应力分量所具有的特征。

具有平面应力状态的弹性力学问题称为平面应力问题。

平面应力问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\sigma_y\right]+\alpha_1 T\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\sigma_x\right]+\alpha_1 T\\\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\qquad(1.1-5a)$$

而平面应力问题 z 方向的应变 ε_z 为

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)+\alpha_1 T\qquad(1.1-6a)$$

利用上式可以计算薄板的厚度变化。

若不计热应力，则上二式变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\sigma_y\right]\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\sigma_x\right]\\\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\qquad(1.1-5b)$$

和

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\qquad(1.1-6b)$$

平面应变问题和平面应力问题是不同物理性质的两类问题，但是，下面即将看到，描述两类不同问题的数学关系却极为相似。这里，先对此两类问题比较如下：

（1）在平面应变问题中，$\varepsilon_z=0$，$\sigma_z\neq0$；在平面应力问题中，$\sigma_z=0$，$\varepsilon_z\neq0$。

（2）平面应变问题满足 $\varepsilon_z=0$ 的要求，但是，平面应力问题却建立于 $\sigma_z=0$ 的假设下，这个假设是不准确的，因此，平面应力问题是近似的。然而，平面应力问题的解已在实践中证明，其精度

是完全足够的。

(3) 把(1.1—3)式所示平面应变问题的物理方程同(1.1—5)式所示平面应力问题的物理方程进行比较可知，若将平面应力问题物理方程中的弹性常数 E、μ 进行如下的置换：

$$\left.\begin{aligned} E &\longrightarrow \frac{E}{1-\mu^2} \\ \mu &\longrightarrow \frac{\mu}{1-\mu} \\ \alpha_1 &\longrightarrow (1+\mu)\alpha_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.1—7a}$$

则平面应力问题的物理方程将变为平面应变问题的物理方程。同样的，若将平面应变问题物理方程中的弹性常数 E、μ 进行如下置换：

$$\left.\begin{aligned} E &\longrightarrow \frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2} \\ \mu &\longrightarrow \frac{\mu}{1+\mu} \\ \alpha_1 &\longrightarrow \frac{1+\mu}{1+2\mu}\alpha_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.1—7b}$$

则平面应变问题的物理方程将变为平面应力问题的物理方程。至于两种平面问题中的剪切模量 G，由于

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}\longrightarrow\frac{\dfrac{E}{1-\mu^2}}{2\left(1+\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)}=\frac{E}{2(1+\mu)}=G$$

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}\longrightarrow\frac{\dfrac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}}{2\left(1+\dfrac{\mu}{1+\mu}\right)}=\frac{E}{2(1+\mu)}=G$$

也就是说，对于剪切模量 G，在(1.1—7)式的 E、μ 置换下，并没有置换。由此可知，只要在弹性常数 E、μ 上进行(1.1—7)式所示的置换，则两种平面问题的物理方程就完全相同。

第二节　平面问题的建立及其解法

由于在本书中主要是用应力函数法求出半无限楔形体在外荷作用下的弹性应力解，所以，在本节前面的叙述中先不计热应力，在本节后面的位移解法中再讨论热应力问题。

一、平面问题的基本方程

1. 在直角坐标里

平面问题的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.2-1)$$

由几何方程（1.1—2）可得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\qquad(1.2-2)$$

ε_x、ε_y、γ_{xy}间的这个关系式称为变形连续方程（也叫协调方程、相容方程）。应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}必须满足这个方程，才能保证位移分量u和v的存在。如果任意选取应变函数ε_x、ε_y、γ_{xy}而不满足这个方程，则由三个几何方程中的任意两个求出的位移分量，将与第三个几何方程不能相容，这就表示，变形以后的物体就不再是连续的，而将发生某些部分相互脱离或相互嵌入的情况，这与变形连续的假定相违背。

平面问题的物理方程可写成如下的矩阵形式：

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\qquad(1.2-3)$$

其中，

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}\qquad(a)$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{b}$$

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & \text{对} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{称}\\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{1.2-4}$$

（平面应变问题）

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \text{对} & \\ \mu & 1 & \text{称}\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{1.2-5}$$

（平面应力问题）

2. 在极坐标里

平面问题的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0\\ &\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+f_\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{1.2-6}$$

在不计体力时，上式成为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\ &\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0\end{aligned}\right\}$$

在（1.2—6）式所示的两个方程中，它们的前两项分别与直角坐标平面问题的平衡微分方程（1.2—1）式相当，而此方程的第三项表明极坐标的特点，r 越小，最后一项的影响越大，当 $r=0$ 时（极坐标的原点），此方程已无法应用，因为此时最后一项为无穷大。

在（1.2—6）式所示的两个平衡微分方程中，包含有三个未知函数 σ_r、σ_θ、$\tau_{r\theta}$，所以问题是静不定的。因而，在求解弹性力学极坐标的平面问题时，与直角坐标时的情况一样，还必须考虑几

何方程（变形条件）和物理方程。

平面问题极坐标的几何方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r}\\ \gamma_{r\theta}&=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v}{r}\end{aligned}\right\}\tag{1.2-7}$$

在上式中，前两式的前一项和后一式中的前两项与直角坐标平面问题的几何方程（1.1—2）式相当，而第二、第三两式的后一项表示了极坐标的特点。显然，$\frac{u}{r}$是由于径向位移 u 产生的环向应变 ε_θ，$\left(-\frac{v}{r}\right)$反映了由于环向位移 v 所引起的剪应变 $\gamma_{r\theta}$。

如果弹性体的环向位移 $v\equiv0$，径向位移 u 只是 r 的函数，与 θ 无关，这种问题称为与极角 θ 无关的弹性力学平面问题。此时，（1.2—7）式变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_\theta&=\frac{u}{r}\\ \gamma_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\}$$

对于各向同性弹性体而言，各个方向的弹性性质都相同，加之极坐标和直角坐标一样，都是正交坐标，所以，极坐标里的物理方程与直角坐标里的物理方程具有相同的形式，只是把角码 x 和 y 分别改换成 r 和 θ。据此，可把平面极坐标里的物理方程写成与平面直角坐标里的物理方程相同的形式：

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\tag{1.2-8}$$

这里

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{Bmatrix}\tag{1.2-9}$$