面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

修订版

郝志峰　谢国瑞　方文波　汪国强　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

线性代数

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

修订版

郝志峰　谢国瑞　方文波　汪国强　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划系列教材之一，是大学本科(非数学)各专业线性代数课程的教材，内容包括线性代数方程组、矩阵、行列式、矩阵的秩和线性代数方程组的解、向量空间初步、矩阵特征值问题和线性变换等共7章。全书取材的深广度合适，注意联系应用，符合大学本科教学对本门课程的教学要求与实际需要。本书的起点较低、材料丰富，内容展开的思路清晰，易读、好教，有利于读者掌握知识、发展思维与提高能力。本书另有配套的学习指导与典型例题。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郝志峰等主编. —3版(修订本). —北京：高等教育出版社，2008.10

ISBN 978-7-04-024900-2

Ⅰ.线… Ⅱ.郝… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第140405号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张 志
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1999年6月第1版
开 本	787×960 1/16		2008年10月第3版
印 张	16.25	印 次	2008年10月第1次印刷
字 数	300 000	定 价	19.00元

物料号 24900-00

面向21世纪课程教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

修订版前言

本书在原书第二版的基础上修订而成，自1999年第一版①、2003年第二版出版以来，得到广大师生的普遍好评，编者也在实践编写指导思想中积累了新的经验，这次修订的目标是力求使本书能更好地符合大学工科、经济、管理等本科专业对线性代数课程的教学需要。

线性代数作为高等学校本科数学基础课程中的一门重要的必修课，是进一步学习许多相关的重要应用数学分支(如运筹学、数理统计、应用微分方程、矩阵论等)的必备基础。因此，作为一门30—50学时左右的基础课而言，一方面，希望能较好体现“课程教学基本要求”，保持教学内容的稳定性；另一方面，希望能够反映发展，体现学科的生动面与广泛应用，以适应高等教育大众化及时代发展带来的新要求。这次的修订版则试图把握好这一尺度，吸收、借鉴国内外教材编写的成功经验，根据实际情况和需要，按照学生的认识规律，从满足应用的角度来介绍线性代数，力求获得较宽的适用面。教材中的一些写法力图改变传统线性代数抽象难懂的形象，以学生为本，作为应用的数学技术基础来写，力求与横向的数学必修课——高等数学、概率论与数理统计建立一些结合点，联合起来构筑好大部分学生的数学基础。

本教材继续保持了从线性代数方程组的解与初步的应用入手，自然过渡到讨论矩阵代数，并到必要时再介绍行列式，以及较抽象的向量理论及向量空间和线性变换(这是修订版新增加的、可根据学时数而定的选讲内容)，且随时注意回到线性代数方程组中去解释。在展开教学内容时，时刻注意培养学生的思维能力、习惯并调动其学习兴趣及主动性。例如，在讨论矩阵对角化及二次型中，以示例形式介绍在高等数学(多元函数极值、常微分方程)中的应用，以及概率统计中样本方差、自由度计算方面的应用，并且还将进一步介绍若尔当典范形(一般称为“标准形”)的概念。这样的写法，使得本教材承上启下的作用也显现出来，既可作为研究生矩阵课程的桥梁，也可借此回顾、总结、提高前面所学内容。

此次修订总体上考虑三大方面：(1) 将数学基础课程教材作为系列教材出版，除《线性代数》外，还包括《高等数学(一元微积分)》、《高等数学(多元

---

① 第一版是参考书目[4]，由8章内容组成，该书曾获2001年上海市数学成果奖(二等奖)，教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖.

微积分)》、《概率论与数理统计》，既体现对学生在线性代数方面的基本数学素养的要求，同时加强线性代数与微积分、概率统计的相互引用及联系，有效地激发学生的学习兴趣；(2) 体现将“数学建模”融入主要数学基础课的思想，将原教材的应用特色再提高一个层次；(3) 从发现问题、提出问题的角度组织教材，培养学生的创新思想，把原教材中分析问题、解决问题的过程提高一个层次。本次修订主要包括以下几个方面：根据以上考虑，增加了一些例题、习题，改进了若干重要内容的表述，还增加新的一章，即第7章“线性变换”；对发现的笔误、印刷错误给予了更正；调整了参考书目；将习题答案改成只给出奇数号题的答案；删去了原教材所附的“历届研究生入学考试数学试卷中线性代数题”，而将这部分内容置于配套的《线性代数学习指导与典型例题》中。

这次修订工作是在华南理工大学和西交利物浦大学校领导的大力支持下完成的。感谢华南理工大学理学院、西交利物浦大学数理教学中心(MPTC)及二校教务部门的多位教授、老师对本书给予的关心和帮助。

编　者
于广州大学城
2008年7月

目　　录

第 1 章　线性代数方程组(消元法)

历史上，线性代数的第一个问题是关于解线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

的问题. 我们就从用消元法解最简单的二元线性代数方程组开始讨论这一应用十分广泛的课题，并从而看出研究矩阵的必然性.

1.1　解线性代数方程组的消元法

1.1.1　二元线性代数方程组

在平面直角坐标系中，二元线性方程的图像(坐标能满足方程的点集)是条直线. 例如，方程

$$2x+y=8,\ 即\ y=8-2x$$

在将它的两个解 $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$ 在坐标平面上用点表示后，联线即得此方程的图像(图 1-1). 事实上，此直线上任一点的坐标正是该方程的一个解，反之，以方程的任一解作为坐标，也正是这直线上的一个点. 这样从几何上也看出一个二元线性方程有无限多解的事实.

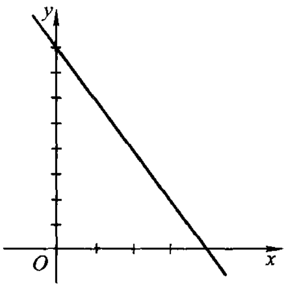


图 1-1

在实际问题中常要对同时出现的若干个线性方程作为一个整体来考虑，需求出满足所有方程的未知数，这就是解线性代数方程组. 例如，将

$$x+y=3 \tag{1-2}$$

$$2x-3y=-4 \tag{1-3}$$

两个方程作为整体来讨论，就成一**线性方程组**(system of linear equations). (1-2)是方程组的第 1 个方程，而(1-3)是第 2 个方程. 对于线性方程组，其重要的求解方法是消元法，即通过对方程组作**同解变形**(或称**等价运算**或变

形)使各个方程变成分别各含一个未知数(也称变量)，并能求出其值，从而得到整个方程“组”的解，这个解当然地应该也是由数组表示的.

方程组的**等价变形**有以下三类：

1. 交换组内任两个方程的次序(或编号)；
2. 任一方程乘一非零常数；
3. 任一方程经数量倍(即在两端乘同一常数)后加到另一方程去.

例1 试用方程组等价变形法解方程组

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ 2x-3y=-4 & (1-3) \end{cases}$$

解 作第3类变形，将(1－2)乘(－2)后加到(1－3)去，得到

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ -5y=-10 & (1-3') \end{cases}$$

这是与原方程组同解的. 在(1－3′)两端乘$\left(-\frac{1}{5}\right)$，得

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ y=2 & (1-3'') \end{cases}$$

再作第3类变形，将(1－3″)乘(－1)后加到(1－2)去，得

$$\begin{cases} x=1 & (1-2') \\ y=2 & (1-3'') \end{cases}$$

这显然与原方程组也同解，但目前已明显表出解，故方程组的解是2维数组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

线性代数方程组的解有三种可能的情形：具有确定的解，无解，或者有无限多个解.

例2 试用方程组等价变形解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ -4x+6y=2 & (1-4) \end{cases}$$

解 作第3类等价变形，将(1－3)乘2后加到(1－4)去，得

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ 0x+0y=-6 & (1-4') \end{cases}$$

如果方程组有解则必成立

$$0=-6 \qquad (1-4'')$$

而这是不可能的，故知方程组无解.

例3 试用方程组等价变形解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ -4x+6y=8 & (1-5) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形，将(1－3)乘 2 后加到(1－5)去，得等价方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ 0x-0y=0 & (1-5') \end{cases}$$

这时的方程(1－5′)是个平凡等式 0＝0，于是未知数 x、y 所应适合条件的信息，从方程组变成等价的实质上只是单个方程

$$2x-3y=-4 \tag{1-3}$$

而这又等价于

$$y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x$$

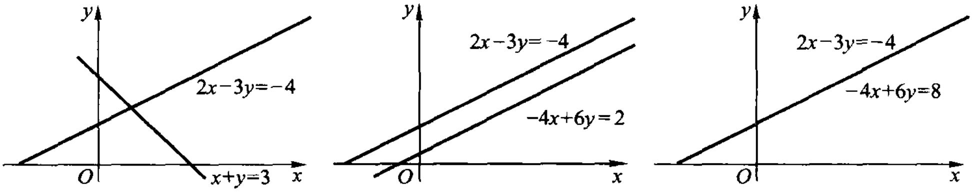
这样，题给方程组有无限多个解，解集是$\left\{\left.\begin{bmatrix} k \\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3} \end{bmatrix}\right| k\in\mathbf{R}\right\}$或迳表成解为

$$\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{2}{3}k+\dfrac{4}{3} \end{cases}，k \text{ 是任意实数，}$$

写作

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k \\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3} \end{bmatrix}，k \text{ 是任意实数.}$$

如图 1－2(a)、(b)、(c)分别显示例 1、2、3 三个二元线性方程组解的三种状况之几何意义：



(a) 一对相交直线有惟一公共点 (b) 一对平行直线无公共点 (c) 一对重合直线每一点都是公共点

图 1－2

练习 1 解下列方程组，并给出几何解释：

(1) $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -6x+2y=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -4x-6y=-8 \end{cases}$

1.1.2 高斯－若尔当消元法

将具有相同未知数的多个线性方程看成一个整体，称为**线性方程组**. 若一

个方程组含有 m 个方程、n 个未知数，常简称为 $m\times n$ **方程组**. $m\times n$ 方程组的解应是 n 维数组，将解数组各个分量依序代未知数时能使 m 个方程全部成立.

回顾上一段，用三类等价运算解 2×2 方程组的过程，那里是依照这样的目标进行的：通过三类等价运算，先用第 1 个方程，将方程组第 1 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 1 个方程中成 1，其他方程中全为 0；再用第 2 个方程将第 2 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 2 个方程中成 1，其他方程中全为 0，如此等等. 由于整个过程只是通过方程组等价运算变各个方程的系数，为简化计，可省写未知数，用列表形式凸现其系数的变化过程. 可将例 1 的计算重现于下：表 1 给出的例 1 的原方程组，r_1 是第 1 行(row)是方程(1-2)的系数，r_2 是第 2 行是方程(1-3)的系数，而常数列(column)由方程右端的常数组成.

表 1

	x	y	常数列
r_1	1	1	3
r_2	2	-3	-4

经等价运算 $r_1\times(-2)+r_2$，得

表 2

r_1	1	1	3
r_2'	0	-5	-10

经运算 $r_2'\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)$，得

表 3

r_1	1	1	3
r_2''	0	1	2

经运算 $r_2''\times(-1)+r_1$，得

表 4

r_1'	1	0	1
r_2''	0	1	2

第 1 个未知数 x 列的位置成$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，第 2 个未知数 y 列的位置成$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，因原方程组与表 4 代表的方程组

$$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

同解，故这就是方程组的解，或者说，此时常数列位置成为方程组的解$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

这样求方程组解的方法称为**消元法**(elimination)或一般称为**高斯**① - **若尔当**②(Gauss - Jordan)**消元法**.

例 4 用高斯 - 若尔当消元法解 3×3 方程

$$\begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ 3x+2y+2z=9 \\ 2x-3y-3z=6 \end{cases}$$

解 按上列步骤，列表运算如下：

		x	y	z		
表 1	r_1	①	-2	2	-1	×(-3) ×(-2)
	r_2	3	2	2	9	
	r_3	2	-3	-3	6	
表 2		1	-2	2	-1	
		0	8	-4	12	
		0	1	-7	8	
表 3		1	-2	2	-1	
		0	①	-7	8	×(-8)
		0	8	-4	12	
表 4		①	-2	2	-1	
		0	①	-7	8	
		0	0	(52)	-52	$\times\left(\frac{1}{52}\right)$

① Gauss, Carl Friedrich 是德国 18、19 世纪之交(1777 年 4 月 30 日生于德国不伦瑞克，1855 年 2 月 23 日卒于格丁根)最伟大的数学家、天文学家和物理学家，是近代数学的奠基人之一. 在历史上和阿基米德、牛顿并列，同享盛名. 高斯自小就表现出非凡的数学思维能力，是老师和长辈们心目中的"神童"，并终因其卓越成就而被世界数学家称为"数学王子".

当然，高斯被认为是最伟大的数学家之一，绝非由于这个简单的消元法，但有意思的是，正因为这个消元法而使高斯的名字最常被人们提到.

② Jordan, Camille 法国著名数学家，1838 年 1 月 5 日生于法国里昂的一个名门望族，17 岁以优异成绩考入巴黎综合工科学校，1861 年发表博士论文于《综合工科学校杂志》，他在 1881 年被选为法兰西科学院院士，1895 年又被选聘为彼得堡科学院院士. 1921 年 1 月 21 日逝世于巴黎.

	1	−2	2	−1	
表 5	0	1	−7	8	× (7)　× (−2)
	0	0	1	−1	

	1	−2	0	1	× (2)
表 6	0	1	0	1	
	0	0	1	−1	

	1	0	0	3
表 7	0	1	0	1
	0	0	1	−1

这就得到方程组的解是$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

从计算过程看出，在表 1 中是利用带圈的数字 1 将第 1 列即 x 所在列变成$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$的，在表 3 中，是利用带圈数字 1 将其下的 8 变成 0，从而第 2 列成$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，称表 4 中三个带圈数字(位置)是第 1、2、3 次消元的**主元(位置)**，而表 2 中进行的将第 2、3 行交换位置相当于不愿把数字 8 作第 2 次消元的主元，而要用数字 1 作为主元，故做交换两行位置这件事相当于**选**主元. 而选主元的目的可以是为了便于运算的进行(像本例就是)，或是为了提高运算的精度，也可能是迫不得已而为之.

例 5　试用高斯－若尔当消元法(常简称 G－J **消元法**)解方程组

$$\begin{cases} -3x+7y+2z=3 \\ 2x+4y-3z=-1 \\ x-3y+7z=2 \end{cases}$$

解　将上例的列表解答过程写成更紧凑的简化形式，有

	x	y	z		等价运算	记　号
	−3	7	2	3		
	2	4	−3	−1		r_{13}
	1	−3	7	2		

续表

	x	y	z		等价运算	记　号
	①	-3	7	2	$\times(-2)$　$\times(3)$	$r_{12}(-2)$
	2	4	-3	-1		
	-3	7	2	3		$r_{13}(3)$
	1	-3	7	2	$\times(3)$	$r_2\left(\frac{1}{10}\right)$
	0	⑩	-17	-5	$\times\left(\frac{1}{10}\right)$　$\times(2)$	$r_{21}(3)$
	0	-2	23	9		$r_{23}(2)$
	1	0	$\frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}$		$r_3\left(\frac{10}{196}\right)$
	0	1	$-\frac{17}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\times\left(-\frac{19}{10}\right)$	$r_{32}\left(\frac{17}{10}\right)$
	0	0	$\frac{196}{10}$	8	$\times\left(\frac{10}{196}\right)$　$\times\left(\frac{17}{10}\right)$	$r_{31}\left(-\frac{19}{10}\right)$
	1	0	0	$-\frac{27}{98}$		
	0	1	0	$\frac{19}{98}$		
	0	0	1	$\frac{20}{49}$		

故方程组的解是 3 维数组，横写成行是$\left(-\frac{27}{98}, \frac{19}{98}, \frac{20}{49}\right)$. 即解为

$$x=-\frac{27}{98},\ y=\frac{19}{98},\ z=\frac{20}{49}$$

在表中已对方程组所作的等价运算用了今后通用的简记法：

1. 对第 1 类运算记成如 r_{13}，表示将组内的第 1、第 3 个方程(即表的第 1、第 3 行)交换位置.

2. 对第 2 类运算记成如 $r_2\left(\frac{1}{10}\right)$，表示将第 2 个方程(即表的第 2 行)乘常数$\frac{1}{10}$.

3. 对第 3 类运算记成如 $r_{12}(-2)$，表示将组内第 1 个方程乘常数(-2)后加到组内第 2 个方程去(这样,改变了组内的第 2 个方程的形式,第 1 个方程没有改变).

例 6　试用 G－J 消元法解方程组

$$\begin{cases}x-2y+z=3\\2x-3y-z=7\\5x-8y-z=20\end{cases}$$

解 列表计算如下：

	x	y	z		
	①	−2	1	3	$r_{12}(-2)$
	2	−3	−1	7	
	5	−8	−1	20	$r_{13}(-5)$
	1	−2	1	3	$r_{21}(2)$
	0	①	−3	1	
	0	2	−6	5	$r_{23}(-2)$
	1	0	−5	5	
	0	1	−3	1	
	0	0	0	3	

到这里，已知题给方程组与方程组

$$\begin{cases}x-5z=5\\y-3z=1\\0\quad=3\end{cases}$$

等价，此方程组因含有“0 = 3”这样永远不能成立的方程而无解. 故题给方程组无解. 常称无解的方程组为**矛盾方程组**或**不相容方程组**.

例7 试用 G－J 消元法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y-3z=-6\\-x-y+2z=4\\x+2y+z=2\end{cases}$$

解 列表计算如下：

	x	y	z		
	3	4	−3	−6	r_{13}
	−1	−1	2	4	
	1	2	1	2	
	①	2	1	2	$r_{12}(1)$
	−1	−1	2	4	
	3	4	−3	−6	$r_{13}(-3)$
	1	2	1	2	$r_{21}(-2)$
	0	①	3	6	$r_{23}(2)$
	0	−2	−6	−12	
	1	0	−5	−10	
	0	1	3	6	
	0	0	0	0	