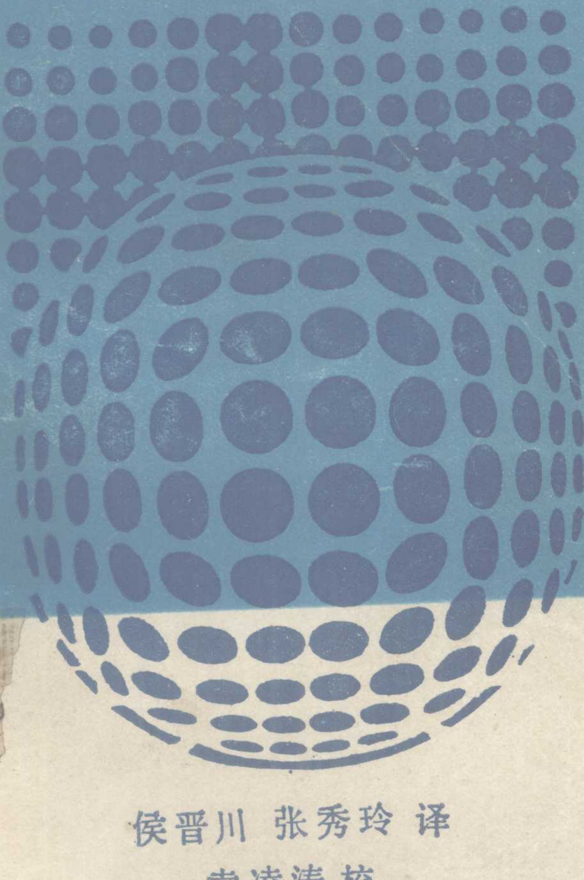
# 美数学竞
# 100题





侯晋川 张秀玲 译

袁凌涛 校

陕西师范大学出版社

# 北美数学竞赛100题


(加 拿 大) K.S. Williams

K. Hardy

侯晋川　张秀玲　译

袁凌涛　校



陕西师范大学出版社

北美数学竞赛 100 题

(加 拿 大)K.S. Williams

K. Hardy

侯晋川　张秀玲　译

袁凌涛　校

陕西师范大学出版社出版发行

(西安市陕西师大 120 信箱)

陕西省新华书店经销　陕西师范大学印刷厂印刷

开本 787×1092　1／32　印张 5.375　字数 112 千字

1990 年 9 月第 1 版　　1990 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—1500

ISBN 7-5613-0342-4

G·287　定价:2.00 元

# 译 者 序

北美洲最有声望的大学生数学竞赛要算威廉.洛厄尔.帕特兰姆数学竞赛(*William Lowell Putnam Mathematical Competition*)。这一竞赛始于*1938*年，每年举行一次，为年轻的数学爱好者提供了一个富有挑战性的竞争机会,每年都吸引了美国、加拿大各大学成千上万的大学生参加这一竞赛。本书原名《红皮书》(《*THE RED BOOK*》,*1988*)，主要就是为参加这一数学竞赛的大学生而写的一本最新问题集，共收集了*100*道新颖别致，饶有兴味的数学问题，并附有提示、解答以及问题的来源和出处,而且相当一部分问题我国具有高中水平的读者就有能力加以解决。虽不能宣称本书中给出的答案是"最 可能"的，但这里的解法确实是相当优美并富有启发性的。本问题集可以作为高中及大学一、二年级水平的各类数学竞赛的赛前训练之用，也可以作为命题参考。对于数学爱好者用以加强自己提出和解决数学问题之能力，本书也是颇有价值的。

译 者

*1989*年*10*月

# 目 录

# 记 号

| | |
|---|---|
| $[x]$ | 不大于$x$的最大整数,这里$x$是实数。 |
| $\ln x$ | $x$的自然对数。 |
| $exp\ x$ | 即指数函数$e^x$。 |
| $\Phi(n)$ | 对自然数$n$定义的欧拉$totient$函数。 |
| $\mathrm{GCD}(a,b)$ | 整数$a$和$b$的最大公因数。 |
| $\left(\frac{n}{p}\right)$ | 勒让德记号。当整数$n$关于奇素数$p$是模二次剩余时取$+1$,否则取值$-1$。 |
| $\binom{n}{k}$ | 二项系数$n!/k!(n-k)!$，其中$n$和$k$都是非负整数(当$n<k$,$\binom{n}{k}=0$)。 |
| $gcd(f(x))$ | 多项式$f(x)$的次数。 |
| $\underline{v'}$ | 行向量$\underline{v}$的转置。 |
| $\tau(n)$ | 正整数$n$的不同素因子的个数。 |
| $f(x)$ | 函数$f(x)$对于$x$的导数。 |
| $datA$ | 方阵$A$的行列式。 |
| $Z$ | 有理整数全体。 |
| $Q,R,C$ | 分别表示有理数域，实数域和复数域。 |

# 问　题

人类始终只提出自己能够解决的任务，因为只要仔细考察就可以发现，任务本身，只有在解决它的物质条件已经存在或者至少是在形成过程中的时候,才会产生.

卡尔.马克思(1818—1883)

《马克思恩格斯选集》第二卷第83页.

**1.** 令 $p$ 为一奇素数,$\omega=\exp(2\pi i/p)$.计算乘积

$$E(p)=(\omega^{r_1}+\omega^{r_2}+\ldots+\omega^{r_{(p-1)/2}})(\omega^{n_1}+\omega^{n_2}+\ldots+\omega^{n_{(p-1)/2}}) \tag{1.0}$$

的值，其中 $r_1,\ldots,r_{(p-1)/2}$ 表示以 $p$ 为模的 $(p-1)/2$ 二次剩余，而 $n_1,\ldots,n_{(p-1)/2}$ 是以 $p$ 为模 $(p-1)/2$ 的非二次剩余.

2. 令$k$为一正整数.求满足下列条件

$$\begin{cases} |x|\leqslant k & |y|\leqslant k & |z|\leqslant k \\ |x-y|\leqslant k, & |y-z|\leqslant k, & |z-x|\leqslant k. \end{cases} \tag{2.0}$$

的三元整数组$(x,y,z)$的个数$N(k)$.

3　令 $p\equiv 1 \pmod 4$ 为一素数,则存在唯一整数 $w\equiv w(p)$ 使得

$$w^2\equiv -1 \pmod p),\quad o<w<\frac{p}{2}.$$

(例如，$w(5)=2$, $w(13)=5$.)　求证：存在满足 $ad-bc=1$ 的整数 $a,b,c,d$ 使得

$$pX^2+2wXY+\frac{(w^2+1)}{p}Y^2$$
$$\equiv(aX+bY)^2+(cX+dY)^2.$$

(例如:当 $p=5$ 时有

$$5X^2+4XY+Y^2\equiv X^2+(2X+Y)^2;$$

而当 $p=13$ 时有

$$13X^2+10XY+2Y^2\equiv(3X+Y)^2+(2X+Y)^2.)$$

4. 设 $d_r(n)$ 是 $n$ 的具形式 $4k+r$ 的正整数因子的个数，其中 $r=0,1,2,3$. 令 $m$ 是正整数。求证

$$\sum_{n=1}^{m}(d_1(n)-d_3(n))=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left[\frac{m}{2j+1}\right]. \tag{4.0}$$

5. 求证方程

$$y^2=x^3+23 \tag{5.0}$$

没有整数解.

6. 设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 是正定二次型．求证不等式

$$(f(x_1,y_1)f(x_2,y_2))^{1/2}f(x_1-x_2,y_1-y_2) \tag{6.0}$$
$$\geqslant(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

对所有实数 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 都成立.

7. 设 $R,S,T$ 是三个不全相同的实数．请给出一个条件使得这个条件只被下列三个三元组中的一个所满足．

[1]

$$
(7.0)\qquad \begin{cases} (R, S, T); \\ (T,\ -S+2T,\ R-S+T) \\ (R-S+T,\ 2R-S,\ R). \end{cases}
$$

8. 设 $ax^2+bxy+cy^2$ 和 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 是两个正定二次型且不成比例．求证

$$
(8.0)\qquad (aB-bA)x^2+2(aC-cA)xy+(bC-cB)y^2
$$

是不定型．

9. 求极限

$$
(9.0)\qquad L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}
$$

的值．

10. 求证不存在常数 $c\geqslant 1$ 使得对所有满足 $n\geqslant m$ 的正整数 $n, m$ 都有

$$
(10.0)\qquad n^c\phi(n)\geqslant m^c\phi(m)
$$

成立．

11. 设 $D$ 是一个无平方因子的整数，$D>1$ 且存在正整数 $A_1, A_2, B_1, B_2$ 使得

$$
(11.0)\qquad \begin{cases} D=A_1^2+B_1^2=A_2^2+B_2^2, \\ (A_1, B_1)\neq(A_2, B_2). \end{cases}
$$

求证

$$
2D(D+A_1A_2+B_1B_2)
$$

---

① 译者注．$\phi(n)$ 为欧拉 $\phi$ 函数(即 Euler's totient function)．$\phi(n)$ 的值是不大于 n 的且与 n 互素的正整数的个数．若 n 的素因子分解为 $a^p b^q c^r\ldots$，则 $\phi(n)=n(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})\ldots$．例如，$\phi(12)=12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=4$.

和

$$2D(D+A_1A_2-B_1B_2)$$

都不是某整数的平方。

12. 用 $Q$ 和 $R$ 分别表示有理数域和实数域，设 $K$ 是 $R$ 中包含 $Q$ 和 $\sqrt{1985+31\sqrt{1985}}$ 的最小子域，而 $L$ 是 $R$ 中包含 $Q$ 和 $\sqrt{3970+64\sqrt{1985}}$ 的最小子域，证明 $K=L$.

13. 设$k$和$l$为正整数且满足:

$\mathrm{GCD}(k,5)=\mathrm{GCD}(l,5)=\mathrm{GCD}(k,l)=1$,

$-k^2+3kl-l^2=F^2$

其中$\mathrm{GCD}(F,5)=1$。求证方程组

$$\begin{cases} k=x^2+y^2 \\ l=x^2+2xy+2y^2 \end{cases} \tag{13.0}$$

恰好有两对关于$x$和$y$的整数解.

14. 设$r$和$s$是非零整数,证明方程

$$(r^2-s^2)x^2-4rsxy-(r^2-s^2)y^2=1 \tag{14.0}$$

没有整数解$x$和$y$.

15. 求积分

$$I=\int_0^1 \ln x\ln(1-x)dx \tag{15.0}$$

的值.

16. 求解递推关系

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a(k)=\frac{n}{n+1},\quad n=1,2,\ldots. \tag{16.0}$$

17. 令$n$和$k$为正整数,$p$为一素数,满足

$$p>(n^2+n+k)^2+k$$

求证序列

(17.0) $n^2,\ n^2+1,\ n^2+2,\ \ldots,\ n^2+l,$

其中 $l=(n^2+n+k)^2-n^2+k$，中含有一对整数 $(m,\ m+k)$，使得

$$\left(\frac{m}{p}\right)=\left(\frac{m+k}{p}\right)=1。$$

18. 令

$$a_n=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2},\quad n=1,2,\ldots.$$

无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛吗? 如果收敛，它的和是什么?

**19.** 设 $a_1,\ldots,a_m$ 为 $m(\geqslant 2)$ 个实数，记

$$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\qquad n=1,2,\ldots,m.$$

求证

(19.0) $$\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\leqslant 12\sum_{n=1}^{m}a_n^2$$

20. 对所有正整数 $n$，求出

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

的值。

21. 设 $a,b$ 为互素的正整数。对于正整数 $k$，记 $N(k)$ 为方程

(21.0) $ax+by=k,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$

的整数解的个数，求出极限

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{N(k)}{k}$$

的值.

22. 设$a,d,r$为正整数,对于$k=0,1,2,\ldots$,记

(22.0) $$u_k=u_k(a,d,r)=\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+r)d)}$$

求出和

$$S=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

的值,其中$n$为正整数.

23. 设$x_1,\ldots,x_n$为$n(>1)$个实数,令

$$x_{ij}=x_i-x_j,\ (1\leqslant i<j\leqslant n).$$

又设$F$是$\frac{n(n-1)}{2}$个变量$x_{ij}$的实值函数使得对所有$x_1,\ldots,x_n$,不等式

(23.0) $$F(x_{12},x_{13},\ldots,x_{(n-1)n})\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

都成立。求证:如果$\sum_{k=1}^{n}x_k\neq 0$,(23.0)中等号不能成立.

24. 设$a_1,\ldots,a_m$是满足$\sum_{n=1}^{m}a_n\neq 0$的$m(\geqslant 1)$个实数,求证不等式.

$$(24.0)\qquad \frac{\left(\sum_{n=1}^{m} na_n^2\right)}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^2} > \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

25. 求证：存在无限多个不能表示为形如 $n^2+p$ 的正整数，其中 $n$ 为正整数，$p$ 为素数。

26. 求无穷级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

的值.

27. 设 $p_1,\ldots,p_n$ 为 $n(\geqslant 1)$ 个互不相同的整数，且 $f_n(x)$ 为 $n$ 次多项式

$$f_n(x)=(x-p_1)\ldots(x-p_n)$$

求证:多项式

$$g_n(x)=(f_n(x))^2+1$$

不能表为两个非常数的整系数多项式之积。

28. 甲，乙二人进行一项比赛．甲胜的概率为 $p$，乙胜的概率为 $q$，平局的概率为 $r$。开始时，甲有 $m$ 元钱，乙有 $n$ 元钱，每一场比赛完毕，胜方从负方取走 1 元，如果甲、乙二人都同意一直比赛到他们中有一人输掉所有的钱，那么，甲赢得全部钱的概率是多少？

29. 设 $f(x)$ 是首项系数为 1 的 $n(\geqslant 1)$ 次复系数多项式。令 $x_1,x_2,\ldots x_n$ 为 $f(x)$ 的 $n$ 个复根．多项式 $f(x)$ 的判别式 $D(f)$ 为复数

(29.0) $$D(f)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$$

用$D(f)$表示$f(x^2)$的判别式.

30. 求证:对于每个正整数$n$,存在$xy-$平面中的圆使之恰好包含$n$个格点.

31. 设$n$为一个给定的非负整数.确定方程

(31.0) $$x+2y+2z=n$$

的非负整数解$x,y,z$的组数$S(n)$.

32. 设$n\geqslant 2$为一固定整数,确定在区间$(0,a)$上有界且适合函数方程

(32.0) $$f(x)=\frac{1}{n^2}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{x+a}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{x+(n-1)a}{n}\right)\right)$$

的所有函数$f(x)$

33. 用$I$表示闭区间$[a,b],a<b$. 如果对所有的$x\in I$, $f(x)\neq g(x)$, 就说两函数$f(x)$, $g(x)$在$I$上是完全不同的。设$q(x)$和$r(x)$是$I$上定义的函数使得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2+q(x)y+r(x)$$

有在$I$上两两完全不同的三个解$y_1(x)$, $y_2(x)$及$y_3(x)$。如果$z(x)$是第四个解且使得函数对$z(x)y_i(x)$是完全不同的, $i=1, 2, 3$。求证存在常数$k$使

(33.0) $$z=\frac{y_1(ky_2-y_3)+(1-k)y_2y_3}{(k-1)y_1+(y_2-ky_3)}$$

34. 记$a_n$, $n=2, 3, \dots$, 为乘积$b_1b_2\dots b_n$的各种加括号方式的个数,使得加括号后任何时候都只有两个$b_i$相

乘。例如，由于 $b_1b_2$ 只有一种加括号方式 $(b_1b_2)$，故 $a_2=1$。 由于 $b_1b_2b_3$ 有两种加括号方式，即 $(b_1b_2)b_3$ 和 $b_1(b_2b_3)$，故 $a_3=2$。求出 $a_n$ 的表达式。

35. 求极限

(35.0) $$L=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}\tan(y\sin x)dx$$

的值

36. 设 $\varepsilon$ 为一实数，$0<\varepsilon<1$. 求证存在无限多个整数 $n$ 满足

(36.0) $$\cos n\geqslant 1-\varepsilon。$$

37. 确定所有满足如下条件的函数 $f$，$f$ 处处可微且对所有 $xy\neq 1$ 的实数 $x$，$y$，都有

(37.0) $$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

38. 取圆周内或圆周上一点 $X$，通过 $X$ 引两条互相垂直的弦 $AC$ 和 $BD$（当 $X$ 在圆周上时，可允许退化的情形，即有一弦为直径，另一弦收缩成一点）。对 $X$ 所有可能的选择，求出和 $S=|AC|+|BD|$ 的最大值和最小值。

39. 对于 $n=1,2,\ldots$，定义集合 $A_n$ 为

$$A_n=\begin{cases}\{0,2,4,6,8,\ldots\}, & 当 n\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ \left\{0,3,6,\ldots,\dfrac{3(n-1)}{2}\right\}, & 当 n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases}$$

是否有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n+k}\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n+k}\right)$$

成立？

40. 进行一系列重复的独立试验，每次试验成功的概率为 $p$，失败的概率为 $q=1-p$，试验继续做下去，直到连续 $n$ 次都获得成功为止。用变量 $X$ 表示达到这一目的所需试验的次数。如果 $P_k = Prob(X=K)$，试确定概率生成函数 $P(x)$:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k \tag{40.0}$$

41. 设 $A.B.C.D$ 是某圆周上四点使 $ABCD$ 成为一凸四边形。试用 $a=|AB|, b=|BC|, c=|CD|, d=|DA|$ 表示该圆之半径。

42. 设 $ABCD$ 为一凸四边形。$P$ 为 $ABCD$ 外面一点，满足 $|AP|=|PB|, \angle APB = 90°$。类似定义点 $Q$，$R$，$S$。求证线段 $PR$ 和 $QS$ 长度相等且相互垂直。

43. 求满足

$$(x+y+z+w)^2-(x^2+2z)(y^2-2w) \tag{43.0}$$

$$\equiv (p(x,y,z,w))^2-(x^2-2z)(q(x,y,z,w))^2$$

的实系数多项式 $p(x,y,z,w)$ 和 $q(x,y,z,w)$。

44. 设 $\mathbb{C}$ 为复数域，$f$: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为一函数，满足条件：对所有 $z\in\mathbb{C}$ 及 $w=0,1,i$，有

$$\begin{cases} f(0)=0, \\ |f(z)-f(w)|=|z-w| \end{cases} \tag{44.0}$$

求证：$f(z)=f(1)z$ 或 $f(1)\bar{z}$，其中 $|f(1)|=1$。

45. 如果 $x,y$ 为有理数，使得

$$\tan \pi x = y, \tag{45.0}$$

求证存在整数 $k$ 使 $x=\frac{k}{4}$ 且 $k\neq 2 \pmod 4$。

46. 设 $P$ 为三角形 $ABC$ 内一点，$AP$ 交 $BC$ 于 $D$，$BP$ 交 $CA$ 于 $E$，$CP$ 交 $AB$ 于 $F$。求证

$$\frac{|PA||PB|}{|PD||PE|}+\frac{|PB||PC|}{|PE||PF|}+\frac{|PC||PA|}{|PF||PD|}\geqslant 12. \tag{46.0}$$

47. 设$l$，$n$为满足条件

$$1\leqslant l<n,\ \mathrm{GCD}(l,n)=1$$

的正整数，$k$为满足

$$1\leqslant k<n,\ kl\equiv -1(\bmod n)$$

的唯一整数。令$M$为$k\times l$矩阵，其第$(i,j)$元为

$$(i-1)l+j$$

又令 $N$ 为 $k\times l$ 矩阵，它是把 $M$ 的每一列中元颠倒顺序后作为矩阵的行而得到。求 $M$ 的 $(i,j)$ 元与 $N$ 的 $(i,j)$ 元之间以 $n$ 为模的同余关系。

48. 设 $m,n$ 为整数，$1\leqslant m<n$，令 $a_{ij}$，$i=1,2,\ldots,m$；$j=1,2,\ldots,n$，为 $mn$ 个不全为零的整数并记

$$a=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}]|a_{ij}|.$$

求证方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{48.0}$$

有不全为零的整数解 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$，满足条件

$$|x_j|\leqslant[(2na)^{m/n-m}],\ 1\leqslant j\leqslant n$$

49. 刘维尔 (*Liouville*) 曾证明了：如果 $f(x)$，$g(x)$ 为